УДК 517.9

О. Ю. Динариев, А. Б. Мосолов

Метод обратной задачи для уравнения Бюргерса

В настоящей работе показано, что для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

существует представление в виде условия совместности двух линейных уравнений, которое можно использовать для решения (1) методом обратной задачи рассеяния.

Пусть $u = u(t, x) \in C^2(R^2)$, функция $u = u(t, x)$ стремится к нулю при $|x| \to +\infty$ для всякого фиксированного t, и для всякого t $u(t, \cdot) \in \in L^1(R)$. Определим матрицы

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u + i\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -\lambda^2 + \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{4}u^2 & i\lambda - \frac{1}{2}u \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где λ — произвольный действительный параметр. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно вектор-функции $\psi = \psi(t, x) \in C^2(R^2)$, принимающую значения в R^2:

$$\psi_x = U\psi \tag{2}$$

$$\psi = V\psi. \tag{3}$$

Условием совместности этой системы является равенство

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{4}$$

Левая часть уравнения (4) тождественно равна матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_t + uu_x - u_{xx}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому уравнение (4) эквивалентно уравнению (1). Представление уравнения (1) в виде условия совместности позволяет применить для решения (1) технику обратной задачи рассеяния [1—3].

Рассмотрим прямую задачу рассеяния для уравнения (2). Очевидно, что всякое решение (2) имеет асимптотику при $x \to \pm\infty$

$$\psi \to \alpha_{\pm}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \beta_{\pm}(t)\begin{pmatrix} \frac{i}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

При этом

$$\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \beta_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_- \\ \beta_- \end{pmatrix},$$

где коэффициенты рассеяния a, b зависят от t и λ. Коэффициенты рассеяния удобно искать, переписав уравнение (2) в более простом виде. Выполним преобразование

$$\psi = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} & \frac{i}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{\psi}.$$

Тогда (2) приводится к виду

$$\tilde{\psi}_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u & \frac{i}{2\lambda}e^{-i\lambda x}u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde{\psi},$$

а асимптотика (5) переходит в

$$\tilde{\psi} \to \alpha_{\pm}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_{\pm}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \to \pm\infty.$$

В новом представлении легко вычислить коэффициенты рассеяния:

$$a = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x)\,dx\right),$$

$$b = \frac{i}{2\lambda}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x)\,dx\right)\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u(t, y)\,dy - i\lambda x\right)dx.$$

Зная коэффициенты рассеяния $a = a(t)$ и $b = b(t, \lambda)$, можно восстановить функцию $u = u(t, x)$:

$$u(t, x) = \frac{U(t, x)}{a^{-1}(t) + \frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} U(t, y)\,dy}, \quad U(t, x) = -\frac{i\lambda}{\pi a(t)}\int_{-\infty}^{+\infty} b(t, \lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Найдем теперь зависимость коэффициентов рассеяния от времени. Подставляя (5) в (3), получаем $\alpha_{\pm}(t) = e^{-\lambda^2 t}\alpha_{\pm}(0)$, $\beta_{\pm}(t) = \beta_{\pm}(0)$, откуда $a(t) = a(0)$, $b(t, \lambda) = e^{-\lambda^2 t}b(0, \lambda)$.

В силу независимости a от времени величина $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx$ является интегралом уравнения (1). Функция $F(\lambda) = b(t, \lambda)/b^*(t, \lambda) = b(0, \lambda)/b^*(0,$

λ) служит производящей функцией для счетного набора других интегралов уравнения (1). Приведем для примера два таких интеграла, определенных для достаточно быстро убывающих при $|x| \to +\infty$ функций $u = u(t, x)$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xU(t, x)\, dx, \quad U(t, x) = u(t, x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} u(t, y)\, dy\right),$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 U(t, x)\, dx - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} xU(t, x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 U(t, x)\, dx.$$

Таким образом, уравнение Бюргерса (1) может быть решено по схеме обратной задачи рассеяния: по условию Коши $u(0, x) = u_0(x)$ вычисляются $a(0)$, $b(0, \lambda)$, а затем по $b(t, \lambda)$ вычисляется $u(t, x)$. Эта схема формально эквивалентна земене Коула — Хопфа [4, с. 100], сводящей (1) к линейному уравнению теплопроводности и решению последнего методом преобразования Фурье.

Факт наличия $U - V$-пары для уравнения Бюргерса представляет интерес, поскольку он является контрпримером к распространенному мнению, что диссипативные уравнения в частных производных не могут решаться с помощью метода обратной задачи рассеяния.

1. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функцион. анализ и его прил.— 1974.— **8**, вып. 3.— С. 43—53.
2. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Там же.— 1979.— **13**, вып. 3.—С. 13—22.
3. *Теория* солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М. : Мир. 1977.— 624 с.

ВНИИ природ. газов, Москва

Получено 13.10.86