УДК 519.21

И. Б. КИРИЧИНСКАЯ, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Склеивание двух полунепрерывных процессов с независимыми приращениями

В фазовом пространстве $E^0 = (-\infty; +\infty)/\{0\}$ рассматривается обрывающийся процесс X_t^0, для которого $X_t^0 = X_t^1$ при условии $X_t^0 > 0$, и $X_t^0 = X_t^2$ при условии $X_t^0 < 0$, где X_t^j, $j = 1, 2$, — необрывающиеся стохастически непрерывные марковские процессы с независимыми приращениями, у которых скачки только отрицательные. Показано, что существует продолжение X_t^0 до строго марковского однородного стохастически непрерывного феллеровского процесса X_t в фазовом пространстве $(-\infty; +\infty)$ и это продолжение характеризуется мерой $N(dy)$, постоянными b, c_1, c_2.

В фазовому просторі $E^0 = (-\infty; +\infty)/\{0\}$ розглядається процес X_t^0, що обривається, для якого $X_t^0 = X_t^1$ при умові $X_t^0 > 0$, і $X_t^0 = X_t^2$ при умові $X_t^0 < 0$, де X_t^j, $j = 1, 2$, — повні стохастично неперервні марківські процеси з незалежними приростами, скачки у яких тільки від'ємні. Показано, що існує продовження X_t^0 до строго марківського однорідного стохастично неперервного феллерівського процесу X_t в фазовому просторі $(-\infty; +\infty)$ і це продовження характеризується мірсю $N(dy)$, постійними b, c_1, c_2.

Задано два немонотонных процесса неограниченной вариации X_t^1, X_t^2 в фазовом пространстве $(-\infty; +\infty)$. Каждый из них является однородным стохастически непрерывным марковским процессом с независимыми приращениями. Их кумулянты $k^j(s)$, $j = 1, 2$, равны

$$k^j(s) = \ln Me^{sX_t^j} = b^j s^2 + a^j s + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{sx} - 1 - \frac{sx}{1+x^2}\right) \Pi^j(dx),$$

$$s > 0, \quad b^j \geqslant 0, \quad \int_{0 \leqslant |x| \leqslant 1} x^2 \Pi^j(dx) < +\infty$$

$\Pi^j(dx)$ — меры.

Из X_t^1 и X_t^2 составляется обрывающийся процесс X_t^0 в фазовом пространстве $E^0 = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, который будет однородным стохастически непрерывным строго марковским и для любого t справедливо:

$$X_t^0 = X_t^1 \text{ при условии } X_t^0 > 0,$$

$$X_t^0 = X_t^2 \text{ при условии } X_t^0 < 0.$$

Пусть

$$\zeta_1 = \inf\{t : X_t^1 \leqslant 0\} \text{ при условии } X_0^0 > 0,$$

$$\zeta_2 = \inf\{t : X_t^2 \geqslant 0\} \text{ при условии } X_0^0 < 0,$$

ζ — момент первого выхода X_t^0 из E^0.

Далее обозначим

$$G_\lambda^1 f(x) = M_x \int_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt, \quad x > 0,$$

$$G_\lambda^2 f(x) = M_x \int_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt, \quad x < 0,$$

$$G_\lambda f(x) = M_x \int_0^{\zeta} e^{-\lambda t} f(X_t)\, dt = M_x \int_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt +$$

$$+ M_x \int_{\zeta_1}^{\zeta_1+\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt, \qquad f \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, что в последней формуле ζ_1 или ζ_2 могут быть равными нулю.

Пополним фазовое пространство E^0 точкой $x = 0$ и будем рассматривать продолжение X в фазовом пространстве $(-\infty;\ +\infty)$.

Заметим, что задача склеивания для двух винеровских процессов рассматривалась Б. И. Копытко и Н. И. Портенко [1].

Теорема. *Существует продолжение X_t^0 до строго марковского феллеровского стохастически непрерывного процесса X_t в фазовом пространстве $E = (-\infty;\ +\infty)$ и это продолжение характеризуется мерой $N(dy)$, постоянными b, c_1, c_2, а резольвента продолженного процесса имеет вид*

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1) \times$$

$$\times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G_\lambda f(y)\, N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial R_1}(+0) - c_2 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial R_1}(-0)}{\lambda \left(b + \int_{-\infty}^{\infty} G_\lambda 1(y)\, N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial R_1^1}(+0) - c_2 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial R_1^1}(-0) \right)}.$$

Здесь $\int_0^\infty R_1^1(x)\, e^{-sx} dx = \frac{1}{k^1(s) - 1}$, $s > \rho(\lambda)$, $k^1(\rho(\lambda)) = \lambda$.

Доказательство. При доказательстве теоремы будем считать, что условие $f(-\infty) = f(0) = f(+\infty) = 0$ всегда выполняется.

