УДК 517.91

Е. Ю. Мамса

Интегральные тороидальные множества систем с импульсным воздействием

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx/dt = Ax + P(x, \varphi, t), \quad d\varphi/dt = \omega + Q(x, \varphi, t), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = Bx + H_i(x, \varphi), \quad \Delta\varphi|_{t=t_i} = G_i(x, \varphi), \tag{1}$$

в которой $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — постоянный вектор, A и B — постоянные квадратные матрицы размерности $n \times n$, причем матрица A задана в действительной канонической форме. Предположим также, что функции $P(x, \varphi, t)$, $Q(x, \varphi, t)$, $H_i(x, \varphi)$ и $G_i(x, \varphi)$ определены и кусочно-непрерывны по t с разрывами первого рода при $t = t_i$ в некоторой области

$$\|x\| \leqslant \rho_0, \quad \varphi \in \mathrm{T}^m, \quad t \in R, \tag{2}$$

периодические по φ с периодом 2π, удовлетворяют условию Липшица по x и φ равномерно по t и i с постоянной L и ограничены постоянной M, т. е.

$$\|P(x', \varphi', t) - P(x'', \varphi'', t)\| + \|Q(x', \varphi', t) - Q(x'', \varphi'', t)\| + \|H_i(x', \varphi') -$$
$$- H_i(x'', \varphi'')\| + \|G_i(x', \varphi') - G_i(x'', \varphi'')\| \leqslant L(\|x' - x''\| + \|\varphi' - \varphi''\|), \tag{3}$$
$$\|P(x, \varphi, t)\| + \|Q(x, \varphi, t)\| + \|H_i(x, \varphi)\| + \|G_i(x, \varphi)\| \leqslant M \tag{4}$$

для всех $t \in R$, $i \in Z$, $\|x'\| \leqslant \rho_0$, $\|x''\| \leqslant \rho_0$. Относительно моментов времени t_i, в которые система подвергается импульсному воздействию, предполагаем, что они занумерованы множеством целых чисел и можно указать такое положительное число θ, что

$$t_{i+1} - t_i \geqslant \theta \quad \forall i \in Z. \tag{5}$$

Используя методы и идеи, разработанные в [1—3, 5], исследуем вопрос существования интегрального тороидального множества системы уравнений (1) и поведение ее решений в окрестности этого множества.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть в системе уравнений*

$$d\varphi/dt = \omega + \tilde{Q}(\varphi, t), \quad dx/dt = Ax + \tilde{P}(\varphi, t), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta\varphi|_{t=t_i} = \tilde{G}_i(\varphi), \quad \Delta x|_{t=t_i} = Bx + \tilde{H}_i(\varphi), \tag{6}$$

вектор ω, *матрицы* A, B *и моменты* t_i *такие же, как и в системе уравнений* (1), *а функции* $\tilde{P}(\varphi, t)$, $\tilde{Q}(\varphi, t)$, $\tilde{G}_i(\varphi)$ *и* $\tilde{H}_i(\varphi)$ *определены и кусочно-непрерывны по* t *с разрывами первого рода при* $t = t_i$ *в области* (2), *периодические по* φ *с периодом* 2π, *ограничены постоянной* M *и удовлетворяют условию Липшица по* φ *с постоянной* L, *т. е.*

$$\|\tilde{P}(\varphi', t) - \tilde{P}(\varphi'', t)\| + \|\tilde{Q}(\varphi', t) - \tilde{Q}(\varphi'', t)\| + \|\tilde{G}_i(\varphi') - \tilde{G}_i(\varphi'')\| +$$
$$+ \|\tilde{H}_i(\varphi') - \tilde{H}_i(\varphi'')\| \leqslant L\|\varphi' - \varphi''\|, \quad \|\tilde{P}(\varphi, t)\| + \|\tilde{Q}(\varphi, t)\| +$$
$$+ \|\tilde{G}_i(\varphi)\| + \|\tilde{H}_i(\varphi)\| \leqslant M. \tag{7}$$

