УДК 519.21

Дж. К. Непесова, Б. Пирджанов

Предельное распределение времени достижения уровня случайным блужданием с отражением на суперпозиции двух процессов восстановления

В работе [1] получены уравнения для производящих функций времен достижения уровня случайным блужданием с отражением, скачки которого происходят в моменты суперпозиции пуассоновского и рекуррентного независимых процессов восстановления. В настоящей работе изучается предельное поведение времени достижения удаляющегося уровня при выполнении условий существования стационарного распределения случайного блуждания с отражением со скачками $\chi = \sum_{m=1}^{\nu_\varkappa} \theta_m - 1$ с производящей функцией

$$g_0(z) = Mz^{\chi} = z^{-1} g(a(1 - p(z))), \quad p(z) = Mz^{\theta_m}, \quad g(\lambda) = Me^{-\lambda\varkappa}, \tag{1}$$

ν_t — пуассоновский процесс с параметром a.

Введем обозначения

$$\chi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \chi_k, \quad \overline{\chi} = \max_{n \geqslant 0} \chi^{(n)}. \tag{2}$$

Как известно (см. [2], § 4.1), при выполнении условия

$$M\chi = abc - 1 < 0 \text{ с вероятностью } 1 \tag{3}$$

случайная величина $\overline{\chi}$ конечна и ее распределение совпадает со стационарным распределением случайного блуждания на положительной полуоси с отражением в нуле с производящей функцией скачков (1). Будем также предполагать выполненным условие существования положительного корня $z_0 > 1$ уравнения

$$g(a(1 - p(z_0))) = z_0. \tag{4}$$

Обозначим

$$\mu = (z_0 - 1)/\mu_+(0), \quad \mu_+(0) = g'_z(a(1 - p(z_0))) - 1 > 0. \tag{5}$$

Здесь используются обозначения работы [1] и методы, развитые в работе [2]. Исходным объектом исследования служат решения уравнений для производящих функций (см. лемму 2 работы [1])

$$\varphi_r(\lambda) - \sum_{k=0}^{r} g_k(\lambda)\,\varphi_{r+1-k}(\lambda) = q_r(\lambda), \quad 0 \leqslant r \leqslant N, \tag{6}$$

с дополнительным условием отражения

$$\varphi_N(\lambda) = \varphi_{N+1}(\lambda). \tag{7}$$

Последовательности $g_r(\lambda)$ и $q_r(\lambda)$, $r \geqslant 0$, определяются производящими функциями

$$\sum_{r=0}^{\infty} z^r g_r(\lambda) = g(\lambda + a(1 - p(z))) = \int_0^{\infty} \exp[-(\lambda + a(1 - p(z)))\,x]\,dG(x), \tag{8}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} z^r q_r(\lambda) = Q(z, \lambda) = a(1 - p(z))\,[1 - g(\lambda + a(1 - p(z)))]/$$

$$/[(\lambda + a(1 - p(z)))\,(1 - z)]. \tag{9}$$

Для представления решения задачи (6)—(7) с помощью резольвенты определим производящую функцию резольвенты соотношением

$$R(z, \lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} z^r R_r(\lambda) = g(\lambda)\,[z^{-1} g(\lambda + a(1 - p(z))) - 1]^{-1}. \tag{10}$$

В частности,

$$R(z, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} z^r R_r(0) = z\,[g(a(1 - p(z)) - z]^{-1}. \tag{11}$$

Здесь при выполнении условия (3) (см. также [2], § 4.1)

$$R_r(0) = W_r/\rho, \quad W_r = P(\bar{\chi} < r), \quad r > 0, \quad \rho = 1 - abc. \tag{12}$$

Т е о р е м а. *При выполнении условий* (4) *и* $\rho = 1 - abc > 0$ (*снос к экрану отражения*) *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{N \to \infty} M e^{-\Lambda z_0^{-N-1} \tau_r^N} = 1 - W_r + \frac{c}{c + \Lambda} W_r. \tag{13}$$

