УДК 517.54

В. И. Рязанов

О сходимости характеристик квазиконформных отображений

В работе изучается сходимость комплексных характеристик квазиконформных отображений. Историю вопроса и основные предшествующие результаты можно найти в работах [1—6]. Понятие сходимости комплексных характеристик, индуцируемой локально равномерной сходимостью квазиконформных отображений, введено в работе [6]. В дальнейшем эта сходимость называется сходимостью характеристик.

1. Понятие и основные свойства сходимости характеристик. Согласно одному из аналитических определений (см. [2, с. 194]) квазиконформное отображение есть гомеоморфное обобщенное решение f уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где почти всюду (п. в.)

$$|\mu(z)| \leqslant q < 1. \tag{2}$$

При этом функцию $\mu(z)$ принято называть комплексной характеристикой отображения f или просто характеристикой.

Итак, пусть $\mathfrak{M}_q$, $0 < q < 1$, — класс всех измеримых комплекснозначных функций $\mu(z)$, заданных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и удовлетворяющих неравенству (2) п. в.

Определение. *Будем говорить, что последовательность $\mu_n \in \mathfrak{M}_q$ сходится к $\mu \in \mathfrak{M}_q$ в смысле характеристик, и писать $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$, если найдется последовательность квазиконформных отображений f_n с характеристиками μ_n, которая сходится локально равномерно (л. р.) к квазиконформному отображению f с характеристикой μ.*

Как легко показать на основе теоремы Вейерштрасса для аналитических функций, если существуют две последовательности квазиконформных отображений f_n и g_n с одинаковыми характеристиками μ_n, которые сходятся л. р. к квазиконформным отображениям f и g с характеристиками μ и $\varkappa$ соответственно, то $\mu(z) = \varkappa(z)$ п. в.

Замечание 1. Предел в смысле сходимости характеристик единствен с точностью до эквивалентности.

В дальнейшем функции из $\mathfrak{M}_q$, которые п. в. совпадают, будем считать эквивалентными, и, строго говоря, элементами $\mathfrak{M}_q$ будем считать классы эквивалентности. В таком случае на $\mathfrak{M}_q$ можно ввести метрику, порождающую сходимость характеристик.

Пусть $\mathfrak{F}_q$ — класс всех квазиконформных отображений расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, оставляющих неподвижными точки 0, 1 и ∞.

Заметим, что для любого $\mu \in \mathfrak{M}_q$ существует и единственно отображение $f_\mu \in \mathfrak{F}_q$ с характеристикой μ [7, с. 90]. Наоборот, каждому $f \in \mathfrak{F}_q$ соответствует единственный класс эквивалентности из $\mathfrak{M}_q$ его характеристик.

В соответствии с этим при любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_q$ полагаем

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\rho_m(\mu_1, \mu_2)}{1 + \rho_m(\mu_1, \mu_2)}, \tag{3}$$

где $\rho_m(\mu_1, \mu_2) = \max\limits_{|z| \leqslant m} |f_{\mu_1}(z) - f_{\mu_2}(z)|$, $m = 1, 2, \ldots$.

Определенное таким образом расстояние ρ (см. [8, с. 228 и 243]) порождает в $\mathfrak{M}_q$ сходимость, равносильную сходимости $f_{\mu_n} \xrightarrow{\text{л.р.}} f_\mu$. Поэтому (см. [2, с. 76]) метрическое пространство $(\mathfrak{M}_q, \rho)$ является секвенциально компактным (см. [8, с. 197 — 199; 9, с. 9]).

В силу определения сходимости характеристик, замечания 1 и общих свойств секвенциально компактных пространств [8, с. 203] сходимость $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$ равносильна $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$.

Предложение 1. *Сходимость характеристик порождает на множестве функций $\mathfrak{M}_q$ топологию, которая является метризуемой и секвенциально компактной.*

Отсюда (см. [8, с. 203]) получаем следующую лемму.

Лемма 1. *Если каждая сходящаяся в смысле характеристик подпоследовательность некоторой последовательности $\mu_n \in \mathfrak{M}_q$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к одному и тому же пределу $\mu \in \mathfrak{M}_q$, то и вся последовательность $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$.*

Отметим также локальный характер сходимости характеристик.

Предложение 2. *Пусть μ и $\mu_n \in \mathfrak{M}_q$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда для сходимости $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$ необходимо и достаточно, чтобы $\mu_n \xrightarrow[K]{\text{хар.}} \mu$ на любом компакте K из $\mathbb{C}$. Здесь через $\mu_n \xrightarrow[K]{\text{хар.}} \mu$ обозначена сходимость в смысле характеристик срезок функций на компакте K.*

Доказательство. 1. Итак, пусть $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$ и пусть $\tilde{\mu}_n = \chi_K \mu_n$ и $\tilde{\mu} = \chi_K \mu$, где χ_K — характеристическая функция компакта K.