Положим $\gamma = \max\limits_j \operatorname{Re}\lambda_j(A)$, $\alpha^2 = \max \lambda_j((E + B)^T(E + B))$ *и потребуем выполнения неравенства*

$$\gamma + 1/\theta \ln \alpha < 0. \tag{8}$$

Тогда система уравнений (6) *имеет интегральное тороидальное множество* $x = u(\varphi, t)$, *где функция* $u(\varphi, t)$ *кусочно-непрерывна по* t *с разрывами первого рода при* $t = t_i$, *периодическая по* φ *с периодом* 2π *и удовлетворяет неравенству*

$$\| u(\varphi', t) - u(\varphi'', t) \| \leqslant LK \| \varphi' - \varphi'' \| \quad \forall t \in R, \quad \varphi', \varphi'' \in T^m. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть σ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \sigma < -(\gamma + 1/\theta \ln \alpha)$; $\varphi_t(\varphi, t_0)$ $(\varphi_{t_0}(\varphi, t_0) = \varphi)$ — общее решение системы уравнений

$$d\varphi/dt = \omega + \widetilde{Q}(\varphi, t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta\varphi|_{t=t_i} = \widetilde{G}_i(\varphi). \tag{10}$$

Обозначим через $X(t)$ матрицант системы уравнений $dx/dt = Ax$, $t \neq t_i$, $\Delta x|_{t=t_i} = Bx$. Тогда выражение

$$x_t(\varphi) = \int_{-\infty}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) \widetilde{P}(\varphi_\tau(\varphi, t_0), \tau) d\tau + \sum_{t_i < t} X(t) X^{-1}(t_i) \widetilde{H}_i(\varphi_{t_i}(\varphi, t_0))$$

определяет собой семейство ограниченных решений системы уравнений $dx/dt = Ax + \widetilde{P}(\varphi_t(\varphi, t_0), t)$, $t \neq t_i$, $\Delta x|_{t=t_i} = Bx + \widetilde{H}_i(\varphi_{t_i}(\varphi, t_0))$, зависящее от φ и t_0 как от параметров.

Это семейство покрывает множество

$$x = u(\varphi, t) \equiv \int_{-\infty}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) \widetilde{P}(\varphi_\tau(\varphi, t), \tau) d\tau + \sum_{t_i < t} X(t) X^{-1}(t_i) \widetilde{H}_i(\varphi_{ti}(\varphi, t)), \tag{11}$$

которое является интегральным тороидальным для системы уравнений (6).

Покажем, что функция $u(\varphi, t)$ удовлетворяет условию (9). Если $\varphi_t(\varphi, t_0)$ $(\varphi_{t_0}(\varphi, t_0) = \varphi)$ — общее решение системы уравнений (10), то функция $\varphi_t(\varphi, t_0)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi_t(\varphi, t_0) = \varphi + \omega(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \widetilde{Q}(\varphi_\tau(\varphi, t_0), \tau) d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} \widetilde{G}_i(\varphi_{t_i}(\varphi, t_0)). \tag{12}$$

Тогда согласно лемме 3 [4], учитывая соотношение (12) и условия (7) и (5), имеем

$$\| \varphi_t(\varphi', t_0) - \varphi_t(\varphi'', t_0) \| \leqslant \exp\left[\left(L + \frac{1}{\theta} \ln(1 + L)\right)(t - t_0)\right] \| \varphi' - \varphi'' \|, \ t \geqslant t_0. \tag{13}$$

Для оценки разности $u(\varphi', t) - u(\varphi'', t)$ отметим, что $X(t) X^{-1}(\tau) = \exp\left[A(t - t_i) \prod_{\tau < t_j < t} (E + B) \exp[A(t_j - t_{j-1})] \exp[A(t_k - \tau)]\right.$, $t_i < t < t_{i+1}$, $t_k < \tau < t_{k+1}$, $k < i$. Тогда, очевидно,

$$\| X(t) X^{-1}(\tau) \| \leqslant \exp[-\sigma(t - \tau)], \quad t \geqslant \tau. \tag{14}$$

Учитывая представление (11), условие (7), неравенства (13) и (14), получаем неравенство (9), в котором $K = 1/\eta + 1/[1 - \exp(-\theta\eta)]$, $\eta = L + 1/\theta \times \ln(1 + L) + \sigma$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $u(\varphi, t)$ периодическая по φ с периодом 2π. Лемма доказана.