Здесь c — *параметр предельного показательного закона,*

$$c = \mu\rho^2/b. \tag{14}$$

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

Л е м м а 1. *Функция* $K_\lambda(z) = g(\lambda + a(1 - p(z))) - z$ *аналитична в круге* $|z| \leqslant z_0 + \delta$ *и отлична от нуля, за исключением двух вещественных нулей* $z_\pm(\lambda)$, *имеющих асимптотическое представление при* $\lambda \to 0$:

$$z_-(\lambda) = 1 - \lambda b/\rho + o(\lambda), \tag{15}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} z_+(\lambda) = z_0 > 1. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположения о существовании корня $z_0 > 1$ уравнения (4) следует существование нулей $z_\pm(\lambda)$ функции $K_\lambda(z)$. Будем искать асимптотику этих нулей в виде

$$z_-(\lambda) = 1 + d_-\lambda + o(\lambda), \quad z_+(\lambda) = z_0 + d_+\lambda + o(\lambda). \tag{17}$$

Уравнение для нулей функции $K_\lambda(z)$ имеет вид

$$g(\lambda + a(1 - p(z(\lambda)))) = z(\lambda). \tag{18}$$

Отсюда по теореме о неявной функции [3] находим

$$z'(\lambda)=\int_0^{\infty} t\exp\left(-(\lambda+a(1-p(z(\lambda))))\,t\right)dG(t)\Big/\Big[-1+$$

$$+\,ap'(z(\lambda))\int_0^{\infty} t\exp\left(-(\lambda+a(1-p(z(\lambda))))\,t\right)dG(t)\Big]. \tag{19}$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$ для производной нуля $z_-(\lambda)$, имеем $\lim\limits_{\lambda\to 0} z'_-(\lambda)=d_-=-b/\rho$, откуда следует (15). Второе соотношение (16) очевидно.

Лемма 2. *Решение задачи* (6), (7) *представимо в виде*

$$\varphi_r(\lambda)=1-C_N(\lambda)R_r(\lambda)-g^{-1}(\lambda)\sum_{k=1}^{r-1}R_{r-k}(\lambda)d_k(\lambda). \tag{20}$$

Здесь

$$C_N(\lambda)=C_N^+(\lambda)/\Delta_N(\lambda), \tag{21}$$

$$\Delta_N(\lambda)=R_{N+1}(\lambda)-R_N(\lambda), \tag{22}$$

$$C_N^+(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\Delta_{N-k}(\lambda)d_k(\lambda). \tag{23}$$

Производящая функция последовательности $d_k(\lambda)$, $k\geqslant 0$, *имеет вид*

$$D(z,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k d_k(\lambda)=\lambda\,[g(\lambda+a(1-p(z)))-1]/[(\lambda+a(1-p(z)))(1-z)]. \tag{24}$$

Для доказательства леммы преобразуем задачу (6), (7) к стандартному виду (см. [2], § 4.3). Введем

$$\tilde{\varphi}_r(\lambda)=1-\varphi_r(\lambda),\quad r\geqslant 0. \tag{25}$$

Для функции $\tilde{\varphi}_r(\lambda)$ получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{r}g_k(\lambda)\tilde{\varphi}_{r+1-k}(\lambda)-\tilde{\varphi}_r(\lambda)=d_k(\lambda),\quad 0\leqslant r\leqslant N, \tag{26}$$

с

$$d_r(\lambda)=\sum_{k=0}^{r}g_k(\lambda)+q_r(\lambda)-1,\quad r\geqslant 0, \tag{27}$$

и с тем же условием отражения (7). При этом легко проверяется, что производящая функция последовательности (27) имеет вид (24). Теперь решение задачи (26) с условием (7) представимо в виде

$$\tilde{\varphi}_r(\lambda)=C_NR_r(\lambda)+g^{-1}(\lambda)\sum_{k=1}^{r-1}R_{r-k}(\lambda)d_k(\lambda). \tag{28}$$

Коэффициент $C_N(\lambda)$ находится из условия отражения (7) в виде (21)—(23). Лемма 2 доказана.

Асимптотический анализ коэффициентов $C_N(\lambda_N)$ при $N\to\infty$ и $\lambda_N=\Lambda z_0^{-N-1}$ проведем с использованием методов теории функций комплексного переменного [3]. Введем производящие функции последовательностей (22) и (23):

$$C^+(z,\lambda)=\sum_{N=0}^{\infty}z^NC_N^+(\lambda)=\lambda g(\lambda)\,[g(\lambda+a(1-p(z)))-1]/[g(\lambda+a(1-$$

$$-p(z)))-z]\,[\lambda+a(1-p(z))] \tag{29}$$

и

$$\Delta(z,\lambda)=\sum_{N=0}^{\infty} z^N \Delta_N(\lambda)=(1-z)\,g(\lambda)/[g(\lambda+a(1-p(z)))-z]. \qquad (30)$$