Очевидно, что X_t^1 и X_t^2 будут однородными строго марковскими стохастически непрерывными процессами, а из этого следует, что и X_t^0 также будет однородным строго марковским стохастически непрерывным процессом [2]. Используя теорему 1 § 3 гл. IV [3], легко убедиться в том, что

$$P_x\{\zeta_1 > \delta\} \to 0 \text{ при } x \to 0,\ x > 0,$$

$$P_x\{\zeta_2 > \delta\} \to 0 \text{ при } x \to 0,\ x < 0$$

для любого $\delta > 0$.

Из [4] следует, что продолжение X_t^0 существует и оно характеризуется мерами $N(dy)$ и $M(dy)$, постоянной b, а резольвента продолженного процесса имеет вид

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1) \times$$

$$\times \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\lambda f(y)\, N(dy) + \int\limits_{\partial\widehat{E}} \frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(z)\, M(dz)}{\lambda \left(b + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\lambda 1(y)\, N(dy) + \int\limits_{\partial\widehat{E}} \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(z)\, M(dz) \right)}.$$

Здесь $\partial\widehat{E} = \widehat{E} \setminus E^0$, где $\widehat{E}$ — пополнение E^0 по псевдометрике $|K_\lambda f(x) - K_\lambda f(y)|$, $K_\lambda f(x) = \dfrac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)}$, $q(y) = M_y(1 - e^{-\zeta})$.

Покажем, что $\partial\widehat{E}$ состоит из двух точек -0; $+0$. Для этого рассмотрим предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)}$. В силу того, что множество функций вида $e^{i\mu x}$ плотно в множестве непрерывных функций, можно предположить, что

$$f(x) = e^{i\mu x},$$

$$G_\lambda f(x) = M_x \int\limits_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt + M_x \int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_1+\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt = M_x \int\limits_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt +$$

$$+ M_x e^{-\lambda\zeta_1} M_{X^1_{\zeta_1}} \int\limits_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2) dt.$$

Согласно [5]

$$M_x = \int\limits_0^{\zeta_1} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt = R_\lambda(x) \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho(\lambda) y} f(y)\, dy - \int\limits_0^{x} R_\lambda(x - y) f(y)\, dy.$$

Легко вычислить $M_{X^1_{\zeta_1}} \int\limits_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt$, учитывая при этом, что $X^2_{\zeta_2} = 0$. В силу отсутствия положительных скачков

$$M_{X^1_{\zeta_1}} \int\limits_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt = M_{X^1_{\zeta_1}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt - M_{X^1_{\zeta_1}} \int\limits_{\zeta_2}^{\infty} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt =$$

$$= M_0 \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(X_t^2 + X^1_{\zeta_1})\, dt - M_{X^1_{\zeta_1}} e^{-\lambda\zeta_2} M_0 \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt.$$

Подставим вместо $f(x)$ $e^{i\mu x}$. Тогда

$$M_{X^1_{\zeta_1}} \int\limits_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\, dt = M_0 \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left[e^{i\mu X^1_{\zeta_1}} - M_{X^1_{\zeta_1}} e^{-\lambda\zeta_2} \right],$$

но $M_{X^1_{\zeta_1}} e^{-\lambda\zeta_2} = e^{B^2(\lambda) X^1_{\zeta_1}}$, где $B^2(\lambda)$ определяется из соотношения $M_0 e^{-\lambda\tau_x} = e^{x B^2(\lambda)}$ для процесса X_t^2 при условии $X_0^2 = 0$ (τ_x — момент первого достижения $[x; +\infty)$).

Обозначим $M_0 \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t + i\mu X_t^2}\, dt$ через $R^2(\lambda, \mu)$. Тогда

$$M_{X^1_{\zeta_1}} \int\limits_0^{\zeta_2} e^{-\lambda t} e^{i\mu X_t^2} = R^2\ \lambda, \mu)\, [e^{i\mu X^1_{\zeta_1}} - e^{B^2(\lambda) X^1_{\zeta_1}}],$$

а

$$M_x \int_{\zeta_1}^{\zeta_1+\zeta_2} e^{-\lambda t} f(X_t^2)\,dt = M_x e^{-\lambda\zeta_1} R^2(\lambda,\mu)\,[e^{i\mu X_{\zeta_1}^1} - e^{B^2(\lambda) X_{\zeta_1}^1}] =$$

$$= R^2(\lambda,\mu)\,[M_x e^{-\lambda\zeta_1 + i\mu X_{\zeta_1}^1} - M_x e^{-\lambda\zeta_1 + B^2(\lambda) X_{\zeta_1}^1}].$$

Нетрудно убедиться, что

$$M_x e^{-\lambda\zeta_1 + i\mu X_{\zeta_1}^1} = e^{i\mu x} - \frac{G_\lambda^1 e^{i\mu x}}{R^1(\lambda,\mu)},$$

где

$$R^1(\lambda,\mu) = M_0 \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{i\mu X_t^1} dt.$$

Аналогично

$$M_x e^{-\lambda\zeta_1 + B^2(\lambda) X_{\zeta_1}^1} = e^{B^2(\lambda) x} - \frac{G_\lambda^1 e^{B^2(\lambda) x}}{R^1(\lambda, B^2(\lambda))}.$$

Так как

$$G_\lambda(G_\nu f(x)) = \frac{G_\lambda f(x) - G_\nu f(x)}{\nu - \lambda},$$

то можно считать $\lambda = 1$.