Использовав лемму 1, докажем существование интегрального тороидального множества $x = u(\varphi, t)$ системы уравнений (1). Следуя [6], указанное интегральное множество ищем как предел последовательности множеств $x = u^{(m)}(\varphi, t)$, $u^{(0)}(\varphi, t) \equiv 0$, каждое из которых является интегральным тороидальным для системы уравнений

$$d\varphi/dt = \omega + Q(u^{(m-1)}(\varphi, t), \varphi, t), \quad dx/dt = Ax + P(u^{(m-1)}(\varphi, t), \varphi, t), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta\varphi|_{t=t_i} = G_i(u^{(m-1)}(\varphi, t), \varphi), \ \Delta x|_{t=t_i} = Bx + H_i(u^{(m-1)}(\varphi, t), \varphi). \tag{15}$$

Если множество $x = u^{(m-1)}(\varphi, t)$ найдено, то согласно лемме 1

$$u^{(m)}(\varphi, t) \equiv \int_{-\infty}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) P(u^{(m-1)}(\varphi_\tau^{(m-1)}(\varphi, t), \tau), \varphi_\tau^{(m-1)}(\varphi, t), \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_i < t} X(t) X^{-1}(t_i) H_i(u^{(m-1)}(\varphi_{t_i}^{(m-1)}(\varphi, t), t_i), \varphi_{t_i}^{(m-1)}(\varphi, t)), \qquad (16)$$

где $\varphi_t^{(m-1)}(\varphi, t_0)$ — решение системы уравнений $d\varphi/dt = \omega + Q(u^{(m-1)}(\varphi, t), \varphi, t)$, $t \neq t_i$, $\Delta\varphi|_{t=t_i} = G_i(u^{(m-1)}(\varphi, t), \varphi)$, которое удовлетворяет условию $\varphi_{t_0}^{(m-1)}(\varphi, t_0) = \varphi$.

Прежде чем доказать сходимость последовательности функций $\{u^{(m)}(\varphi,t)\}$ к предельной функции, определяющей интегральное тороидальное множество системы уравнений (1), установим енкоторые свойства этих функций и функций $\varphi_t^{(m)}(\varphi, t_0)$. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Для достаточно малых значений константы Липшица L функции $u^{(m)}(\varphi, t)$ и $\varphi_t^{(m)}(\varphi, t_0)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\| u^{(m+1)}(\varphi', t) - u^{(m+1)}(\varphi'', t) \| \leqslant K \| \varphi' - \varphi'' \|, \qquad (17)$$

$$\| \varphi_t^{(m)}(\varphi', t_0) - \varphi_t^{(m)}(\varphi'', t_0) \| \leqslant \exp\left\{\left[L(1+K) + \frac{1}{\theta}\ln(1 + L(1+K))\right](t - t_0)\right\} \| \varphi' - \varphi'' \| \qquad (18)$$

для всех $t \in R$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство леммы проведем методом математической индукции. При $m = 0$, учитывая представление

$$\varphi_t^{(0)}(\varphi, t_0) = \varphi + \omega(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} Q(0, \varphi_\tau^{(0)}(\varphi, t_0), \tau) d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} G_i(0, \varphi_{t_i}^{(0)}(\varphi, t_0))$$

и неравенство (13), получаем

$$\| \varphi_t^{(0)}(\varphi', t_0) - \varphi_t^{(0)}(\varphi'', t_0) \| \leqslant \exp\left[\left(L + \frac{1}{\theta}\ln(1+L)\right)(t - t_0)\right] \|\varphi' - \varphi''\|,$$
$$t \geqslant t_0,$$

т. е. при $m=0$ неравенство (18) выполняется. Из (16) согласно лемме 1 при $m=0$ следует $\| u^{(1)}(\varphi', t) - u^{(1)}(\varphi'', t) \| \leqslant LK_0 \| \varphi' - \varphi'' \|$, где $K_0 = 1/\eta_0 + 1/[1 - \exp(-\theta\eta_0)]$, $\eta_0 = L + 1/\theta \ln(1 + L) + \sigma$. Окончательно имеем $\| u^{(1)}(\varphi', t) - u^{(1)}(\varphi'', t) \| \leqslant K_1 \| \varphi' - \varphi'' \|$, $K_1 = LK_0$.

