УДК 519.21+517

В. В. Булдыгин, А. Б. Харазишвили

О цилиндрических и борелевских σ-алгебрах

Пусть E — топологическое векторное пространство с топологическим сопряженным E^* и H — некоторое подмножество в E^*. Будем обозначать символом $B(E, H)$ наименьшую σ-алгебру в E, относительно которой измеримы все функционалы из H (напомним, что σ-алгебры такого типа часто называют цилиндрическими σ-алгебрами). Далее, как обычно, обозначим символом $B(E)$ борелевскую σ-алгебру пространства E. Очевидно, что всегда имеет место включение $B(E, H) \subset \subset B(E)$. В настоящей статье для конкретных пространств E рассмотрим некоторые соотношения между σ-алгебрами $B(E, H)$ и $B(E)$. При этом в качестве множества H ниже будут фигурировать различные векторные подпространства из E^*, поскольку случай векторных подпространств представляется наиболее интересным с точки зрения приложений и, по существу, не ограничивает общности.

Хорошо известен следующий результат (см., например, [1, 2]). Пусть E — полное сепарабельное метризуемое топологическое векторное пространство и H — векторное подпространство в E^*. Тогда эквивалентны утверждения:

1) множество H отделяет точки в E;
2) σ-алгебра $B(E, H)$ совпадает с σ-алгеброй $B(E)$.

Здесь существенно каждое из условий, налагаемых на топологическое векторное пространство E. Убедимся в этом, рассмотрев следующие примеры.

Пример 1. Каково бы ни было бесконечномерное сепарабельное банахово пространство F, его можно наделить более сильной нормой $\|\cdot\|$, относительно которой оно будет неполным сепарабельным нормированным пространством. Это нетрудно сделать, воспользовавшись алгебраическими базисами Гамеля (см., например, [1]). Введя такую норму, положим $E = (F, \|\cdot\|)$, и пусть $H = F^* \subset E^*$. Тогда легко проверить, что $B(E, H) \neq B(E)$.

Пример 2. Пусть $E = l_\infty$, где l_∞ — банахово пространство всех ограниченных последовательностей вещественных чисел, наделенное нормой равномерной сходимости (ясно, что оно несепарабельно). Далее, пусть H — линейная оболочка семейства $(pr_p)_{n\in N}$, где $pr_n : x \to x_n$, $x = (x_n)_{nN\in}$, $x \in l_\infty$.

Тогда множество H отделяет точки в E, а σ-алгебра $B(E, H)$ является счетно-порожденной. В частности, мощность этой σ-алгебры не превышает мощности континуума. С другой стороны, легко проверить, что мощность борелевской σ-алгебры $B(E)$ в данном случае равна 2^c, где c обозначает мощность континуума (это вытекает из того факта, что в пространстве l имеется континуальное семейство попарно непересекающихся открытых шаров). Таким образом, в рассматриваемой ситуации, как и выше, выполняется соотношение $B(E, H) \neq B(E)$.

Следующий пример свидетельствует о существенности условия метризуемости пространства E.

Пример 3. Пусть T — произвольное множество мощности континуума, R — действительная прямая. Рассмотрим полное топологическое векторное пространство $E = R^T$ (наделенное тихоновской топологией). Это пространство неметризуемо. Убедимся, что оно сепарабельно, т. е. содержит в себе счетное всюду плотное подмножество. Для этого заметим сначала, что векторное пространство $E' = \bigcup\limits_n [-n, n]^T$, $n \in N$, $n \geqslant 1$, всюду плотно в пространстве E. Следовательно, достаточно установить сепарабельность каждого топологического пространства $[-n, n]^T$. Но поскольку все эти пространства гомеоморфны между собой, то вполне достаточно рассмотреть одно из них, например $Z = [-1,1]^T$. Для дальнейших целей будет удобно отождествить множество T с единичным сегментом $[0,1]$. Пусть Z' обозначает множество всех функций $f : [0,1] \to [-1,1]$, которые обладают следующим свойством: найдется (зависящее от f) конечное разбиение сегмента $[0,1]$ на промежутки с рациональными концами такое, что функция f постоянна на каждом из этих промежутков и принимает только рациональные значения. Очевидно, что множество Z' счетно. Кроме того, легко понять, что оно всюду плотно в пространстве $[-1,1]^T$, наделенном тихоновской топологией. Тем самым нужное нам утверждение доказано. Пусть теперь H — линейная оболочка семейства $(pr_t)_{t\in T}$, где $pr_t : x \to x_t$, $x = (x_t)_{t\in T}$, $x \in R^T$. Ясно, что множество H отделяет точки в E. Нетрудно проверить также, что в данном случае цилиндрическая σ-алгебра $B(E, H)$ не содержит одноточечных подмножеств пространства E. Таким образом, и здесь имеем $B(E, H) \neq B(E)$.

