УДК 519.21

А. Ю. ЗАИГРАЕВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Об оценивании неизвестных параметров линейной регрессии при наличии априорной информации

Исследуются задачи наилучшего оценивания неизвестных параметров линейной регрессии в гильбертовом пространстве при наличии различной априорной информации о них. Для полученных оценок построены оптимальные планы для одного, часто встречающегося в приложениях, множества планов.

Досліджуються задачі найкращого оцінювання невідомих параметрів лінійної регресії у гільбертовому просторі при наявності різноманітної апріорної інформації про них. Для одержаних оцінок побудовані оптимальні плани для однієї множини планів, що часто зустрічається у застосуваннях.

Данная работа посвящена вопросам оценивания неизвестных параметров линейной регрессии в гильбертовом пространстве при наличии некоторой априорной информации о них. Рассмотренная в работе модель идентична той, которая изучалась в [1], где априорная информация имеет «выврожденный» характер. В основу оценивания неизвестных параметров положены идеи, развитые в [2].

Предположим, что существует наблюдение случайного элемента y со значениями в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве H вида

$$y = \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k + \xi, \tag{1}$$

где $\{x_k\}_{k=1}^n$ — план-набор известных элементов из H, $\theta = (\theta_1, \theta_1, \ldots, \theta_n)'$ — случайный вектор действительных регрессионных коэффициентов со средним $A\beta$ и известной невырожденной корреляционной матрицей R, A — известная действительная матрица порядка $n \times m$ и ранга $m \leqslant n$, а ξ — H-значный случайный элемент со слабым вторым порядком, имеющий нулевое среднее и известный корреляционный оператор S. Без потери общности рассуждений будем считать, что $\operatorname{Ker} S = \{0\}$ и $E\theta\,(h, \xi)_H = 0$, $h \in H$.

Далее рассматриваются задачи оценивания векторов β и θ в предположении, что в описанной модели имеется некоторая априорная информация относительно вектора β. Случаи, когда вектор β известен или неизвестен, изучались в [1]. В данной работе в качестве априорной информации рассматривается принадлежность вектора β одному из трех множеств:

$$\Lambda_1 = \{a \in \mathbb{R}^m : (Aa - A\beta_0)' Q\, (Aa - A\beta_0) \leqslant c\}.$$

$$\Lambda_2 = \{a \in \mathbb{R}^m : (Aa - A\beta_0)' Q\, (Aa - A\beta_0) \leqslant c,\ Ga = G\beta_0\},$$

$$\Lambda_3 = \{a \in \mathbb{R}^m : Ga = \gamma\}.$$

Здесь Q — известная действительная симметричная положительно определенная матрица порядка $n \times n$, $\beta_0 \in \mathbb{R}^m$, $\gamma \in \mathbb{R}^p$ — известные векторы, $c > 0$ — известное действительное число, G — известная действительная матрица порядка $p \times m$ и ранга $p < m$.

Исходную модель (1) можно представить в виде

$$y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j z_j + \eta, \tag{2}$$

где $z_j = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kj} x_k$, $j = \overline{1, m}$, $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} (\theta - A\beta)_k x_k + \xi$. Как легко проверить, случайный элемент η имеет нулевое среднее и корреляционный оператор $S + T$, где T — линейный ограниченный оператор, определяющийся равенством $Th = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (h, x_i)_H R_{ik} x_k$, $h \in H$.

В качестве оценок для β, θ в такой модели при $\beta \in \Lambda_1$ или $\beta \in \Lambda_2$ удобно использовать квазиминимаксные оценки. (О них, а также об использовании других оценок для указанных параметров см. [2, 3].) В последней работе исследована также близость квазиминимаксных оценок к минимаксным.