Предположим, что при $m = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\| u^{(m+1)}(\varphi', t) - u^{(m+1)}(\varphi'', t) \| \leqslant K_{m+1} \| \varphi' - \varphi'' \|, \quad \| \varphi_t^{(m)}(\varphi', t_0) - \varphi_t^{(m)}(\varphi'', t_0) \| \leqslant \exp\left\{\left[L(1+K_m) + \frac{1}{\theta}\ln(1 + L(1+K_m))\right](t - t_0)\right\} \| \varphi' - \varphi'' \|.$$

Тогда при $m = k$ из представления

$$\varphi_t^{(k)}(\varphi, t_0) = \varphi + \omega(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} Q(u^{(k)}(\varphi_\tau^{(k)}(\varphi, t_0), \tau), \varphi_\tau^{(k)}(\varphi, t_0), \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0 < t_i < t} G_i(u^{(k)}(\varphi_{t_i}^{(k)}(\varphi, t_0), t_i), \varphi_{t_i}^{(k)}(\varphi, t_0)) \qquad (19)$$

получаем

$$\| \varphi_t^{(k)}(\varphi', t_0) - \varphi_t^{(k)}(\varphi'', t_0) \| \leqslant \| \varphi' - \varphi'' \| + L(1 + K_k) \int_{t_0}^{t} \| \varphi_\tau^{(k)}(\varphi', t_0) -$$

$$- \varphi_\tau^{(k)}(\varphi'', t_0) \| d\tau + L(1 + K_k) \sum_{t_0 < t_i < t} \| \varphi_{t_i}^{(k)}(\varphi', t_0) - \varphi_{t_i}^{(k)}(\varphi'', t_0) \|.$$

Из этого неравенства в силу леммы 3 [4] следует оценка

$$\| \varphi_t^{(k)}(\varphi', t_0) - \varphi_t^{(k)}(\varphi'', t_0) \| \leqslant \exp \left\{ \left[L(1 + K_k) + \frac{1}{\theta} \ln (1 + L(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + K_k)) \right] (t - t_0) \right\} \| \varphi' - \varphi'' \|. \tag{20}$$

Далее, из (16) получаем

$$\| u^{(k+1)}(\varphi', t) - u^{(k+1)}(\varphi'', t) \| \leqslant L(1 + K_k) \left[\int_{-\infty}^{t} \exp(-\sigma(t - \tau)) \| \varphi_\tau^{(k)}(\varphi', t_0) - \right.$$

$$\left. - \varphi_\tau^{(k)}(\varphi'', t_0) \| d\tau + \sum_{t_i < t} \exp(-\sigma(t - t_i)) \| \varphi_{t_i}^{(k)}(\varphi', t_0) - \varphi_{t_i}^{(k)}(\varphi'', t_0) \| \right].$$

Отсюда, учитывая неравенство (20), находим $\| u^{(k+1)}(\varphi', t) - u^{(k+1)}(\varphi'', t) \| \leqslant \leqslant K_{k+1} \| \varphi' - \varphi'' \|$, где $K_{k+1} = L(1 + K_k) M(K_k)$, $M(K) = 1/\eta + 1/[1 - -\exp(-\theta\eta)]$, $\eta = L(1 + K) + \frac{1}{\theta} \ln (1 + L(1 + K)) + \sigma$.

Таким образом, по индукции заключаем, что $\forall\ m = 0, 1, 2, \ldots\ \| u^{(m+1)}(\varphi', t) - u^{(m+1)}(\varphi'', t) \| \leqslant K_{m+1} \| \varphi' - \varphi'' \|$, где K_{m+1} удовлетворяет рекуррентному соотношению $K_{m+1} = L(1 + K_m) M(K_m)$.

Выберем постоянную Липшица настолько малой, чтобы выполнялось неравенство

$$LM(1) < 1/2. \tag{21}$$

Такой выбор возможен, поскольку $M(1) \to \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{1 - \exp(-\theta\sigma)}$ при $L \to 0$. Тогда в силу монотонности функции $M(K)$ имеем $K_{m+1} < 2LM(1)$ $\forall\ m = = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому достаточно положить $K = 2LM(1)$. Лемма доказана.