Лемма 3. *При $\rho=1-abc>0$ имеют место следующие асимптотические представления при $N\to\infty$ и $\lambda_N=\Lambda z_0^{-N-1}$.*

$$\Delta_N(\lambda_N)=z_0^{-N-1}[\Lambda b/\rho^2+\mu]+o(z_0^{-N}), \qquad (31)$$

$$C_N^{+}(\lambda_N)=z_0^{-N-1}\Lambda b/\rho+o(z_0^{-N}). \qquad (32)$$

Доказательство леммы 3 осуществим с использованием теории вычетов [3]. Представим коэффициенты ряда (30) по формуле Коши [3]

$$\Delta_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\Delta(z,\lambda)\,z^{-N-1}dz, \quad \delta>0. \qquad (33)$$

Затем перенесем контур интегрирования на окружность $|z|=z_0+\delta$ и вычтем интегралы по окружностям $|z-z_+(\lambda)|=\delta$ и $|z-z_-(\lambda)|=\delta$. Учитывая аналитичность производящей функции $\Delta(z,\lambda)$ в круге $|z|\leqslant z_0+\delta$ за исключением простых полюсов в точках $z=z_\pm(\lambda)$ — нулях функции $K_\lambda(z)=g(\lambda+a(1-p(z)))-z$, по теореме Коши [3] с учетом теории вычетов имеем

$$\Delta_N(\lambda)=-\operatorname*{Res}_{z=z_-(\lambda)}[\Delta(z,\lambda)\,z^{-N-1}]-\operatorname*{Res}_{z=z_+(\lambda)}[\Delta(z,\lambda)\,z^{-N-1}]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=z_0+\delta}\Delta(z,\lambda)\,z^{-N-1}dz. \qquad (34)$$

Из аналитичности по z функции $\Delta(z,\lambda)$ в круге $|z|\leqslant z_0+\delta$ следует оценка

$$\left|\int_{|z|=z_0+\delta}\Delta(z,\lambda)\,z^{-N-1}dz\right|=o(z_0^{-N}). \qquad (35)$$

Далее вычислим вычеты в (34) с учетом (30), а также асимптотического представления нулей $z_\pm(\lambda)$ (см. лемму 1):

$$-\operatorname*{Res}_{z=z_-(\lambda)}[\Delta(z,\lambda)\,z^{-N-1}]=-[\lambda b/\rho+o(\lambda)]\,[1-$$

$$-\lambda b/\rho+o(\lambda)]^{-N-1}g(\lambda)/\mu_-(\lambda) \qquad (36)$$

и

$$-\operatorname*{Res}_{z=z_+(\lambda)}[\Delta(z,\lambda)\,z^{-N-1}]=-[1-z_0+o(\lambda)]\,[z_0+o(\lambda)]^{-N-1}g(\lambda)/\mu_+(\lambda). \qquad (37)$$

Здесь

$$\mu_\pm(\lambda)=g_z'(\lambda+a(1-p(z_\pm(\lambda))))-1. \qquad (38)$$

В дальнейшем нам понадобятся пределы $\mu_\pm(\lambda)$ при $\lambda\to 0$:

$$\mu_+(0)=g_z'(a(1-p(z_0)))-1, \qquad (39)$$

$$\mu_-(0)=-\rho. \qquad (40)$$

Полагая теперь в (36) и (37) $\lambda=\Lambda z_0^{-N-1}$, получаем

$$\Delta_N(\Lambda z_0^{-N-1})=z_0^{-N-1}[\Lambda b/\rho^2+(z_0-1)/\mu_+(0)]+o(z_0^{-N}). \qquad (41)$$

Аналогично, используя теорию вычетов и аналитические свойства функции $K_\lambda(z)$ в круге $|z|\leqslant z_0+\delta$, имеем

$$C_N^{+}(\lambda)=-\operatorname*{Res}_{z=z_-(\lambda)}[C_+(z,\lambda)\,z^{-N-1}]-\operatorname*{Res}_{z=z_+(\lambda)}[C_+(z,\lambda)\,z^{-N-1}]+o(z_0^{-N}). \qquad (42)$$