Суть квазиминимаксного подхода к оцениванию параметров состоит в следующем. За критерий оценивания неизвестного параметра β по наблюдению y при $\beta \in \Lambda_1$ (для оценивания θ и при $\beta \in \Lambda_2$ рассуждения аналогичны) естественно взять величину

$$\sup_{\beta \in \Lambda_1} E\,(\widetilde{\beta} - \beta)'\,(\widetilde{\beta} - \beta), \tag{3}$$

где $\widetilde{\beta}$ — оценка для β, выбираемая из класса ограниченных линейных оценок вида

$$\widetilde{\beta}_j = (\beta_0)_j + \Big(y - \sum_{k=1}^{m} (\beta_0)_k z_k,\ b_j\Big)_H, \quad b_j \in H, \quad j = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), после ряда преобразований получаем

$$\sup_{\beta\in\Lambda_1} E(\widetilde{\beta}-\beta)'(\widetilde{\beta}-\beta)=\sum_{j=1}^{m}((S+T)\,b_j,\,b_j)_H+c\lambda_{\max}((A'QA)^{-1/2}\times$$
$$\times ZZ'(A'QA)^{-1/2}). \quad (5)$$

Здесь $\lambda_{\max}(F)$ — наибольшее собственное число матрицы F, а $Z=((z_k, b_j)_H-\delta_{kj})_{k,j=1}^m$.

Казалось бы, что теперь естественно выбрать в качестве $\{b_j\}_{j=1}^m$ элементы, доставляющие наименьшее значение величине (5) (минимаксный подход). Однако нахождение точного выражения для минимума величины (5) не представляется возможным ввиду нелинейности второго слагаемого из правой части формулы (5). Поэтому здесь вместо поиска наименьшего значения величины (5) предлагается искать наименьшее значение величины

$$\Delta_1=\sum_{j=1}^{m}((S+T)\,b_j,b_j)_H+c\,\mathrm{tr}\,(A'QA)^{-1/2}ZZ'\,(A'QA)^{-1/2}. \quad (6)$$

Элементы $\{\widehat{b}_j\}_{j=1}^m$, минимизирующие величину (6), и определяют квазиминимаксные оценки $\widehat{\beta}$ для β.

Справедлив следующий результат.

Т е о р е м а 1. *Квазиминимаксная оценка $\widehat{\beta}$ параметра β по наблюдению y при $\beta\in\Lambda_1$ имеет вид*

$$\widehat{\beta}_j=(\beta_0)_j+\Big(y-\sum_{k=1}^{m}(\beta_0)_k z_k,\,\widehat{b}_j\Big)_H,$$

где $\widehat{b}_j=\sum_{k=1}^{m}((A'QA)^{-1})_{jk}(c^{-1}S+\Pi)^{-1}z_k,\ \ j=\overline{1,m}$, *а* Π — *такой линейный ограниченный оператор, что*

$$\Pi h=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(h,x_k)_H\,(c^{-1}R+A\,(A'QA)^{-1}A')_{ki}x_i,\quad h\in H.$$

При этом

$$\Delta_1=c\,(\mathrm{tr}\,(A'QA)^{-1}-\mathrm{tr}\,(A'QA)^{-1}A'WA\,(A'QA)^{-1}),$$

где $W=(((c^{-1}S+\Pi)^{-1}x_i,\,x_k)_H)_{i,k=1}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Величину Δ_1 перепишем в виде

$$\Delta_1=\sum_{j=1}^{m}((S+T)\,b_j,\,b_j)_H+c\,\mathrm{tr}\,(A'QA)^{-1}ZZ'=\sum_{j=1}^{m}((S+T)\,b_j,b_j)_H+$$
$$+c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}((A'QA)^{-1})_{ik}(z_k,b_j)_H(z_i,b_j)_H-2c\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}((A'QA)^{-1})_{ik}\times$$
$$\times(z_k,b_i)_H+c\,\mathrm{tr}\,(A'QA)^{-1}=c\sum_{j=1}^{m}((c^{-1}S+\Pi)\,b_j,\,b_j)_H+c\,\mathrm{tr}\,(A'QA)^{-1}-$$
$$-2c\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}((A'QA)^{-1})_{ik}(z_k,b_i)_H.$$

Полученное выражение представляет собой квадратичную форму относительно набора элементов $\{b_j\}_{j=1}^m$. Как известно, минимальное значение такой квадратичной формы достигается при

$$\widehat{b}_j=\sum_{k=1}^{m}((A'QA)^{-1})_{jk}(c^{-1}S+\Pi)^{-1}z_k,\quad j=\overline{1,m}.$$

Теорема доказана.

