УДК 517+519.46

В. Я. ГОЛОДЕЦ, д-р физ.-мат.наук,
А. М. СОХЕТ, асп. (Физ.-техн. ин-т низ. температур АН УССР, Харьков)

О свойствах совместно эргодического действия прямого произведения двух групп

Построено эргодическое действие α прямого произведения $\mathbb{Z}$ и $G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$, не изоморфное произведению действий $\mathbb{Z}$ и G, причем действия $\mathbb{Z}$ и G по отдельности не эргодичны. Действия $\mathbb{Z}$ на его эргодических компонентах метрически изоморфны тогда и только тогда, когда эти компоненты переводятся друг в друга действием G. Наконец, централизатор $C_\alpha(\mathbb{Z} \times G)$ таков, что $C_\alpha(\mathbb{Z} \times G)/\alpha(\mathbb{Z} \times G) \approx \mathbb{Z}_2$.

Побудована ергодична дія α прямого добутку $\mathbb{Z}$ та $G = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$, яка не ізоморфна добутку дій $\mathbb{Z}$ та G, причому окремі дії $\mathbb{Z}$ та G не ергодичні. Дії $\mathbb{Z}$ на її ергодичних компонентах метрично ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ці компоненти можуть бути переведені одна в одну дією G. Нарешті, централізатор $G_\alpha(\mathbb{Z} \times G)$ такий, що $C_\alpha(\mathbb{Z} \times G)/\alpha(\mathbb{Z} \times G) \approx \mathbb{Z}_2$.

Задача изучения коциклов эргодического автоморфизма со значениями в локально компактной группе G приводит к изучению ассоциированных эргодических действий группы $G \times \mathbb{R}$ [1]. Наименее изучен случай, когда совместное действие $G \times \mathbb{R}$ эргодично, а действие каждой из подгрупп $G \times \{0\}$ и $\{e\} \times \mathbb{R}$ (e — единица G) не является эргодическим. Не ясно даже, будут ли такие действия всегда изоморфны прямому произведению двух соответствующих эргодических действий.

В настоящей статье на основе конструкции Агеева [2] построено совместное действие α двух групп $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots$ и $\mathbb{Z}$ со следующими свойствами:

1) если $C_\alpha(G \times \mathbb{Z})$ — централизатор действия α, то $C_\alpha(G \times \mathbb{Z})/\alpha(G \times \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_2$;

2) если ζ и η — произвольные эргодические компоненты действия $\alpha(\{e\} \times \mathbb{Z})$, то действия $\alpha(\{e\} \times \mathbb{Z})|_\zeta$ и $\alpha(\{e\} \times \mathbb{Z})|_\eta$ тогда и только тогда метрически изоморфны, когда $\zeta = \alpha(g, 0)\eta$, $g \in G$;

3) действие каждой из групп G и $\mathbb{Z}$ не является эргодическим (см. также следствие 5).

А так как $G \times \mathbb{Z}$ есть подгруппа $G \times \mathbb{R}$, то с помощью конструкции индуцирования можно построить действие группы $G \times \mathbb{R}$ с такими же свойствами.

Приведем некоторые предварительные факты и введем необходимые обозначения [2]. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство Лебега и $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$; элементы Ω имеют вид $\omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$. Разбиением ξ называется конечный набор непересекающихся измеримых множеств A_i, объединение которых не обязано совпадать с X. Для каждого $\omega \in \Omega$ определяется монотонно возрастающая последовательность разбиений $\xi_n = \{A_i^{(n)} : i = 1, \ldots, q_n\}$ и сохраняющий меру автоморфизм $\widetilde{T}$ пространства X так, что выполнены следующие условия:

a) $\xi_n \to \varepsilon$;

b) q_n в двоичной записи имеет вид $\omega_0\omega_1 \ldots \omega_n$, $n \geqslant 0$, где $\omega_0 = 1$;

c) $\widetilde{T}_\omega A_i^{(n)} = A_{i+1}^{(n)}$, $i = 1, \ldots, q_{n-1}$, т. е. ξ_n является $\widetilde{T}$-стеком;

d) $A_1^{(n+1)} \cup A_{1+q_n}^{(n+1)} = A_1^{(n)}$, $n \geqslant 0$.

