УДК 517.948.34

Б. Е. Турбаев

О периодических решениях слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx/dt = Ax + f\left(t,\ x,\ \int\limits_{t-\eta}^{t} \varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds\right),\quad t = t_i(x),\quad \Delta x|_{t=t_i(x)} = I_i(x), \tag{1}$$

в которой $x = (x_1, \dots, x_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, $I_i = (I_i^{(1)}, \dots, I_i^{(m)})$, $t_i(x)$ — скалярные функции, A — постоянная матрица, вещественные части собственных чисел которой отличны от нуля, $\eta > 0$ и функции $f(t,\ x,\ y)$, $\varphi(t,\ s,\ x)$, $I_i(x)$, $t_i(x)$ удовлетворяют тождественно равенствам

$$f(t,\ x,\ y) = f(t+T,\ x,\ y),\quad \varphi(t,\ s,\ x) = \varphi(t+T,\ s+T,\ x),$$
$$I_{i+p}(x) = I_i(x),\quad t_{i+p}(x) = t_i(x) + T \tag{2}$$

для всех

$$t \in (-\infty,\ \infty),\quad s \in (-\infty,\ \infty),\quad i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots,\ \|x\| \leqslant h,\quad y \in R^r \tag{3}$$

при некотором натуральном p; T — период системы. Предположим также, что функции $f(t,\ x,\ y)$, $\varphi(t,\ s,\ x)$, $I_i(x)$ непрерывны в области (3) и удовлетворяют условию Липшица по x равномерно по t и i с постоянной N, т. е.

$$\|f(t,\ x',\ y') - f(t,\ x,\ y)\| \leqslant N(\|x'-x\| + \|y'-y\|),\quad \|\varphi(t,\ s,\ x') -$$
$$- \varphi(t,\ s,\ x)\| \leqslant N(\|x'-x\|),\quad \|I_i(x') - I_i(x)\| \leqslant N(\|x'-x\|) \tag{4}$$

для всех $-\infty < t < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots,$ $\|x\| \leqslant h$, $\|x'\| \leqslant h$, $y,\ y' \in R^r$. Будем считать, что поверхности, на которых происходит мгновенное изменение состояния системы, задаются непрерывно дифференцируемыми функциями $t = t_i(x)$ и при этом

$$\|\partial t_i/\partial x\| \leqslant N \tag{5}$$

для всех $i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots$ и $\|x\| \leqslant h$,

$$\inf_{\|x\| \leqslant h} t_{i+1}(x) - \sup_{\|x\| \leqslant h} t_i(x) \geqslant \theta > 0. \tag{6}$$

Исследуем вопрос существования периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений вида (1).

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть система уравнений*

$$dx/dt = Ax + P(t),\quad t \neq t_i,\quad \Delta x|_{t=t_i} = I_i \tag{7}$$

удовлетворяет условиям:

1) *вещественные части собственных чисел матрицы A отличны от нуля;*

2) *функция $P(t)$ кусочно-непрерывна с точками разрыва первого рода при $t = t_i$, периодическая по t с периодом T;*

3) *последовательность моментов $\{t_i\}$ и $\{I_i\}$ занумерована множеством целых чисел так, что*

$$t_{i+p} = t_i + T,\quad I_{i+p} = I_i,\quad i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots \tag{8}$$

для всякого натурального p. Тогда

1) *система уравнений (7) имеет единственное периодическое с периодом T решение $x^*(t)$;*

2) *можно указать такую положительную постоянную C, не зависящую от $P(t)$ и I_i, что*

$$\| x^*(t) \| \leqslant C \max \{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| P(t) \|, \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \| I_i \| \}. \tag{9}$$

Используя лемму 1, можно доказать существование периодического решения системы уравнений (1) в предположении, что последовательность гиперповерхностей $t = t_i(x)$ представляет собой последовательность гиперплоскостей $t = t_i$ и константа Липшица N удовлетворяет некоторому условию малости.