Докажем теперь равномерную сходимость последовательностей функций $u^{(n)}(\varphi, t)$ и $\varphi_t^{(n)}(\varphi, t_0)$. Для этого оценим разности $\varphi_t^{(n+1)}(\varphi, t_0) - \varphi_t^{(n)}(\varphi, t_0)$ и $u^{(n+1)}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, t)$. Учитывая соотношение (19) и оценку (17), получаем

$$\| \varphi_t^{(n+1)}(\varphi, t_0) - \varphi_t^{(n)}(\varphi, t_0) \| \leqslant L \int_{t_0}^{t} \left[\| u^{(n+1)}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, t) \|_0 + (1 + \right.$$

$$\left. + K) \| \varphi_\tau^{(n+1)}(\varphi, t_0) - \varphi_\tau^{(n)}(\varphi, t_0) \| \right] d\tau + L \sum_{t_0 < t_i < t} [\| u^{(n+1)}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, t) \|_0 +$$

$$+ (1 + K) \| \varphi_{t_i}^{(n+1)}(\varphi, t_0) - \varphi_{t_i}^{(n)}(\varphi, t_0) \|],$$

где $\| u \|_0 = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \| u(\varphi, t) \|$. Отсюда в силу леммы 5 [4]

$$\| \varphi_t^{(n+1)}(\varphi, t_0) - \varphi_t^{(n)}(\varphi, t_0) \| \leqslant \frac{\| u^{(n+1)} - u^{(n)} \|_0}{1 + K} \left\{ \exp \left[\left[L(1 + K) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{\theta} \ln (1 + L(1 + K)) \right] (t - t_0) \right] - 1 \right\}, \quad t \geqslant t_0. \tag{22}$$

Из (16) с учетом (17) имеем

$$\| u^{(n+1)}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, t) \| \leqslant L \int_{-\infty}^{t} \exp(-\sigma(t-\tau)) [\| u^{(n)}(\varphi, t) - u^{(n-1)}(\varphi,t) \|_0 +$$

$$+ (1+K) \| \varphi_\tau^{(n)}(\varphi, t) - \varphi_\tau^{(n-1)}(\varphi, t) \|] d\tau + L \sum_{t_i < t} \exp(-\sigma(t-t_i)) [\| u^{(n)}(\varphi,t) -$$

$$- u^{(n-1)}(\varphi, t) \|_0 + (1+K) \| \varphi_{t_i}^{(n)}(\varphi, t) - \varphi_{t_i}^{(n-1)}(\varphi, t) \|].$$

Применяя лемму 5 [4] и оценку (22) к последнему неравенству, получаем $\| u^{(n+1)}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, t) \|_0 \leqslant \rho \| u^{(n)}(\varphi, t) - u^{(n-1)}(\varphi, t) \|_0$, где $\rho = L[1/\eta + 1/[1 - \exp(-\theta\eta)]]$, $\eta = \sigma + L(1+K) + \frac{1}{\theta} \ln(1 + L(1+K))$.

Таким образом, $\forall\, n = 1, 2, \ldots$

$$\| u^{(n+1)}(\varphi, t) - u^{(n)}(\varphi, t) \| \leqslant \rho^n \| u^{(1)}(\varphi, t) \|_0, \tag{23}$$

$$\| \varphi_t^{(n)}(\varphi, t_0) - \varphi_t^{(n-1)}(\varphi, t_0) \| \leqslant \frac{\rho^{n-1}}{1+K} \Big\{ \exp\Big[\Big[L(1+K) + \frac{1}{\theta} \ln(1 + L(1+K))\Big](t - t_0)\Big] - 1 \Big\} \| u^{(1)}(\varphi, t) \|_0. \tag{24}$$

Но из (16) с учетом (4) находим $\| u^{(1)}(\varphi, t) \|_0 \leqslant M_0$, где $M_0 = M[1/\sigma + 1/(1 - \exp(-\theta\sigma))]$.