Этот автоморфизм $\widetilde{T}_\omega$ имеет ранг один. Над ним строится $\mathbb{Z}_2$-расширение $T_\omega(x,y) = (\widetilde{T}_\omega x, \alpha_\omega(x)\, y)$, $x \in X$, $y \in \mathbb{Z}_2$, где коцикл $\alpha_\omega : X \to \mathbb{Z}_2$ определяется формулой

$$\alpha_\omega(x) = \begin{cases} \varepsilon_n \text{ при } x \in A_{q_n}^{(n+2)}; \\ -\varepsilon_n \text{ при } x \in A_{q_n+q_{n+1}}^{(n+2)}; \\ 1 \text{ при } \omega_{n+1} = 1 \text{ и } x \in A_{2q_n}^{(n+1)}, \end{cases}$$

а $\{\varepsilon_n\}_0^{\infty} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ — произвольная заданная последовательность.

Всюду далее последовательность ω будет считаться фиксированной и удовлетворяющей следующим двум требованиям: во-первых, среди ω_k бесконечно много единиц, и, во-вторых, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(B(n)) \cdot q_n > 0$, где $B(n) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{q_n} A_i^{(n)}$.

Коцикл α мы оставляем за собой право варьировать.

В [2] доказано, что расширения T, построенные по коциклам $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, метрически неизоморфны, если последовательности $\{\varepsilon_n^1\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\varepsilon_n^2\}_{n=0}^{\infty}$, определяющие эти коциклы, различаются в счетном числе мест. Назовем коциклы α_1 и α_2 почти одинаковыми, если последовательности $\{\varepsilon_n^1\}$ и $\{\varepsilon_n^2\}$ различаются лишь в конечном числе мест.

Лемма 1. *Расширения T с почти одинаковыми коциклами метрически изоморфны.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть только случай последовательностей $\{\varepsilon_n^1\}$ и $\{\varepsilon_n^2\}$ таких, что $\varepsilon_n^1 = \varepsilon_n^2$ при всех n, кроме лишь одного значения $n = k$, но $\varepsilon_k^1 = -\varepsilon_k^2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Обозначим коциклы, построенные по этим последовательностям, α_1 и α_2, соответствующие расширения — T_1 и T_2. Установим между T_1 и T_2 метрический изоморфизм S. Из [2] (предложение 4. 6, первый абзац доказательства) следует, что S должен иметь вид $S(x, y) = (\widetilde{S}x, \beta(x)\, y)$, где $\widetilde{S}$ — автоморфизм на X, коммутирующий с $\widetilde{T}$. Так как согласно [2] (предложение 4.5) централизатор $\widetilde{T}$ состоит лишь из его степеней, то $\widetilde{S} = \widetilde{T}^l$ при некотором $l \in \mathbb{Z}$. Ограничимся лишь случаем $l = 0$; здесь отметим, что мы вправе всегда заменить мысленно S на ST_1^{-l} и тем самым свести дело к рассмотрению случая $l = 0$. Из $ST_1S^{-1} = T_2$ непосредственно получаем

$$\beta(\widetilde{T}x) = \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\, \beta(x). \tag{1}$$

Пусть $n > k+2$. Определим коцикл β так, чтобы он был постоянным на элементах стека ξ_n. Положим $\beta(x)|_{x\in A_1^{(n)}} = \beta_0$ и с помощью равенства (1) распространим β на все элементы ξ_n. Обозначим $\alpha^{(m)}(x) \doteq \alpha(x)\alpha(\widetilde{T}x)\cdot\ldots\cdot\alpha(\widetilde{T}^{m-1}x)$, $m\in\mathbb{N}$, и возьмем $x_0\in A_1^{(n+1)}$. Воспользуемся следующей формулой [2]:

$$\alpha^{(q_n)}(x_0) = -\alpha(\widetilde{T}^{q_{n-1}-1}x_0)\,\alpha(\widetilde{T}^{q_n-1}x_0).$$