Основываясь на рассуждениях, приведенных в примере 3, можно в значительной степени усилить результат примера 2. Покажем, в частности, что мощность цилиндрической σ-алгебры $B(l_\infty, l_\infty^*)$ равна 2^c. Как установлено выше, существует сепарабельное компактное топологическое пространство Z, имеющее мощность 2^c. Снова обозначим через Z' какое-нибудь счетное всюду плотное подмножество в Z. Далее, всякой точке $z \in Z$ поставим в соответствие семейство $(U_i(z))_{i\in I}$, состоящее из всевозможных окрестностей этой точки. Тогда очевидно, что семейство $(U_i(z) \cap Z')_{i\in I}$ представляет собой некоторый фильтр (см. [3]) в множестве Z', который обозначим через $\Phi(z)$. Заметим, что в силу хаусдорфовости исходного пространства Z для любых двух различных точек $x \in Z$ и $y \in Z$ найдутся множества $X \in \Phi(x)$ и $Y \in \Phi(y)$ такие, что $X \cap Y = \varnothing$. Пусть теперь для каждой точки $z \in Z$ символ $\widehat{\Phi}(z)$ обозначает какой-нибудь ультрафильтр, мажорирующий (по включению) фильтр $\Phi(z)$. Тогда, учитывая последнее замечание, получаем семейство $(\widehat{\Phi}(z))_{z\in Z}$, состоящее из попарно различных ультрафильтров, заданных в счетном множестве Z'. Отождествим множество Z' с множеством N натуральных чисел. Совершенно ясно, что в множестве N

мы также будем иметь семейство $(\hat{\Phi}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно различных ультрафильтров, причем мощность множества Ξ тоже равна 2^c. Далее, всякий ультрафильтр $\hat{\Phi}_\xi$ $(\xi\in\Xi)$ определяет вероятностную конечно-аддитивную меру μ_ξ, заданную на всевозможных подмножествах множества N и принимающую значения, равные единице, на элементах ультрафильтра $\hat{\Phi}_\xi$. Семейство мер $(\mu_\xi)_{\xi\in\Xi}$ является ортогональным; другими словами, меры этого семейства попарно сингулярны. Каждая мера μ_ξ $(\xi\in\Xi)$ однозначно определяет непрерывный линейный функционал g_ξ на пространстве l_∞. В самом деле, если последовательность $\varphi=(x_n)_{n\in N}$ принадлежит пространству l_∞, то нужно положить

$$g_\xi(\varphi)=\int_N \varphi d\mu_\xi.$$

Это определение корректно в силу ограниченности последовательности φ и кроме того, очевидно, что

$$|g_\xi(\varphi)|\leqslant\|\varphi\|_\infty=\sup_{n\in N}|x_n|,\quad \varphi\in l_\infty.$$