Выбираем константу Липшица настолько малой, чтобы одновременно выполнялись неравенства (21) и $\rho < 1$, и тогда в силу неравенств (23) и (24) получаем, что последовательности функций $\{u^{(n)}(\varphi, t)\}$ и $\{\varphi_t^{(n)}(\varphi, t_0)\}$ сходятся равномерно для всех $t \in R$. Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_t^{(n)}(\varphi, t_0) = \varphi_t(\varphi, t_0), \quad \lim_{n\to\infty} u^{(n)}(\varphi, t) = u(\varphi, t). \tag{25}$$

Аналогично [4] покажем, что предельная функция $x = u(\varphi, t)$ кусочно-непрерывная по t, непрерывная и периодическая с периодом 2π по φ определяет интегральное тороидальное множество системы уравнений (1).

Действительно, так как $x = u^{(m+1)}(\varphi, t)$ — интегральное тороидальное множество системы (15), то для траекторий $\varphi_t^{(m)}$, $x_t^{(m)}$, лежащих на нем, выполняются соотношения

$$\varphi_t^{(m)}(\varphi, t_0) = \varphi + \omega(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} Q(u^{(m)}(\varphi_\tau^{(m)}(\varphi, t_0), \tau), \varphi_\tau^{(m)}(\varphi, t_0), \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0 < t_i < t} G_i(u^{(m)}(\varphi_{t_i}^{(m)}(\varphi, t_0), t_i), \varphi_{t_i}^{(m)}(\varphi, t_0)), \qquad u^{(m+1)}(\varphi, t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) P(u^{(m)}(\varphi_\tau^{(m)}(\varphi, t), \tau), \varphi_\tau^{(m)}(\varphi, t), \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_i < t} X(t) X^{-1}(t_i) H_i(u^{(m)}(\varphi_{t_i}^{(m)}(\varphi, t), t_i), \varphi_{t_i}^{(m)}(\varphi, t)). \tag{26}$$

Перейдем в этих равенствах к пределу при $m \to \infty$. Предположения о непрерывности функций $P(x, \varphi, t)$, $Q(x, \varphi, t)$, $G_i(x, \varphi)$, $H_i(x, \varphi)$ и $u^{(m)}(\varphi, t)$ по φ обеспечивают законность всех перестановок предела, необходимых для получения из равенств (25) и (26) тождеств

$$\varphi_t(\varphi, t_0) = \varphi + \omega(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} Q(u(\varphi_\tau(\varphi, t_0), \tau), \varphi_\tau(\varphi, t_0), \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0<t_i<t} G_i(u(\varphi_{t_i}(\varphi, t_0), t_i), \varphi_{t_i}(\varphi, t_0)),$$

$$u(\varphi, t) = \int_{-\infty}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) P(u(\varphi_\tau(\varphi, t), \tau), \varphi_\tau(\varphi, t), \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_i<t} X(t) X^{-1}(t_i) H_i(u(\varphi_{t_i}(\varphi, t), t_i), \varphi_{t_i}(\varphi, t)). \qquad (27)$$

Тождества (27) показывают, что на любом конечном временном отрезке, а следовательно, $\forall\, t \in R$, $\varphi \in \mathrm{T}^m$ кусочно-непрерывная по t с разрывами первого рода при $t = t_i$ и непрерывная периодическая с периодом 2π по φ функция $u(\varphi, t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$du(\varphi_t, t)/dt = Au(\varphi_t, t) + P(u(\varphi_t, t), \quad \varphi_t, t), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta u|_{t=t_i} = Bu(\varphi_{t_i}, t_i) + H_i(u(\varphi_{t_i}, t_i), \varphi_{t_i}) \quad \forall t \in R,$$

где $\varphi_t = \varphi_t(\varphi, t_0)$ — решение системы

$$d\varphi/dt = \omega + Q(u(\varphi_t, t), \varphi_t, t), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta\varphi|_{t=t_i} = G_i(u(\varphi_{t_i}, t_i), \varphi_{t_i}), \quad \varphi_{t0}(\varphi, t_0) = \varphi.$$

Отсюда следует, что множество $x = u(\varphi, t)$ является интегральным тороидальным множеством системы уравнений (1).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в области* (2) *система уравнений* (1) *удовлетворяет неравенствам* (3) *и* (4). *Кроме того, матрицы A и B таковы, что выполняется неравенство* (8). *Тогда при достаточно малой константе Липшица L система уравнений* (1) *имеет интегральное тороидальное множество* Γ : : $x = u(\varphi, t)$, *где функция $u(\varphi, t)$ периодическая по φ с периодом 2π, удовлетворяет условию Липшица по φ с константой пропорциональной L, кусочно-непрерывна по t с разрывами первого рода при $t = t_i$.*