Имеем $\widetilde{T}^{q_n}x_0\in A_{1+q_n}^{(n+1)}\subset A_1^{(n)}$, и поэтому

$$\beta(\widetilde{T}^{q_n}x_0) = \frac{\alpha_1^{(q_n)}(x_0)}{\alpha_1^{(q_n)}(x_0)}\,\beta_0 = \frac{-\alpha_2(\widetilde{T}^{q_{n-1}-1}x_0)\,\alpha_2(\widetilde{T}^{q_n-1}x_0)}{-\alpha_1(\widetilde{T}^{q_{n-1}-1}x_0)\,\alpha_1(\widetilde{T}^{q_n-1}x_0)}\,\beta_0 = \beta_0.$$

Значит, определение β постоянным на элементах ξ_n непротиворечиво. Индукцией по n распространим β на все пространство X.

Можно указать алгоритм явного вычисления $\beta(x)$. Для этого обозначим $\delta(j) = \begin{cases} 1, & j\neq 0; \\ -1, & j = 0, \end{cases}$ $\beta_i = \beta(x)|_{x\in A_{1+q_i}^{(n)}}$ и вычислим β_i.

Лемма 2. $\beta_i = \delta(k-i)\,\delta(k-i+1)\,\beta_0 = \begin{cases} \beta_0, & \text{если } i\neq k \text{ и } i\neq k+1; \\ -\beta_0, & \text{если } i=k \text{ или } i=k+1. \end{cases}$

Доказательство проводится индукцией по i. При $i=1$ могут представиться две возможности:

1) $\omega_1 = 0$, т. е. $q_1 = 2$; тогда имеем $\beta(z)|_{z\in A_2^{(n)}} = \beta(\widetilde{T}x)|_{x\in A_1^{(n)}} = \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\,\beta_0 = \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^1}\,\beta_0 = \delta(k)\,\beta_0$ и аналогично $\beta(z)|_{z\in A_3^{(n)}} = \beta(\widetilde{T}^2x)|_{x\in A_1^{(n)}} = \frac{\alpha_2(x)\,\alpha_2(\widetilde{T}x)}{\alpha_1(x)\,\alpha_1(\widetilde{T}x)}\,\beta_0 = \frac{\varepsilon_0^2\cdot\varepsilon_1^2}{\varepsilon_0^1\cdot\varepsilon_1^1}\,\beta_0 = \delta(k)\,\delta(k-1)\,\beta_0$, что и требовалось;

2) $\omega_1 = 1$, т. е. $q_1 = 3$; тогда $\beta(z)|_{z\in A_2^{(n)}} = \delta(k)\,\beta_0$, $\beta(z)|_{z\in A_3^{(n)}} = \delta(k)\,\beta_0$, $\beta(z)|_{z\in A_4^{(n)}} = \delta(k)\,\delta(k-1)\,\beta_0$.

Пусть теперь уже установлено, что $\beta_i = \delta(k-i)\,\delta(k-i+1)\,\beta_0$. Вычислим β_{i+1}. Поскольку в $i+1$-м стеке среди значений коцикла α появляются ε_{i-1} и $-\varepsilon_{i-1}$ (по одному разу), то произведение их даст (-1), и $\delta(k-i+1)$ исчезнет. Зато $\pm\varepsilon_i$ встречается лишь раз, и потому $\delta(k-i)$ останется. Ясно, что к нему добавится $\delta(k-i-1)$, соответствующий появлению ε_{i+1}.

Для вычисления $\beta(x)|_{x\in A_{q_i+l}^{(n)}}$, $l\leqslant q_i$, $i\geqslant 1$, надо лишь заметить, что

$$\frac{\beta(x)|_{x\in A_{q_i+l}^{(n)}}}{\beta_i} = \frac{\beta(x)|_{x\in A_l^{(n)}}}{\beta_0}.$$

Этим вычисление $\beta(x)|_{x\in A_{q_i+1}^{(n)}}$ сводится к вычислению $\beta(x)$ на элементе стека с меньшим номером, что и дает алгоритм быстрого вычисления $\beta(x)$.