В качестве оценок для вектора регрессионных коэффициентов θ будем рассматривать линейные оценки вида

$$\widetilde{\theta}_j = (A\beta_0)_j + \left(y - \sum_{k=1}^{m} (\beta_0)_k z_k, a_j\right)_H, \quad a_j \in H, \quad j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

а за критерий качества таких оценок при $\beta \in \Lambda_1$ возьмем величину

$$\sup_{\beta \in \Lambda_1} E(\widetilde{\theta} - \theta)' (\widetilde{\theta} - \theta). \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8), получаем

$$\sup_{\beta \in \Lambda_1} E(\widetilde{\theta} - \theta)' (\widetilde{\theta} - \theta) = \sum_{i=1}^{n} (Sa_i, a_i)_H + \operatorname{tr} RVV' + c\lambda_{\max} \times$$
$$\times ((A'QA)^{-1/2} A'VV'A (A'QA)^{-1/2}),$$

где $V = ((x_k, a_j)_H - \delta_{kj})_{k,j=1}^{n}$. По аналогии с изложенным выше назовем квазиминимаксной такую оценку $\widehat{\theta}$ параметра θ, для которой соответствующий набор элементов $\{\widehat{a}_i\}_{i=1}^{n}$ доставляет наименьшее значение величине

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{n} (Sa_i, a_i)_H + c \operatorname{tr} (c^{-1}R + A (A'QA)^{-1} A') VV'.$$

Следующие три теоремы доказываются тем же методом, что и теорема 1.

Теорема 2. *Квазиминимаксная оценка $\widehat{\theta}$ параметра θ по наблюдению y при $\beta \in \Lambda_1$ имеет вид*

$$\widehat{\theta}_j = (A\beta_0)_j + \left(y - \sum_{k=1}^{m} (\beta_0)_k z_k, \widehat{a}_j\right)_H,$$

где $\widehat{a}_j = \sum_{k=1}^{n} (c^{-1}R + A (A'QA)^{-1} A')_{jk} (c^{-1}S + \Pi)^{-1} x_k, \quad j = \overline{1, n}.$

При этом

$$\Delta_2 = c (\operatorname{tr} (c^{-1}R + A (A'QA)^{-1} A') - \operatorname{tr} (c^{-1}R + A (A'QA)^{-1}) A') W \times$$
$$\times (c^{-1}R + A (A'QA)^{-1} A').$$

Рассмотрим ситуацию, когда априорная информация задана в виде $\beta \in \Lambda_2$. Для линейных оценок из класса (4) после ряда преобразований получаем

$$\sup_{\beta \in \Lambda_2} E(\widetilde{\beta} - \beta)' (\widetilde{\beta} - \beta) = \sum_{j=1}^{m} ((S + T) b_j, b_j)_H + c\lambda_{\max} (U (A'QA)^{-1/2} \times$$
$$\times ZZ' (A'QA)^{-1/2} U),$$

где $U = I_m - (G (A'QA)^{-1/2})^{+} (G (A'QA)^{-1/2})$, $I_m = (\delta_{kj})_{k,j=1}^{m}$, а знак «+» обозначает псевдообращение матрицы по Муру — Пенроузу.

Квазиминимаксными оценками β^* параметра β при $\beta \in \Lambda_2$ назовем оценки, для которых соответствующий набор элементов $\{b_j^*\}_{j=1}^{m}$ доставляет наименьшее значение величине

$$\Delta_3 = \sum_{j=1}^{m} ((S + T) b_j, b_j)_H + c \operatorname{tr} (U (A'QA)^{-1/2} ZZ' (A'QA)^{-1/2} U).$$

Теорема 3. *Квазиминимаксная оценка β^* параметра β по наблюдению y при $\beta \in \Lambda_2$ имеет вид*

$$\beta_j^* = (\beta_0)_j + \left(y - \sum_{k=1}^{m} (\beta_0)_k z_k, b_j^*\right)_H,$$