На интегральном тороидальном множестве Γ система уравнений (1) сводится к системе $d\varphi/dt = \omega + Q(u(\varphi, t), \varphi, t)$, $t \neq t_i$, $\Delta\varphi|_{t=t_i} = G_i(u(\varphi, t_i), \varphi)$.

Исследуем поведение решений системы уравнений (1) в окрестности полученного интегрального множества. Для этого, следуя [1], будем рассматривать систему уравнений с импульсным воздействием

$$x_t = X(t) C + \int_{t_0}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) P(x_\tau, \varphi_\tau, \tau) d\tau + \sum_{t_0<t_i<t} X(t) X^{-1}(t_i) H_i(x_{t_i}, \varphi_{t_i}),$$

$$d\varphi/dt = \omega + Q(x_t, \varphi_t, t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta\varphi|_{t=t_i} = G_i(x_{t_i}, \varphi_{t_i}), \quad \varphi_{t_0}(\varphi, t_0) = \varphi. \quad (28)$$

Нетрудно установить, что для любого вектора C, $|C| \leqslant \tilde{\rho}_0 \leqslant \rho_0$, система уравнений (28) имеет единственное ограниченное при $t \geqslant t_0$ решение и для этого решения $x_t = \Psi(t_0, t, \varphi_t, C)$, где $\Psi(t_0, t, \varphi_t, C)$ — кусочно-непрерывная по t с разрывами первого рода при $t = t_i$ и непрерывная по остальным переменным функция, удовлетворяющая условию Липшица вида

$$\| \Psi(t_0, t, \varphi_t, C') - \Psi(t_0, t, \varphi_t, C'') \| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\left(-\sigma + L + \frac{1}{\theta} \ln(1 + L)\right)(t - t_0)\right] \| C' - C'' \|. \qquad (29)$$

Действительно, пусть x_t' и x_t'' — решения системы (28): $x_t = \Psi(t_0, t, \varphi_t, C')$, $x_t'' = \Psi(t_0, t, \varphi_t, C'')$. Тогда

$$\| \Psi(t_0, t, \varphi_t, C') - \Psi(t_0, t, \varphi_t, C'') \| \leqslant \| X(t) \| \| C' - C'' \| +$$

$$+ L\int_{t_0}^{t} \|X(t)X^{-1}(\tau)\|\,\|\Psi(t_0,\tau,\varphi_\tau,C') - \Psi(t_0,\tau,\varphi_\tau,C'')\|\,d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0<t_i<t} \|X(t)X^{-1}(t_i)\|\,\|\Psi(t_0,t_i,\varphi_{t_i},C') - \Psi(t_0,t_i,\varphi_{t_i},C'')\|.$$

Используя оценки $\|X(t)\| \leqslant \exp(-\sigma(t-t_0))$ и $\|X(t)X^{-1}(\tau)\| \leqslant \leqslant \exp(-\sigma(t-\tau))$, имеем

$$\|\Psi(t_0,t,\varphi_t,C') - \Psi(t_0,t,\varphi_t,C'')\| \leqslant \exp(-\sigma(t-t_0))\|C'-C''\| +$$

$$+ L\cdot\int_{t_0}^{t} \exp(-\sigma(t-\tau))\,\|\Psi(t_0,\tau,\varphi_\tau,C') - \Psi(t_0,\tau,\varphi_\tau,C'')\|\,d\tau +$$

$$+ L\sum_{t_0<t_i<t} \exp(-\sigma(t-t_i))\,\|\Psi(t_0,t_i,\varphi_{t_i},C') - \Psi(t_0,t_i,\varphi_{t_i},C'')\|,$$