В рассматриваемом случае мгновенное изменение состояния системы происходит в фиксированные моменты времени, и для любых двух решений эти моменты одинаковые, разными являются только величины скачка в данные моменты времени. Это позволяет применять итерационные методы для отыскания периодического решения [1]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений*

$$dx/dt = Ax + f\left(t, x, \int_{t-\eta}^{t} \varphi(t, s, x(s))\, ds\right), \quad t = t_i, \quad \Delta x|_{t_i = t} = I_i(x), \tag{10}$$

матрица A, функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $I_i(x)$ такие же, как и в системе уравнений (1), и для последовательности моментов $\{t_i\}$ выполняются условия (5) *и* (6). *Тогда можно указать такое число $N_0 > 0$, что для всех $N \in]0, N_0]$ система уравнений* (10) *имеет единственное периодическое с периодом T решение.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $A = \mathrm{diag}(A_+, A_-)$, где A_+ и A_- — матрицы, вещественные части собственных чисел которых соответственно положительны и отрицательны.

Определим матрицу $G(t)$ соотношением

$$G(t) = \begin{cases} \mathrm{diag}(-\exp(-A+t), 0), & t > 0, \\ \mathrm{diag}(0, \exp(-A-t)), & t < 0. \end{cases}$$

Построим последовательность функций $x_n(t)$, каждая из которых является периодическим решением системы уравнений

$$dx/dt = Ax + f(t, x_{n-1}(t), \int_{t-\eta}^{t} \varphi(t, s, x_{n-1}(s))\, ds), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = I_i(x_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau - t) f(\tau, 0), \int_{\tau-\eta}^{\tau} \varphi(\tau, s, 0)\, ds)\, d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t - t_i) I_i(0). \tag{12}$$

Согласно лемме 1 при $n = 0, 1, 2, \ldots$ периодическое решение системы уравнений (11) определяется формулой

$$x_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau - t) f(\tau, x_n(\tau), \int_{\tau-\eta}^{\tau} \varphi(\eta, s, x_n(s))\, ds) \times$$

$$\times d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t - t_i) I_i(x_n(t_i - 0)). \tag{13}$$

Методом полной математической индукции легко установить справедливость неравенств

$$\| x_n(t) \| \leqslant CM(1 - NC)^{-1}, \tag{14}$$

$$\| x_{n+1}(t) \| \leqslant (NC)^n CM(1 - NC)^{-1} \tag{15}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$, и всех $t \in (-\infty, \infty)$, где $C = 4k \max\{\gamma^{-1}, (1 - e^{-\gamma\theta})^{-1}\}$, $\theta = \min(t_{i+1} - t_i)$, $M = \sup\limits_{t \in (-\infty,\infty)} \| f(t, x, y) \| + \sup\limits_{i \in (-\infty,\infty)} \| I_i(x) \|$, k и γ — положительные постоянные. Потребуем теперь, аналогично [2], чтобы

$$NC < 1 \tag{16}$$

и

$$h > CM (1 - NC)^{-1}. \tag{17}$$

Тогда каждая из функций $x_n(t)$ принимает значения из области $\|x\| \leqslant h$, следовательно, итерационный процесс продолжим, а в силу неравенства (15) следует равномерная при $t \in (-\infty, \infty)$ сходимость последовательности функций (13). При этом предельная функция $x^*(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ периодическая по t с периодом T и принимает значения в области $\| x \| \leqslant h$.

Переходя в (13) к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что предельная функция $x^*(t)$ при $t_i < t < t_{i+1}$ удовлетворяет равенству $dx^*/dt = Ax^* + f(t, x^*(t), \int\limits_{t-\eta}^{\tau} \varphi(\tau, s, x^*(s))\, ds)$, а при $t = t_i$ — условию $\Delta x^* |_{t=t_i} = I_i(x^*(t_i - 0))$, следовательно, $x^*(t)$ — периодическое решение системы уравнений (10). Единственность такого решения следует из единственности периодического решения системы уравнений (11) при каждом n.