где $b_j^* = \sum_{k=1}^{m} ((A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2})_{jk}(c^{-1}S + \Pi_0)^{-1}z_k, \quad j = \overline{1, m},$ *а* Π_0 — *такой линейный ограниченный оператор, что*

$$\Pi_0 h = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(h, x_k)_H (c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A')_{kj}x_j, \quad h \in H.$$

При этом

$$\Delta_3 = c(\operatorname{tr}(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2} - \operatorname{tr}(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A' \times$$
$$\times W_0 A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}),$$

где $W_0 = (((c^{-1}S + \Pi_0)^{-1}x_i, x_k)_H)_{i,k=1}^{n}$.

В качестве оценок для θ при $\beta \in \Lambda_2$ будем рассматривать все те же линейные оценки вида (7). Тогда

$$\sup_{\beta\in\Lambda_2} E(\widetilde{\theta} - \theta)'(\widetilde{\theta} - \theta) = \sum_{i=1}^{n}(Sa_i, a_i)_H + \operatorname{tr} RVV' + c\lambda_{\max} \times$$
$$\times (U(A'QA)^{-1/2}A'VV'A(A'QA)^{-1/2}U).$$

Как и раньше, квазиминимаксной назовем такую оценку θ^* параметра θ, для которой элементы $\{a_i^*\}_{i=1}^{n}$ минимизируют величину

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{n}(Sa_i, a_i)_H + c\operatorname{tr}(c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A')VV'.$$

Теорема 4. *Квазиминимаксная оценка* θ^* *параметра* θ *по наблюдению* y *при* $\beta \in \Lambda_2$ *имеет вид*

$$\theta_i^* = (A\beta_0)_i + \left(y - \sum_{k=1}^{m}(\beta_0)_k z_k, a_i^*\right)_H,$$

где $a_i^* = \sum_{k=1}^{n}(c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A')_{ik}(c^{-1}S + \Pi_0)^{-1}x_k, \quad i = \overline{1, n}.$

При этом

$$\Delta_4 = c(\operatorname{tr}(c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A') - \operatorname{tr}(c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2} \times$$
$$\times U(A'QA)^{-1/2}A')W_0(c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A').$$

Пусть теперь априорная информация задана в виде $\beta \in \Lambda_3$. Учитывая тот факт, что общее решение уравнения $G\beta = \gamma$ можно представить в виде

$$\beta = G^+\gamma + (I_m - G^+G)\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{9}$$

исходную модель после подстановки (9) в (2) легко свести к вырожденной модели без априорной информации. Согласно результату, полученному в [4], справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Линейная ограниченная оценка* $\breve{\beta}$ *параметра* β *с наименьшим смещением по наблюдению* y *при* $\beta \in \Lambda_3$ *имеет вид*

$$\breve{\beta}_j = (G^+\gamma)_j + \left((S + T)^{-1}v_j, \ y - \sum_{k=1}^{m}(G^+\gamma)_k z_k\right)_H,$$

где $v_j = \sum_{k=1}^{m} B_{jk}^+\widetilde{z}_k, \ B = (((S + T)^{-1}\widetilde{z}_j, \widetilde{z}_k)_H)_{j,k=1}^{m}, \ \widetilde{z}_k = \sum_{j=1}^{m}(I_m - G^+G)_{jk}z_j.$

Если к тому же выполняются условия $\sum_{k=1}^{m} G_{ik}z_k = 0, \ i = \overline{1, p},$ *то*

$\tilde{z}_k = z_k$, $k = \overline{1, m}$, *и оценка* $\breve{\beta}$ *будет наилучшей ограниченной линейной условно несмещенной (при условии* $G\beta = \gamma$*) оценкой. Для такой оценки* $\Delta_5 = E(\breve{\beta} - \beta)'(\breve{\beta} - \beta) = \operatorname{tr} B^+$.

Опираясь на теорему 5 и применяя известный метод множителей Лагранжа, можно получить следующий результат.