Теперь мы можем определить совместное действие $\mathbb{Z}$ и группы $G = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{Z}_2$. Рассмотрим пространство $Y = X\times\mathbb{Z}_2\{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$; его элементы запишем в виде $(x, y, \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty})$. Коцикл α, построенный по последовательности $\{\varepsilon_n\}$, обозначим через $\alpha_{\{\varepsilon_n\}}(x)$. Определим на этом пространстве действие группы $\mathbb{Z}$, или, что то же самое, автоморфизм, и обозначим его снова буквой T: $T(x, y, \{\varepsilon_n\}) \doteq (\widetilde{T}x, \alpha_{\{\varepsilon_n\}}(x)\,y, \{\varepsilon_n\})$.

Так определенное действие распадается на эргодические компоненты вида $X \times \mathbb{Z}_2 \times \{\{\varepsilon_n\}\}$; на каждой из этих компонент T превращается просто в ранее рассмотренное расширение T фиксированного автоморфизма $\widetilde{T}$ посредством коцикла $\alpha_{\{\varepsilon_n\}}$. (Эргодичность доказана в [2] (теорема 3.1)). Всюду далее будем обозначать эти компоненты $Y_{\{\varepsilon_n\}}$, а ограничения T на них через $T_{\{\varepsilon_n\}}$. Критерий метрической изоморфности этих $T_{\{\varepsilon_n\}}$ уже установлен и состоит в том, чтобы две последовательности вида $\{\varepsilon_n\}$ различались в конечном числе мест.

Определим теперь действие G на том же пространстве. Пусть $\beta_k(x)$ — коцикл, построенный выше; таких коциклов существует ровно два, и они различаются лишь знаком, поскольку мы оставили за собой выбор $\beta_0 = 1$ или $\beta_0 = -1$. Всюду далее будем считать $\beta_0 = 1$. Теперь при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ можно определить преобразование π_k пространства Y формулой

$$\pi_k(x, y, \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}) = (x, \beta_k(x)\, y, \{\delta(k-n)\,\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}).$$

G есть группа, натянутая на эти π_k; она абелева. Отметим, что по построению β_k не зависит от $\{\varepsilon_n\}$; воспользуемся этим в дальнейшем.

Покажем, что T коммутирует с π_k. Действительно, $(T\pi_k)(x, y, \{\varepsilon_n\}) = T(x, \beta_k(x)\, y, \{\delta(k-n)\,\varepsilon_n\}) = (\widetilde{T}x, \alpha_{\{\delta(k-n)\varepsilon_n\}}(x)\, \beta_k(x)\, y, \quad \{\delta(k-n)\,\varepsilon_n\})$; с другой стороны, $(\pi_k T)(x, y, \{\varepsilon_n\}) = \pi_k(\widetilde{T}x, \alpha_{\{\varepsilon_n\}}(x)\, y, \{\varepsilon_n\}) = (\widetilde{T}x, \beta_k(\widetilde{T}x) \times \alpha_{\{\varepsilon_n\}}(x)\, y, \{\delta(k-n)\,\varepsilon_n\})$; но $\beta_k(\widetilde{T}x) = \dfrac{\alpha_{\{\delta(k-n)\varepsilon_n\}}(x)}{\alpha_{\{\varepsilon_n\}}(x)}\, \beta(x)$, что и требовалось.

Вычислим, наконец, централизатор совместного действия T и π_k. Пусть V — автоморфизм пространства Y, коммутирующий с T и со всеми π_k. Он априори может быть записан в виде

$$V(x, y, \{\varepsilon_n\}) = (v_1(x, y, \{\varepsilon_n\}), v_2(x, y, \{\varepsilon_n\}), \{u_m(x, y, \{\varepsilon_n\})\}). \tag{2}$$

Лемма 3. *u_m в (2) зависит только от ε_m и не зависит от x, y, ε_n $(n \neq m)$.*

Доказательство. Рассмотрим равенство $VT = TV$. Из него получаем

$$u_m(x, y, \{\varepsilon_n\}) = u_m(\widetilde{T}_x, \alpha_{\{\varepsilon_n\}}(x)\, y, \{\varepsilon_n\}).$$

Фиксируем $\{\varepsilon_n\}$ и убеждаемся, что u_m не зависит от x и y; это прямо следует из эргодичности T на $Y_{\{\varepsilon_n\}}$. Итак, мы вправе писать $u_m = u_m(\{\varepsilon_n\})$. Рассмотрим теперь равенство $V\pi_k = \pi_k V$. Из него находим

$$u_m(\{\delta(k-n)\,\varepsilon_n\}) = \delta(k-m)\, u_m(\{\varepsilon_n\}).$$

Отсюда очевидно вытекает, что u_m зависит только от ε_m и не зависит от ε с остальными номерами.