В случае, если $X_0^0 = x < 0$ или $\zeta_1 = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_\lambda^2 f(x)}{G_1^2 1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{M_x \int_0^{\zeta_2} e^{-t} f(X_t^2)\,dt}{M_x \int_0^{\nu_2} e^{-t} dt} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{M_x \int_0^\infty e^{-t} e^{i\mu X_t^2} dt - M_x e^{-\lambda\zeta_2} M_0 \int_0^\infty e^{-t+i\mu X_t^2} dt}{1 - M_x e^{-\lambda\zeta_2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} R^2(1,\mu) \frac{B^2(1) - i\mu}{B^2(1)} = R^2(1,\mu) \frac{B^2(1) - i\mu}{B^2(1)}.$$

При $X_0^0 = x > 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_1 e^{i\mu x}}{G_1 1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{R_1(x) \int_0^\infty e^{i\mu y - \rho(1) y} dy}{G_1 1(x)} -$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x R_1(x-y) e^{i\mu y} dy}{G_1 1(x)} + \lim_{x\to 0} \frac{R^2(1,\mu)\left(e^{i\mu x} - \frac{G_1^1 e^{i\mu x}}{R^1(1,\mu)}\right)}{G_1 1(x)} -$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{R^2(1,\mu)\left(e^{B^2(1)x} - \frac{G_1^1 e^{B^2(1)x}}{R^1(1, B^2(1))}\right)}{G_1 1(x)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_1^1 e^{\alpha x}}{R_1(x)} = \frac{1}{\rho(1) - \alpha},$$

$$G_1 1(x) = 1 - e^{B^2(1)x} + \frac{R_1(x)}{\rho(1) - B^2(1)} + \int_0^{x} R_1(x-y) e^{B^2(1)y} dy,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_1 1(x)}{R_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{B^2(1)x}}{R_1(x)} + \frac{1}{\rho(1) - B^2(1)}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$R^1(1, \mu) = \frac{1}{1 - k^1(\mu)}, \quad R^2(1, \mu) = \frac{1}{1 - k^2(\mu)}.$$

Легко вычислить, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{R_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} x}{\lim\limits_{x\to 0} R_1(x)} = \frac{\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s}}{\lim\limits_{s\to\infty} \frac{s}{k^1(s) - 1}} = \lim_{s\to\infty} \frac{k^1(s) - 1}{s^2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+0} \frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)}$ существует. Очевидно, что $G_\lambda f(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, предел которой не стремится к нулю. В силу свойств псевдометрики существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} K_\lambda f(x_n)$. Теперь рассмотрим последовательность $\{x_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Существует $\lim\limits_{x\to-0} K_\lambda f(x)$, $\lim\limits_{x\to+0} K_\lambda f(x)$. Таким образом, дополнительные точки -0 и $+0$ определяются с помощью следующих соотношений:

$$\lim_{x\to-0} K_\lambda f(x) = K_\lambda f(-0),$$

$$\lim_{x\to+0} K_\lambda f(x) = K_\lambda f(+0).$$

Тогда резольвента процесса имеет вид

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1) \times$$

$$\times \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\lambda f(y) N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial R_1}(+0) - c_2 \frac{\partial G_\lambda f}{\partial R_1}(-0)}{\lambda \left(b + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\lambda 1(y) N(dy) + c_1 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial R_1}(+0) - c_2 \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial R_1}(-0) \right)}.$$

Если $Af(x)$ — инфинитезимальный оператор продолженного процесса X_t, то граничное условие таково:

$$bAf(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) N(dy) + c_1 \frac{\partial f}{\partial R_1}(+0) - c_2 \frac{\partial f}{\partial R_1}(-0).$$

Замечание 1. Процесс X_t^2 может иметь ограниченную вариацию.

Замечание 2. Процесс X_t^1 может иметь ограниченную вариацию, но в этом случае он должен быть монотонным, т. е. его кумулянта равна

$$k^1(s) = \ln M e^{sX_t^1} = a^1 s + \int\limits_{-\infty}^{0} (e^{sx} - 1) \Pi^1(dx),$$

$$a^1 < 0.$$

1. *Копытко Б. И., Портенко Н. И.* Замечание о склеивании из двух процессов броуновского движения // Некоторые вопросы теории случайных процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 67—78.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.— М. : Физматгиз, 1963.— 860 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 2.— 640 с.
4. *Шуренков В. М., Киричинская И. Б.* Одноточечные продолжения марковского процесса // Стохастический анализ и его приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 113—120.
5. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 170—174.

Получено 11.12.90