откуда

$$\exp\sigma t\,\|\Psi(t_0,t,\varphi_t,C') - \Psi(t_0,t,\varphi_t,C'')\| \leqslant \exp\sigma t_0\,\|C'-C''\| +$$

$$+ L\int_{t_0}^{t} \exp\sigma\tau\,\|\Psi(t_0,\tau,\varphi_\tau,C') - \Psi(t_0,\tau,\varphi_\tau,C'')\|\,d\tau +$$

$$+ L\sum_{t_0<t_i<t} \exp\sigma t_i\,\|\Psi(t_0,t_i,\varphi_{t_i},C') - \Psi(t_0,t_i,\varphi_{t_i},C'')\|.$$

В силу леммы 3 [4] получаем

$$\exp\sigma t\,\|\Psi(t_0,t,\varphi_t,C') - \Psi(t_0,t,\varphi_t,C'')\| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\sigma t_0\,\|C'-C''\| \prod_{t_0<t_i<t} (1+L)\exp\left(\int_{t_i}^{t} L d\tau\right).$$

Так как $i(t_0,t) \leqslant \dfrac{t-t_0}{\theta}$ и $\prod\limits_{t_0<t_i<t}(1+L) = (1+L)^{i(t_0,t)} \leqslant \exp\left\{\left[\dfrac{1}{\theta}\ \ln(1+ + L)\right](t-t_0)\right\}$, то

$$\|\Psi(t_0,t,\varphi_t,C') - \Psi(t_0,t,\varphi_t,C'')\| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\left(-\sigma + L + \frac{1}{\theta}\ln(1+L)\right)(t-t_0)\right]\|C'-C''\|,$$

что и требовалось доказать.

Все решения, принадлежащие интегральному множеству $x = u(\varphi, t)$, являются одновременно решениями системы (28). Поэтому для каждого из них можно указать соответствующее $C = C'$, т. е. эти решения представимы в виде

$$x = u(\varphi, t) = \Psi(t_0, t, \varphi_t, C'). \tag{30}$$

Установив таким образом, что всем решениям, принадлежащим интегральному множеству $x = u(\varphi, t)$, соответствует некоторое $C = C'$, в силу того что все решения системы (28) являются решениями системы (1), в неравенстве (29), справедливом для решений системы (28), одно из этих решений можем заменить решением (30), принадлежащим множеству $x = u(\varphi, t)$ и зависящим от $C = C'$. В результате получим $\|u(\varphi, t) - \Psi(t_0, t, \varphi_t, C)\| \leqslant \leqslant \exp[(-\sigma + L + 1/\theta\ln(1+L))(t-t_0)]\,\|C' - C''\|$, $t \geqslant t_0$, где $u(\varphi, t)$ представляется формулой (30). Так как функции $\Psi(t_0, t, \varphi_t, C)$ являются решениями системы (28) при $C = x_0$, то вместо решения системы (28) $\Psi(t_0, t, \varphi_t, C)$, заменяя произвольное фиксированное φ на φ_t, можно взять решение системы (1) x_t, причем в правой части C, соответствовавшее $\Psi(t_0, t, \varphi_\tau, C)$, будет заменено на x_0, так как Ψ равно x_t при $C = x_0$; вместо C' можно взять начальное значение $u(\varphi, t_0)$.

В результате вместо неравенства (29), выполняющегося для решений системы (28), получим следующее неравенство для любого решения x_t: $\| u(\varphi, t) - x_t \| \leqslant \exp[(-\sigma + L + 1/\theta \ln(1 + L))(t - t_0)] \| u(\varphi, t_0) - x_0 \|$.

Последнее неравенство показывает, что найденное интегральное тороидальное множество для системы уравнений (1) асимптотически устойчиво, если постоянная Липшица L настолько мала, что выполняется неравенство $L + 1/\theta \ln(1 + L) < \sigma$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Если константа Липшица* L, *фигурирующая в неравенстве* (3), *достаточно мала, то интегральное тороидальное множество* $x = u(\varphi, t)$ *системы уравнений* (1) *экспоненциально устойчиво.*

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 408 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием.—Укр. мат. журн., 1977, 29, № 6, с. 750—762.
5. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1977.— 304 с.
6. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, 34, № 6, с. 1219—1240.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 11, с. 1981—1992.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием.— Там же, 1981, 17, № 11, с. 1995—2001.

Киев. ун-т

Получено 17.01.84,
после доработки — 16.09.85