Вычисляем вычет в (42) с учетом (29):

$$-\operatorname*{Res}_{z=z_-(\lambda)}[C_+(z,\lambda)\,z^{-N-1}] = -\lambda g(\lambda)\,[g(\lambda + a(1-p(z_-(\lambda)))) - $$
$$- 1]\,z_-^{-N-1}(\lambda)/[\lambda + a(1-p(z_-(\lambda)))]\,\mu_-(\lambda) \tag{43}$$

и

$$-\operatorname*{Res}_{z=z_+(\lambda)}[C_+(z,\lambda)\,z^{-N-1}] = \lambda g(\lambda)\,[g(\lambda + a(1-p(z_+(\lambda)))) - $$
$$- 1]\,z_+^{-N-1}(\lambda)/[\lambda + a(1-p(z_+(\lambda)))]\,\mu_+(\lambda). \tag{44}$$

Теперь подставляем в (43) и (44) $\lambda_N = \Lambda z_0^{-N-1}$. Тогда

$$[g(\lambda_N + a(1-p(z_-(\lambda_N)))) - 1]/[\lambda_N + a(1-p(z_-(\lambda_N)))] = b + o(z_0^{-N}). \tag{45}$$

Учитывая (43) и (45), получаем

$$-\operatorname*{Res}_{z=z_-(\lambda_N)}[C_+(z,\lambda_N)\,z^{-N-1}] = z_0^{-N-1}\Lambda b/\rho + o(z_0^{-N}), \tag{46}$$

и далее с учетом (44)

$$-\operatorname*{Res}_{z=z_+(\lambda_N)}[C_+(z,\lambda_N)\,z^{-N-1}] = o(z_0^{-N}). \tag{47}$$

Объединяя (42) — (47), имеем (32). Лемма 3 доказана.

Теперь доказательство теоремы легко завершается с учетом асимптотического представления резольвенты (см. [2], § 4. 3):

$$R_r(\lambda_N) = R_r + o(z_0^{-N}) = W_r/\rho + o(z_0^{-N}). \tag{48}$$

Остается заметить, что в (20)

$$\lim_{\lambda N\to 0} g^{-1}(\lambda_N)\sum_{k=1}^{r-1} R_{r-k}(\lambda_N)\,d_k(\lambda_N) = 0. \tag{49}$$

Объединяя (20), (21), (31), (32) и (49), получаем

$$\varphi_r^N(\lambda_N) = Me^{-\Lambda z_0^{-N-1}\tau_r^N} = 1 - \frac{\Lambda b/\rho^2}{\Lambda b/\rho^2 + \mu}W_r +$$
$$+ o(z_0^{-N}) = 1 - W_r + \frac{c}{c+\Lambda}W_r + o(z_0^{-N}).$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$, получаем (13). Теорема доказана.

Замечание. Предельное соотношение, приведенное в теореме, имеет важную для практических приложений интерпретацию и может быть представлено таким образом:

$$\lim_{N\to\infty} P(z_0^{-N-1}\tau_r^N \leqslant t) = 1 - W_r + W_r(1 - e^{-ct}). \tag{50}$$

Иначе говоря, распределение момента $z_0^{-N-1}\tau_r^N$ достижения нулевого уровня при удалении отражающего экрана на ∞ асимптотически (при $N\to\infty$) экспоненциально с параметром экспоненты $c = \mu\rho/b$ и атомом в нуле, равном $1 - W_r = P(\bar{\chi} > r)$. Происходит как бы расщепление траекторий процесса с отражением на два типа. К первому типу траекторий относятся такие, для которых $\bar{\chi} > r$. Множество таких траекторий имеет вероятность $1 - W_r = P(\bar{\chi} > r)$, что и составляет атом в нуле предельного распределения (50). На траекториях второго типа, для которых $\bar{\chi} \leqslant r$, достижение происходит благодаря многократному отражению, за счет чего накопится время достижения порядка z_0^{N-1}, и тогда естественно ожидать, что $z_0^{-N-1}\tau_r^N$ будет иметь показательное распределение на множестве траекторий, вероятность которого $W_r = P(\bar{\chi} \leqslant r)$.

1. *Пирджанов Б., Непесова Дж. К.* Ограниченное случайное блуждание на суперпозиции двух процессов восстановления.— В кн.: Аналитические методы в задачах теории вероятностей. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 93—101.
2. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.— Киев : Наук. думка, 1975.— 138 с.
3. *Евграфов М. А.* Аналитические функции.— М. : Наука, 1968.— 472 с.

Туркмен. политехн. ин-т Получено 09.01.85