Теорема 6. *Наилучшая ограниченная линейная условно несмещенная оценка* $\breve{\theta}$ *параметра* θ *по наблюдению* y *при* $\beta \in \Lambda_3$ *и условии* $\sum_{k=1}^{m} G_{ik} z_k = 0$, $i = \overline{1, p}$, *имеет вид*

$$\breve{\theta}_k = (A\breve{\beta})_k + \left((S+T)^{-1} d_k, \quad y - \sum_{i=1}^{n} (A\breve{\beta})_i x_i\right)_H,$$

где $d_k = \sum_{i=1}^{n} R_{ki} x_i$, $k = \overline{1, n}$. *При этом*

$$\Delta_6 = E(\breve{\theta} - \theta)'(\breve{\theta} - \theta) = \operatorname{tr} R - \sum_{i=1}^{n} ((S+T)^{-1} d_i, d_i)_H + \operatorname{tr}(I_n - RP) \times$$

$$\times AB^+A'(I_n - RP)'.$$

Здесь $P = (((S+T)^{-1} x_i, x_k)_H)_{i,k=1}^{n}$.

Все изложенные выше результаты получены в предположении, что набор элементов $\{x_i\}_{i=1}^n$ фиксирован. Предположим теперь, что элементы $\{x_i\}_{i=1}^n$ выбраны в рамках, например, множества $X = \left\{\{x_i\}_{i=1}^n \subset H / \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_H^2 \leqslant r^2, r > 0\right\}$. Набор элементов $\{x_i^*\}_{i=1}^n \in X$, минимизирующий величину Δ_j, назовем оптимальным планом на X для соответствующей оценки неизвестного параметра.

Далее нам понадобится следующее условие.

А. Оператор S имеет s наименьших собственных чисел $\{\sigma_k\}_{k=1}^s$, которым отвечают собственные векторы $\{f_k\}_{k=1}^s$ соответственно, $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_s$.

Справедлив следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполняется условие* А *для* $s = m$ *и*

а) *существует ортогональная матрица* $C^{(1)}$, *которая приводит одновременно к диагональному виду* $(\alpha_k \delta_{kj})_{k,j=1}^n$ и $(\gamma_k \delta_{kj})_{k,j=1}^n$ $(\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m > \alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = 0;$ $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n)$ *соответственно матрицы* $A(A'QA)^{-2}A'$ *и* $c^{-1}R + A(A'QA)^{-1}A'$;

б) $\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \sigma_j^{1/2} \alpha_j^{-1/2} \leqslant \left(cr^2 + \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \gamma_k^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{1/2} \sigma_k^{1/2} \gamma_k^{-1}\right)^{-1}$.

Тогда оптимальным для квазиминимаксной оценки $\hat{\beta}$ *параметра* β *при* $\beta \in \Lambda_1$ *на множестве* X *является план* $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ *вида*

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{m} C_{ij}^{(1)} \left(\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{1/2} \sigma_k^{1/2} \gamma_k^{-1}\right)^{-1} \left(r^2 + c^{-1} \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \gamma_k^{-1}\right) \alpha_j^{1/2} \sigma_j^{1/2} \gamma_j^{-1} - c^{-1} \sigma_j \gamma_j^{-1}\right)^{1/2} f_j.$$

При этом

$$\Delta_1 = c\left(\operatorname{tr}(A'QA)^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \gamma_k^{-1} + \left(cr^2 + \sum_{k=1}^{m} \sigma_k \gamma_k^{-1}\right)^{-1} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{1/2} \sigma_k^{1/2} \gamma_k^{-1}\right)^2\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 наименьшее значение величина Δ_1 принимает в том случае, когда $\delta = \operatorname{tr}(A'QA)^{-1}A'WA(A'QA)^{-1}$ максимально.