Поскольку меры μ_ξ $(\xi\in\Xi)$ попарно сингулярны, то соответствующие им линейные функционалы g_ξ $(\xi\in\Xi)$ отличаются друг от друга. Таким образом, мы видим, что мощность векторного пространства l_∞^* равна 2^c. Отсюда легко вывести, что мощность цилиндрической σ-алгебры $B(l_\infty, l_\infty^*)$ тоже равна 2^c (так как в пространстве l_∞ имеется 2^c различных замкнутых гиперплоскостей). Следовательно, можно сделать такое заключение: каково бы ни было векторное пространство $H\subset l_\infty^*$ с мощностью, не превышающей мощности континуума, всегда выполняется соотношение

$$B(l_\infty, H)\neq B(l_\infty, l_\infty^*).$$

Действительно, это соотношение вытекает из того простого факта, что мощность σ-алгебры $B(l_\infty, H)$ не превышает мощности континуума. Оно показывает также, что всегда существует линейный функционал $h\in l_\infty^*$, не измеримый относительно цилиндрической σ-алгебры $B(l_\infty, H)$.

В связи с измеримостью линейных функционалов по отношению к различным цилиндрическим σ-алгебрам рассмотрим следующий пример.

Пример 4. Пусть R^N — топологическое векторное пространство, образованное всевозможными последовательностями вещественных чисел. Оно является пространством Фреше (относительно тихоновской топологии). Далее, пусть c_0 обозначает банахово пространство всех сходящихся к нулю последовательностей вещественных чисел, наделенное нормой равномерной сходимости. Ясно, что пространство c_0 сепарабельно и представляет собой всюду плотное борелевское подмножество пространства R^N. Кроме того, справедливы равенства

$$B(R^N, H)=B(R^N),\quad B(c_0, H)=B(c_0),$$

где H — линейная оболочка семейства канонических проекций $(pr_n)_{n\in N}$. Нетрудно убедиться, что H совпадает с топологически сопряженным к пространству R^N. Таким образом, топологическое сопряженное к пространству R^N имеет счетную алгебраическую размерность. С другой стороны, топологическое сопряженное c_0^*, являясь банаховым пространством, не может иметь счетной алгебраической размерности (в противном случае получалось бы противоречие с классической теоремой Бэра о категории). Пусть g — какой-нибудь функционал из c_0^*, не принадлежащий векторному пространству H. Тогда g представляет собой $B(R^N)$-измеримый линейный функционал, определенный на измеримом подмножестве c_0 пространства R^N. Утверждается, что этот функционал нельзя продолжить до $B(R^N)$-измеримого линейного функционала, заданного на всем пространстве R^N. В самом деле, предположим, что $\bar{g}$ является таким продолжением. Поскольку R^N есть пространство Фреше, то измеримый линейный функционал $\bar{g}$ будет и непрерывным (относительно тихоновской топологии в R^N). Следовательно, в силу изложенного выше, $\bar{g} \in H$. Но тогда и $g \in H$, вопреки выбору функционала g. Полученное противоречие показывает, что не существует $B(R^N)$-измеримого линейного продолжения функционала g на все пространство R^N. Здесь наблюдается коренное отличие от случая, когда рассматриваются непрерывные линейные функционалы: любой непрерывный линейный функционал, определенный на всюду плотном векторном подпространстве топологического векторного пространства E, можно продолжить до непрерывного линейного функционала, заданного на всем пространстве E.

Приведем еще один пример, показывающий, что утверждения 1 и 2 могут быть эквивалентны и для некоторых неполных сепарабельных нормированных векторных пространств.