В силу леммы 1 для доказательства сходимости $\tilde{\mu}_n \xrightarrow{\text{хар.}} \tilde{\mu}$ достаточно рассмотреть произвольную сходящуюся подпоследовательность $\tilde{\mu}_{n_m} \xrightarrow{\text{хар.}} \varkappa$ и показать, что $\varkappa = \tilde{\mu}$ п. в.

Но по определению сходимости характеристик существуют последовательности квазиконформных отображений f_m и g_m с характеристиками μ_{n_m} и $\tilde{\mu}_{n_m}$, которые сходятся локально равномерно к квазиконформным отображениям f и g с характеристиками μ и $\varkappa$ соответственно.

По теореме Штребеля [5] $\varkappa(z) = 0$ для п. в. $z \in \mathbb{C} \setminus K$. С другой стороны, характеристики последовательности $f_m \circ g_m^{-1}$ зануляются на компакте K и опять по теореме Штребеля получаем, что $\varkappa(z) = \mu(z)$ для п. в. $z \in K$. Таким образом, $\varkappa(z) = \tilde{\mu}(z)$ п. в. Тем самым необходимость доказана.

2. Пусть теперь $\mu_n \xrightarrow[K]{\text{хар.}} \mu$ для любого компакта K из $\mathbb{C}$. В частности, это верно для кругов $K_l = \{z : |z| \leqslant l\}$, $l = 1, 2, \ldots$, которые образуют счетное исчерпание плоскости.

Итак, в соответствии с леммой 1 рассмотрим произвольную сходящуюся подпоследовательность $\mu_{n_m} \xrightarrow{\text{хар.}} \varkappa$. Из необходимости условия следует, что $\mu_{n_m} \xrightarrow[K_l]{\text{хар.}} \varkappa$, $l = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $\varkappa(z) = \mu(z)$ п. в. на K_l, $l = 1, 2, \ldots$, что устанавливается аналогично изложенному выше на основе теоремы Штребеля. Наконец, в силу счетности исчерпания $\{K_l\}$ имеем $\varkappa(z) = \mu(z)$ для п. в. $z \in \mathbb{C}$.

Аналогично на основе леммы 1, теоремы Берса [2, с. 197] и известного свойства сходимости по мере (см., например, [10, с. 158]) доказывается следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть* μ *и* $\mu_n \in \mathfrak{M}_q$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда для сходимости* $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$ *достаточно выполнения любого из следующих условий:*

1) μ_n *сходится к* μ *п. в.*;
2) μ_n *сходится к* μ *локально по мере*;
3) μ_n *сходится к* μ *локально в* $\mathscr{L}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

При этом ни одно из указанных условий не является необходимым для сходимости $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$.

2. Нормальные решения уравнения Бельтрами и сходимость характеристик. Пусть теперь $\mathfrak{M}_q(K)$ — подкласс $\mathfrak{M}_q$ функций с носителем в компакте K. Обозначим через $\mathfrak{N}_q(K)$ класс нормальных решений [7, с. 86] уравнения Бельтрами (1) с характеристиками из $\mathfrak{M}_q(K)$. Как известно [7, с. 89], нормальные решения уравнения Бельтрами являются квазиконформными гомеоморфизмами.

Лемма 2. *Класс* $\mathfrak{N}_q(K)$ *секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости.*

Доказательство. Так как нормальные решения уравнений Бельтрами с характеристиками класса $\mathfrak{M}_q(K)$ — Q-квазиконформные гомеоморфизмы расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, $Q=(1+q)(1-q)^{-1}$, и удовлетворяют условиям $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$ [7, с. 86—89], то они образуют нормальное семейство [2, с. 76]. Поэтому из любой последовательности $f_n \in \mathfrak{N}_q(K)$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность f_{n_m}, которая сходится локально равномерно в сферической метрике. При этом предельная функция f является либо Q-квазиконформным отображением $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, либо $f(z) \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C}$ и $f(\infty) = \infty$, либо $f(z) \equiv \infty$ при $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ и $f(0) = 0$ (см. [2, с. 76—77]). Покажем, что два последних случая на самом деле исключаются.