Как обычно в такого типа задачах (см., например, [2]) элементы плана $\{x_i\}_{i=1}^n$ ищем в виде $x_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\lambda_k q_k$, где C — некоторая ортогональная матрица, $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ — набор неотрицательных действительных чисел, а $\{q_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированный набор элементов в H. Имеем

$$\delta = \operatorname{tr} C'A(A'QA)^{-2}A'C\Lambda\widetilde{W}\Lambda,$$

где

$$\Lambda = (\lambda_k\delta_{ki})_{k,i=1}^n,\quad \widetilde{W} = (((c^{-1}S + \widetilde{\Pi})^{-1}q_i, q_k)_H)_{i,k=1}^n,$$

$$\widetilde{\Pi}h = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(h, q_k)_H(\Lambda C'(c^{-1}R + A(A'QA)^{-1}A')C\Lambda)_{ki}q_i,\quad h \in H.$$

Согласно доказательству теоремы 2 из [2] при поиске наибольшего значения величины δ достаточно рассматривать случай, когда матрицы $C'A(A'QA)^{-2}A'C$ и $\widetilde{W}$ диагональны. Это будет в случае, когда $C = C^{(1)}$, $q_k = f_k$, $k = \overline{1, n}$. Получаем

$$\delta = \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\lambda_k^2(c^{-1}\sigma_k + \lambda_k^2\gamma_k)^{-1}.$$

При этом, поскольку $\{x_k\}_{k=1}^n \in X$, то $\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_H^2 = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \leqslant r^2$. Применяя теперь для поиска наибольшего значения величины δ метод множителей Лагранжа, получаем

$$\lambda_k^2 = \lambda^{-1/2}c^{-1/2}\sigma_k^{1/2}\alpha_k^{1/2}\gamma_k^{-1} - c^{-1}\sigma_k\gamma_k^{-1},\quad k = \overline{1, m};\qquad \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Неизвестный параметр λ теперь находим из условия

$$\lambda^{-1/2}c^{-1/2}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^{1/2}\alpha_k^{1/2}\gamma_k^{-1} - c^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\gamma_k^{-1} = r^2.$$

Следовательно,

$$\lambda_j^2 = \Big(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^{1/2}\sigma_k^{1/2}\gamma_k^{-1}\Big)^{-1}\Big(r^2 + c^{-1}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\gamma_k^{-1}\Big)\alpha_j^{1/2}\sigma_j^{1/2}\gamma_j^{-1} - c^{-1}\sigma_j\gamma_j^{-1},$$

$$j = \overline{1, m}.$$

Остается заметить, что правая часть последней формулы всегда неотрицательна ввиду условия б) теоремы. Теорема доказана.

Пользуясь, в основном, аналогичным методом, можно доказать следующие три теоремы.

Т е о р е м а 8. *Пусть выполняется условие* А *для* $s = n$ *и*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j^{1/2}\gamma_{n+1-j}^{-1} \leqslant \Big(cr^2 + \sum_{k=1}^{n}\sigma_k\gamma_{n+1-k}^{-1}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{1/2}\Big)^{-1}.$$

Тогда оптимальным для квазиминимаксной оценки $\hat{\theta}$ *параметра* θ *при* $\beta \in \Lambda_1$ *на множестве* X *является план* $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ *вида*

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n}C_{in+1-j}^{(1)}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{1/2}\Big)^{-1}\Big(r^2 + c^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\gamma_{n+1-k}^{-1}\Big)\sigma_j^{1/2} - c^{-1}\sigma_j\gamma_{n+1-j}^{-1}\Big)^{1/2}f_j,$$

где $C^{(1)}$ — *ортогональная матрица, приводящая к диагональному виду матрицу* $c^{-1}R + A(A'QA)^{-1}A'$. *При этом*

$$\Delta_2 = \left(r^2 + c^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\gamma_{n+1-k}^{-1}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{1/2}\right)^2.$$

Теорема 9. *Пусть выполняется условие* A *для* $s = m - p$ *и*

а) *существует ортогональная матрица* $C^{(2)}$, *которая приводит одновременно к диагональному виду* $(\mu_k\delta_{kj})_{k,j=1}^{n}$ *и* $(\nu_k\delta_{kj})_{k,j=1}^{n}$ $(\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n;\ \nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_q > \nu_{q+1} = \ldots = \nu_n = 0,\ q = m - p)$ *соответственно матрицы* $c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A'$, $A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1}U \times \times (A'QA)^{-1/2}A'$;

б) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant q}\sigma_i^{1/2}\nu_i^{-1/2} \leqslant \left(cr^2 + \sum\limits_{k=1}^{q}\sigma_k\mu_k^{-1}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\nu_k^{1/2}\sigma_k^{1/2}\mu_k^{-1}\right)^{-1}.$

Тогда оптимальным для квазиминимаксной оценки β^* *параметра* β *при* $\beta \in \Lambda_2$ *на множестве* X *является план* $\{x_k^*\}_{k=1}^{n}$ *вида*

$$x_k^* = \sum_{j=1}^{q}C_{kj}^{(2)}\left(\left(\sum_{i=1}^{q}\nu_i^{1/2}\sigma_i^{1/2}\mu_i^{-1}\right)^{-1}\left(r^2 + c^{-1}\sum_{i=1}^{q}\sigma_i\mu_i^{-1}\right)\nu_j^{1/2}\sigma_j^{1/2}\mu_j^{-1} - c^{-1}\sigma_j\mu_j^{-1}\right)^{1/2}f_j.$$

При этом

$$\Delta_3 = c\left(\operatorname{tr}(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2} - \sum_{k=1}^{q}\nu_k\mu_k^{-1} + \left(cr^2 + \sum_{k=1}^{q}\sigma_k\mu_k^{-1}\right)^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{k=1}^{q}\nu_k^{1/2}\sigma_k^{1/2}\mu_k^{-1}\right)^2\right).$$

Теорема 10. *Пусть выполняется условие* A *для* $s = n$ *и*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sigma_i^{1/2}\mu_{n+1-i}^{-1} \leqslant \left(cr^2 + \sum_{k=1}^{n}\sigma_k\mu_{n+1-k}^{-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{1/2}\right)^{-1}.$$

Тогда оптимальным для квазиминимаксной оценки θ^* *параметра* θ *при* $\beta \in \Lambda_2$ *на множестве* X *является план* $\{x_k^*\}_{k=1}^{n}$ *вида*

$$x_k^* = \sum_{j=1}^{n}C_{kn+1-j}^{(2)}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{1/2}\right)^{-1}\left(r^2 + c^{-1}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\mu_{n+1-i}^{-1}\right)\sigma_j^{1/2} - c^{-1}\sigma_j\mu_{n+1-j}^{-1}\right)^{1/2}f_j,$$

где $C^{(2)}$ — *ортогональная матрица, приводящая к диагональному виду матрицу* $c^{-1}R + A(A'QA)^{-1/2}U(A'QA)^{-1/2}A'$. *При этом*

$$\Delta_4 = \left(r^2 + c^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\mu_{n+1-k}^{-1}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^{1/2}\right)^2.$$

С помощью результатов, полученных в работах [1, 4], доказаны следующие две теоремы.

Теорема 11. *Пусть выполняется условие* A *для* $s = m - p$ *и*

а) $(m - p)$ *ненулевых собственных векторов матрицы* $(I_m - G^+G)$ *совпадают с* $(m - p)$ *собственными векторами матрицы* $A'A$, *отвечающими ее наибольшим собственным числам;*

б) *существует ортогональная матрица* $C^{(3)}$, *которая приводит одновременно к диагональному виду* $(a_k\delta_{kj})_{k,j=1}^{n}$ *и* $(\varphi_k\delta_{kj})_{k,j=1}^{n}$ $(a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m > a_{m+1} = \ldots = a_n = 0;\ \varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \varphi_n)$ *соответственно матрицы* AA' *и* R.