Перейдем теперь к доказательству существования периодического решения системы уравнений (1) общего вида, т. е. предположим, что импульсное воздействие происходит в момент попадания изображающей точки на гиперповерхность $t = t_i(x)$. Система уравнений (1) существенно отличается от системы (10). Основное отличие — это возможность в системе уравнений (1) «биения» некоторых ее решений о поверхности $t = t_i(x)$, т. е. встречи с тем же решением некоторой поверхности несколько раз. Исследуя систему уравнений (1), будем предполагать, что решения пересекают каждую поверхность $t = t_i(x)$ только один раз, а для этого придется наложить дополнительные условия на функции $t_i(x)$ и $I_i(x)$. Эти условия определяются следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть в системе уравнений* (1) *функции* $t_i(x)$ и $I_i(x)$ *таковы, что* $\sup\limits_{0 \leqslant \delta \leqslant 1} \langle \partial t_i(x + \delta I_i(x))/\partial x, I_i(x) \rangle \leqslant 0$ *для всех* i *и* $\| x \| \leqslant h$. *Тогда решение системы уравнений* (1) *при достаточно малых* N *пересекает каждую поверхность* $t = t_i(x)$ *на сегменте* $t \in [t_0, t_0 + l]$, $l > 0$, *только один раз*.

Лемма доказывается аналогично лемме 3 [2].

Исключив таким образом «биения» решений системы уравнений (1) о поверхности $t = t_i(x)$, зафиксируем p точек $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(p)}$, $\| y^{(j)} \| \leqslant h$, $j = 1, \ldots, p$, и построим последовательность функций

$$x_{n+1}(t, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\tau - t) f(\tau, x_n(\tau, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}),$$
$$\int\limits_{\tau-\eta}^{\tau} \varphi(\tau, s, x_n(s, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}))\, ds)\, d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t - t_i(y^{(i)})) I_i(y^{(i)}), \ y^{(i+p)} = y^i, \tag{18}$$

взяв за начальную функцию

$$x_0(t, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\tau - t) f\left(\tau, 0, \int\limits_{\tau-\eta}^{\tau} \varphi(\tau, s, 0)\, ds\right) \times$$
$$\times d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t - t_i(y^{(i)})) I_i(y^{(t)}).$$

Если теперь последовательность периодических функций равномерно сходится, то предельная функция $x^*(t, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)})$ является периодическим решением системы уравнений

$$dx/dt = Ax + f\left(t,\ x,\ \int\limits_{t-\eta}^{t} \varphi(t,\ s,\ x(s))\ ds\right), \quad t \neq t_i(y^{(i)}),$$

$$\Delta x\,|_{t=t_i(y^{(i)})} = I_i(y^{(i)}). \tag{19}$$

Выбрав теперь $y^{(i)}$ таким образом, чтобы

$$y^{(i)} = x^*(t_i(y^{(i)}),\ y^{(1)}, \ldots,\ y^{(p)}), \tag{20}$$

получим, что предельная функция $x^*(t,\ y^{(1)}, \ldots,\ y^{(p)})$ и будет искомым периодическим решением системы уравнений (1).

Как и в работах [2, 3], где при достаточно малых значениях константы Липшица N последовательность функций (18) равномерно сходится, система уравнений (9) имеет единственное решение.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть в системе уравнений*

$$dx/dt = Ax + f\left(t,\ x,\ \int\limits_{t-\eta}^{\eta} \varphi(t,\ s,\ x(s))\, ds\right),\ t \neq t_i(x), \quad \Delta x\,|_{t=t_i(x)} = I_i(x), \tag{21}$$

матрица A, функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $I_i(x)$ такие, как и в системе уравнений (1), для последовательности функции $\{t_t\}$ выполняются условия (5) и (6) и функции $t_i(x)$ и $I(x)$ таковы, что

$$\sup_{0\leqslant\delta\leqslant 1} \langle \partial t_i(x + \delta I(x))/\partial x,\ I_i(x)\rangle \leqslant 0 \tag{22}$$

для всех $i = 0, \pm 1, \ldots, \| x \| \leqslant h$. Тогда можно указать такое число $N_0 > 0$, что для всех $N \in]0,\ N_0]$ система уравнений (21) имеет единственное периодическое решение с периодом T.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 503 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 5, с. 1034—1045.
3. *Перестюк Н. А., Сарафова Г. Х., Хекимова М. А.* Периодические решения слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика, 1980, вып. 22, с. 96—101.

Киев. ун-т Получено 06.12.84