В первом случае $f_{n_m} \to 0$ локально равномерно. Но тогда по формуле Грина для любого прямоугольника R $\iint\limits_R (f_{n_m})_z dxdy \to 0$. Однако это противоречит оценке [7, с. 86]

$$\| f_z - 1 \|_p \leqslant \frac{qc_p}{1 - qc_p} (S_K)^{1/p} = C = C(p, q, K),$$

где S_K — площадь компакта K, C_p — норма оператора Гильберта в пространстве $\mathscr{L}_p$ ($qc_p < 1$ при $p > 2$, достаточно близких к 2). Действительно, для любого прямоугольника R в указанном случае имеем

$$\| (f_{n_m})_z - 1 \|_p \geqslant \| (f_{n_m})_z - 1 \|_{\mathscr{L}_p(R)} \geqslant (S_R)^{-(p-1)/p} \| (f_{n_m})_z - 1 \|_{\mathscr{L}_1(R)} \geqslant$$
$$\geqslant (S_R)^{-(p-1)/p} \left| \iint\limits_R \{(f_{n_m})_z - 1\} dxdy \right| \geqslant$$
$$\geqslant (S_R)^{-(p-1)/p} \left| \left| \iint\limits_R (f_{n_m})_z dxdy \right| - S_R \right| \to (S_R)^{1/p},$$

т. е. в силу произвола R норма $\| (f_{n_m})_z - 1 \|_p$ становится бесконечно большой, что и противоречит приведенной выше оценке. Тем самым рассматриваемый случай исключен.

Во втором случае $f_{n_m} \to \infty$ локально равномерно относительно сферической метрики в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Ввиду гомеоморфности отображений и нормировки $f_{n_m}(0) = 0$ это приводит к тому, что площадь $S(f_{n_m}(\Delta_r))$, $\Delta_r = \{z: |z| \leqslant r\}$, стремится к ∞ при любом $r > 0$. Однако это противоречит следующей оценке в классе $\mathfrak{N}_q(K)$:

$$[S(f(\Delta_r))]^{1/2} = \left(\iint\limits_{|z|\leqslant r} (1 - |\mu|^2)\,|f_z|^2 dxdy\right)^{1/2} \leqslant \|f_z\|_{\mathscr{L}_2(\Delta_r)} \leqslant \|f_z - 1\|_{\mathscr{L}_2(\Delta_r)} +$$

$$+ \pi^{1/2} r \leqslant \|f_z - 1\|_{\mathscr{L}_2(\mathbb{C})} + \pi^{1/2} r \leqslant \frac{q}{1-q}(S_K)^{1/2} + \pi^{1/2} r.$$

Таким образом, второй случай также исключается.

В случае $f_{n_m} \xrightarrow{\text{л.р.}} f$, где f — некоторое Q-квазиконформное отображение, $[(f_{n_m})_z - 1] \xrightarrow{\text{сл.}} (f_z - 1)$ в $\mathscr{L}_p$ (см. [2, с. 196; 7, с. 86; 11, с. 44]). В силу оценки, приведенной в п. 1, а также слабой компактности шара имеем $\|f_z - 1\|_p \leqslant C(p, q, K)$. Нормировка $f(0) = 0$ очевидна. Кроме того, из теоремы Штребеля следует, что носитель характеристики μ отображения f лежит в K и что $|\mu(z)| \leqslant q$ п. в. на K. Таким образом, $f \in \mathfrak{N}_q(K)$. Тем самым лемма 2 полностью доказана.

На основе лемм 1 и 2 (см. также [8, с. 203]) аналогично предложению 2 доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* μ *и* $\mu_n \in \mathfrak{M}_q(K)$, $n = 1, 2, \ldots$, *а* f *и* $f_n \in \mathfrak{N}_q(K)$ — *соответствующие нормальные решения уравнения Бельтрами. Тогда для сходимости* $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$ *необходимо и достаточно, чтобы* $f_n \xrightarrow{\text{л.р.}} f$.

3. Критерий сходимости характеристик. Пусть N — нелинейный оператор, заданный на классе $\mathfrak{M}_q(K)$ соотношением $N(\mu) = T(\mu) + T(\mu T(\mu)) + \ldots$, где сходимость ряда понимается по норме $\mathscr{L}_2$ [2, с. 224], а T — оператор Гильберта, $T(\mu) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta d\bar{\zeta}$.

Ввиду локального характера сходимости характеристик (предложение 2) вопрос достаточно изучить на классе $\mathfrak{M}_q(K)$.

Теорема. *Пусть* μ *и* $\mu_n \in \mathfrak{M}_q(K)$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда для сходимости* $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$ *необходимо и достаточно, чтобы* $N(\mu_n) \xrightarrow{\text{сл.}} N(\mu)$ *в* $\mathscr{L}_2$.