Тогда оптимальным для наилучшей ограниченной линейной условно несмещенной оценки $\check{\beta}$ *параметра* β *при* $\beta \in \Lambda_3$ *на множестве* X *является* *план* $\{x_k^*\}_{k=1}^n$ *вида*

$$x_k^* = r\Big(\sum_{j=1}^{m-p} \sigma_{m-p+1-j}^{1/2} a_j^{-1}\Big)^{-1/2} \sum_{i=1}^{m-p} C_{ki}^{(3)} a_i^{-1/2} \sigma_{m-p+1-i}^{1/4} f_{m-p+1-i}.$$

При этом

$$\Delta_5 = \sum_{k=1}^{m-p} a_k^{-2}\varphi_k + r^{-2}\Big(\sum_{k=1}^{m-p} a_k^{-1}\sigma_{m-p+1-k}^{1/2}\Big)^2.$$

Теорема 12. *Пусть выполняются условия теоремы* 11. *Тогда оптимальным для наилучшей ограниченной линейной условно несмещенной оценки* $\breve{\theta}$ *параметра* θ *при* $\beta \in \Lambda_3$ *на множестве* X *является план* $\{x_k^*\}_{k=1}^n$ *вида*

$$x_k^* = r\Big(\sum_{j=1}^{m-p} \sigma_{m-p+1-j}\varphi_j^{-1}\Big)^{-1/2} \sum_{i=1}^{m-p} C_{ki}^{(3)} \varphi_i^{-1/2} \sigma_{m-p+1-i}^{1/2} f_{m-p+1-i}.$$

При этом

$$\Delta_6 = \Big(1 - \Big(1 + r^{-2}\sum_{k=1}^{m-p} \varphi_k^{-1}\sigma_{m-p+1-k}\Big)^{-1}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m-p}\varphi_k + r^{-2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m-p}\varphi_k^{-1}\sigma_{m-p+1-k}\sum_{j=1}^{m-p}\varphi_j\Big).$$

Замечание. На первый взгляд может показаться, что условия теорем 7—12 достаточно громоздки для проверки. Однако, в приложениях эти условия, как правило, существенно упрощаются. Пусть, например, $n = m = 2$, $A = R = Q = I_2$, $c = 1$, $H = L_2([0, 1])$, $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ — стандартный винеровский случайный процесс, $X \subset H_p \times H_p$, $H_p = \Big\{z(t) = \sum_{k=1}^{p} b_k \sin\pi(k - 2^{-1})t,\ t \in [0, 1],\ \{b_k\}_{k=1}^p \subset \mathbb{R}\Big\}$, $p \geqslant 2$. Тогда согласно теоремам 7 и 8 при $r \geqslant 2\pi^{-1}(2p-1)^{-1}(2p-3)^{-1/2}$ оптимальные планы $\{x_1^*, x_2^*\}$ для квазиминимаксных оценок $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$ при $\beta \in \Lambda_1$ на X существуют, совпадают и определяются равенствами

$$x_1^*(t) = (2^{-1}\pi^{-2}(p-1)^{-1}(2p-1)^{-1}(2p-3)^{-1}(r^2\pi^2(2p-1)(2p-3)^2 +$$

$$+ 4))^{1/2}\sin\pi(p - 2^{-1})t,$$

$$x_2^*(t) = (2^{-1}\pi^{-2}(p-1)^{-1}(2p-1)^{-1}(2p-3)^{-1}(r^2\pi^2(2p-1)^2 \times$$

$$\times (2p-3) - 4))^{1/2}\sin\pi(p - 3\cdot 2^{-1})t.$$

1. *Заиграев А. Ю.* Оптимальное планирование эксперимента при оценке неизвестных случайных коэффициентов регрессии // Кибернетика.— 1990.— № 2.— С. 120—126.
2. *Заиграев А. Ю.* О квазиминимаксных оценках неизвестных параметров и оптимальных планах регрессионного эксперимента в гильбертовом пространстве // Аналитические методы исследования эволюций стохастических систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 21—29.
3. *Trenkler G., Stahlecker R.* Quasi minimax estimation in the linear regression model // Math. Operationsforsch. und Statist. Ser. Statist.— 1987.— 18, N 2.— P. 219—226.
4. *Заиграев А. Ю.* О планировании регрессионного эксперимента в гильбертовом пространстве //Теория случайн. процессов.— 1988.— Вып. 16.— С. 23—28.

Получено 22,09,89