Пример 5. Пусть E — векторное подпространство пространства R^N, образованное всеми финитными последовательностями. Если $x = (x_n)_{n \in N}$ принадлежит пространству E, то введем норму $\|x\|$ с помощью соотношения $\|x\| = \sum_{n \in N} |x_n|$. Такое определение нормы корректно, поскольку указанная сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. Тем самым E превращается в сепарабельное нормированное векторное пространство. Пусть, как и выше, H обозначает линейную оболочку семейства проекций $(pr_n)_{n \in N}$. Нетрудно убедиться, что справедливо равенство $B(E, H) = B(E)$. Рассмотрим теперь произвольное векторное пространство $H' \subset E^*$, отделяющее точки в E. Проверим, что каждый функционал pr_n $(n \in N)$ измерим относительно σ-алгебры $B(E, H')$, Достаточно провести рассуждение для функционала pr_0. Пусть R^k — подпространство в E, состоящее из тех последовательностей $(x_n)_{n \in N}$, у которых все координаты x_n, $n \geqslant k$, равны нулю. Поскольку множество H' отделяет точки в R^k, то алгебраическая размерность этого множества не меньше k. Отсюда вытекает, что найдется линейный функционал $g_k \in H'$ такой, что его сужение на пространство R^k совпадает с сужением функционала pr_0 на это же пространство. Следовательно, для всякой точки $x \in E$ будем иметь $pr_0(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x)$, т. е. функционал pr_0 измерим относительно σ-алгебры $B(E, H')$. Таким образом, доказано включение $B(E, H) \subset B(E, H')$. Но, с другой стороны, ясно, что $B(E, H') \subset B(E)$. Значит, справедливо равенство $B(E, H') = B(E)$.

В связи с рассмотренными примерами естественно возникает следующая задача: охарактеризовать все топологические векторные пространства E, в которых равенство $B(E, H) = B(E)$ имеет место для любого множества $H \subset E^*$, отделяющего точки в E. Как мы убедились, класс таких пространств строго шире класса польских топологических векторных пространств. Можно также поставить задачу об описании всех топологических векторных пространств E, в которых равенство $B(E, H_1) = B(E, H_2)$ выполняется при любых множествах $H_1 \subset E^*$ и $H_2 \subset E^*$, отделяющих точки в E. Обе сформулированные задачи представляют несомненный интерес для теории меры в бесконечномерных пространствах и теории случайных процессов.

В заключение рассмотрим применение свойств цилиндрических σ-алгебр к одному вопросу, связанному с измеримостью обобщенных банаховых пределов на пространстве l_∞. Предварительно напомним некоторые понятия, касающиеся гауссовских случайных элементов и гауссовских мер. Пусть (E, S) — измеримое векторное пространство, т. е. E — векторное пространство, а S — фиксированная σ-алгебра в E, согласованная с его векторной структурой. Будем называть случайный элемент X в пространстве (E, S)

центрированным гауссовским элементом, если для произвольных X_1 и X_2, являющихся независимыми копиями элемента X, случайные элементы $Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$, $Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$ также являются независимыми копиями элемента X (см. [4]).

Отметим, что если E — польское топологическое векторное пространство, находящееся в двойственности со своим топологически сопряженным пространством, а $S = B(E)$, то приведенное определение центрированного случайного гауссовского элемента совпадает с обычным определением центрированного случайного гауссовского элемента в $(E, B(E))$. Кроме того, можно убедиться, что если X есть центрированный случайный гауссовский элемент в измеримом векторном пространстве (E, S), а g — любой S-измеримый линейный функционал на E, то случайная величина $g \circ X = g(X)$ является центрированной гауссовской случайной величиной.

Пусть $A = (a_{nk})_{n,k \in N}$ — бесконечная треугольная матрица, столбцы которой принадлежат пространству c_0; другими словами, выполняются условия:

1°) $a_{nk} \in R$, $n \in N$, $k \in N$;
2°) $a_{nk} = 0$, $k > n$;
3°) $\lim\limits_{n \to \infty} a_{nk} = 0$, $k \in N$.

Класс матриц, удовлетворяющих этим условиям, обозначим через V_0. Далее, обозначим символом M_0 класс всех тех вероятностных мер μ на пространстве $(R^N, B(R^N))$, которые представимы в виде $\mu = \nu \circ A^{-1}$, где $A \in V_0$, а ν — счетное произведение последовательности симметричных вероятностных мер, заданных на $(R, B(R))$.