Доказательство. Необходимость. Итак, пусть $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$. Тогда по лемме 3 $f_n \xrightarrow{\text{л.р.}} f$, где f и $f_n \in \mathfrak{N}_q(K)$ — соответствующие нормальные решения уравнения Бельтрами (1). Но тогда (см. [2, с. 196]) для любого прямоугольника R

$$\iint\limits_R (f_n)_z dxdy \to \iint\limits_R f_z dxdy.$$

С другой стороны, для нормальных решений $(f_n)_z = 1 + N(\mu_n)$ и $f_z = 1 + N(\mu)$ (см. [7, с. 85—86]). Таким образом, для любого прямоугольника

$$\iint\limits_R N(\mu_n)\, dxdy \to \iint\limits_R N(\mu)\, dxdy.$$

В силу соотношения изометрии для оператора Гильберта [7, с. 81] оператор N ограничен в $\mathscr{L}_2$ и потому (см. [11, с. 44]) $N(\mu_n) \xrightarrow{\text{сл}} N(\mu)$ в $\mathscr{L}_2$.

Достаточность. Пусть $N(\mu_n) \xrightarrow{\text{сл.}} N(\mu)$ в $\mathscr{L}_2$. Чтобы убедиться в достаточности этого условия, рассмотрим в соответствии с леммой 1 произвольную сходящуюся подпоследовательность $\mu_{n_m} \xrightarrow{\text{хар}} \mu_0$ и покажем, что $\mu_0(z) = \mu(z)$ п. в.

Действительно, из необходимости условия заключаем, что $N(\mu_{n_m}) \xrightarrow{\text{сл.}} N(\mu_0)$, а в силу единственности слабого предела имеем $N(\mu) = N(\mu_0)$.

Пусть $\varphi = N(\mu) = N(\mu_0)$. Применяя к обеим частям равенства $1 + \varphi = 1 + N(\mu)$ оператор $P_\mu(\psi) = \psi - T(\mu\psi)$, получаем равенство $\varphi = T(\mu(1 + \varphi))$. Аналогично, применяя к равенству $1 + \varphi = 1 + N(\mu_0)$ оператор $P_{\mu_0}(\psi) = \psi - T(\mu_0\psi)$, имеем $\varphi = T(\mu_0(1 + \varphi))$. Следовательно, $T((\mu -$

$-\mu_0)(1+\varphi))\equiv 0$. Но тогда из соотношения изометрии для оператора Гильберта получаем $(\mu-\mu_0)(1+\varphi)=0$ п. в. Однако $1+\varphi=f_z\neq 0$ п. в. [7, с. 37], где f — нормальное решение уравнения Бельтрами с характеристикой μ. Таким образом, $\mu(z)=\mu_0(z)$ п. в., что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что слабая сходимость преобразований Гильберта $T\mu_n \xrightarrow{\text{сл.}} T\mu$ не является ни необходимым, ни достаточным условием сходимости характеристик $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu$. Это следует из того, что оператор Гильберта линеен и ограничен в $\mathscr{L}_2$, как и обратный к нему оператор, а потому сходимость $T\mu_n \xrightarrow{\text{сл.}} T\mu$ равносильна сходимости $\mu_n \xrightarrow{\text{сл.}} \mu$. Ранее (см. [6, с. 25]) автором было установлено, что сходимость $\mu_n \xrightarrow{\text{сл.}} \mu$ не является ни необходимым, ни достаточным условием сходимости $\mu_n \xrightarrow{\text{хар.}} \mu_n$.

Отметим, наконец, что оператор N, хотя и не линеен, ограничен в $\mathscr{L}_2$. Более того, он является аналитическим оператором [12, с. 112].

1. *Ahlfors L.*, *Bers L.* Riemann's mapping theorem for variable metrics.— Ann. Math., 1960, **72**, N 2, p. 385—401.
2. *Lehto O.*, *Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen.— Berlin etc. : Springer, 1965.— 269 S.
3. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами.— Мат. сб., 1957, **43**, № 4, с. 451—503.
4. *Leschinger K.* Untersuchungen uber Jacobi-Determinanten von Zweidimensionalen quasikonformen Abbildungen.— Bonn. math. Schr. 1974, N 72, S. 1—58.
5. *Strebel K.* Ein Konvergenzsatz fur Folgen quasikonformer Abaildungen.— Comment. math. helv., 1969, **44**, N 7, S. 469—475.
6. *Рязанов В. И.* Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 6, с. 24—26.
7. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям.— М. : Мир, 1969.— 133 с.
8. *Куратовский К.* Топология : В 2-х т.— М. : Мир, 1966.— Т. 1. 594 с.
9. *Куратовский К.* Топология : В 2-х т.— М. : Мир, 1969.— Т. 2. 624 с.
10. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной.— М. : Наука, 1965.— 301 с.
11. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1972.— 544 с.
12. *Красносельский М. А.*, *Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М. : Наука, 1975.— 512 с.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 04.10.84