Для мер из класса M_0 справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $\mu \in M_0$. Тогда найдется число $\alpha = \alpha(\mu) \in [0, +\infty]$ такое, что*

$$\mu(\{x \in R^N : \overline{\lim_{n \to \infty}} |x_n| = \alpha\}) = 1.$$

Доказательство этого (и более общего) утверждения см. в [2]. Число $\alpha = \alpha(\mu)$ часто называют осцилляционной константой меры μ.

Пусть теперь μ — произвольная центрированная гауссовская мера из класса M_0. Если $\mu(l_\infty) = 1$, то меру μ можно рассматривать как заданную на измеримом векторном пространстве $(l_\infty, B(l_\infty, H))$, где H — линейная оболочка семейства проекций $(pr_n)_{n \in N}$. Предположим, что меру μ удается продолжить (с сохранением свойства гауссовости) до некоторой меры $\overline{\mu}$, заданной на измеримом векторном пространстве (l_∞, S), где S — некоторая σ-алгебра в l_∞, удовлетворяющая включениям $B(l_\infty, H) \subset S \subset B(l_\infty)$. Тогда можно сформулировать следующий результат.

Теорема. *Пусть g — любой обобщенный банахов предел на пространстве l_∞. Если функционал g измерим относительно σ-алгебры S, то он вырожден относительно меры $\overline{\mu}$:*

$$\overline{\mu}(\{x \in l_\infty : g(x) = 0\}) = 1.$$

Доказательство. Согласно одному из свойств обобщенных банаховых пределов (см. [5]), для всякого элемента $x = (x_n)_{n \in N}$ из пространства l_∞ выполняется соотношение

$$|g(x)| \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} |x_n|.$$

В силу закона «0 или 1» либо $\mu(c_0) = 1$, либо $\mu(l_\infty \setminus c_0) = 1$. Если $\mu(c_0) = 1$, то утверждение теоремы очевидно, поскольку на пространстве c_0 все обобщенные пределы тождественно равны нулю. Пусть теперь $\mu(l_\infty \setminus c_0) = 1$. Тогда, согласно изложенному выше, линейный и S-измеримый функционал g является центрированной гауссовской случайной величиной на вероятностном пространстве $(l_\infty, S, \overline{\mu})$. Дисперсия этой случайной величины есть

$$\sigma_g^2 = \int\limits_{l_\infty} |g(x)|^2 \overline{\mu}(dx).$$

Далее, в силу леммы для некоторого строго положительного числа $\alpha < +\infty$ выполняется соотношение

$$\mu(\{x \in l_\infty : |g(x)| \leqslant \alpha\}) = 1.$$

Это соотношение с учетом вида гауссовской плотности принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \int\limits_{-\alpha}^{-\alpha} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_g^2}\right) du = 1.$$

Однако последнее равенство невозможно при $\sigma_g^2 \neq 0$. Значит, $\sigma_g^2 = 0$, откуда немедленно вытекает справедливость утверждения теоремы.

Таким образом, если гауссовская мера из класса M_0 сосредоточена на множестве $l_\infty \setminus c_0$, то ее продолжение (с сохранением свойства гауссовости) на более широкие σ-алгебры, относительно которых измеримы нетривиальные функционалы из l_∞^*, возможно лишь в случае вырожденности (почти наверное) этих функционалов.

По поводу некоторых других свойств обобщенных пределов см., например, [6]. Отметим также что ряд довольно неожиданных эффектов, возникающих в связи с задачей продолжения гауссовских мер (с цилиндрической σ-алгебры на борелевскую σ-алгебру), рассмотрен в работе [7].

1. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
2. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 239 с.
3. *Бурбаки Н.* Общая топология (основные структуры).— М. : Наука, 1968.— 271 с.
4. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— Новое в зарубеж. науке. Математика, 1978, вып. 10, с. 63—132.
5. *Рудин У.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1975.— 443 с.
6. *Харазишвили А. Б.* Некоторые вопросы функционального анализа и их применения.— Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1979.— 160 с.
7. *Булдыгин В. В., Харазишвили А. Б.* О борелевских мерах в несепарабельных метрических пространствах.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 5, с. 552—556.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 01.03.85