Всюду далее мы вправе писать $u_n = \gamma_n \varepsilon_n$, где $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ — фиксированная последовательность из ± 1.

Согласно лемме 3 можно зафиксировать $\{\varepsilon_n\}$ и рассмотреть ограничения v на $Y_{\{\varepsilon_n\}}$. Ясно, что V переводит $Y_{\{\varepsilon_n\}}$ в $Y_{\{\gamma_n\varepsilon_n\}}$. Поэтому из $TV = VT$ получаем

$$V|_{Y_{\{\varepsilon_n\}}} \cdot T_{\{\varepsilon_n\}} = T_{\{\gamma_n\varepsilon_n\}} \cdot V|_{Y_{\{\varepsilon_n\}}}. \tag{3}$$

Отсюда, во-первых, следует, что почти все γ_n равны 1, и лишь конечное их число может быть равно -1. Во-вторых, обозначим $V_0 = \prod_{\{k:\gamma_k=-1\}} \pi_k$; тогда (см. лемму 1 и определение π_k)

$$V_0 T_{\{\varepsilon_n\}} = T_{\{\gamma_n\varepsilon_n\}} V_0. \tag{4}$$

Ясно, что V_0 коммутирует с T, V и со всеми π_k и $V_0^2 = \mathrm{id}$. Но из сравнения равенств (3) и (4) следует, что $V|_{Y_{\{\varepsilon_n\}}} \cdot V_0$ коммутирует с $T_{\{\varepsilon_n\}}$. Тогда по теореме 4.7 из [2] $V|_{Y_{\{\varepsilon_n\}}} \cdot V_0$ имеет вид $T^p_{\{\varepsilon_n\}} \cdot \sigma^q$, где $\sigma(x, y, z) = (x, -y, z)$. Следовательно,

$$V|_{Y_{\{\varepsilon_n\}}} = (T_{\{\varepsilon_n\}})^{p(\{\varepsilon_n\})} \cdot \sigma^{q(\{\varepsilon_n\})} \cdot V_0.$$

Теорема 4. $V = T^p \cdot \sigma^q \cdot \prod\limits_{\{k:\gamma_k=-1\}} \pi_k$, *где* $p, q \in \mathbb{Z}$ *и не зависят от* $\{\varepsilon_n\}$.

Доказательство. В равенстве $V\pi_k = \pi_k v$, применяемом к точке $(x, y, \{\varepsilon_n\})$, проследим только за первой компонентой. Для $V\pi_k$ получим $\widetilde{T}^{p(\{\delta(k-n)\varepsilon_n\})}x$, а для $\pi_k V$ — $\widetilde{T}^{p(\{\varepsilon_n\})}x$. Следовательно, p есть константа и $V|_{Y_{\{\varepsilon_n\}}} = (T_{\{\varepsilon_n\}})^p \cdot \sigma^{q(\{\varepsilon_n\})} \cdot V_0$. Точно так же, следя за второй компонентой, из того же равенства $V\pi_k = \pi_k V$ получаем $\sigma^{q(\{\delta(k-n)\varepsilon_n\})} = \sigma^{q(\{\varepsilon_n\})}$, откуда и q есть константа, по крайней мере по $\mathrm{mod}\, 2$, но большего и не требуется.

Этим установлено строение общего централизатора. Он оказался счетным и кроме конечных произведений T и π_k содержит только возможность перемены знака при y, или, что то же самое, возможность иного выбора знака в коцикле β.

Следствие 5. *Построенное действие α группы $\mathbb{Z} \times G$ не изоморфно произведению соответствующих действий групп $\mathbb{Z}$ и G.*

Действительно, $C_\alpha(G) = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, $C_\alpha(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, однако $C_\alpha(G \times \mathbb{Z}) \neq C_\alpha(\mathbb{Z}) \times C_\alpha(G)$.

1. *Безуглый С. И., Голодец В. Я.* Слабая эквивалентность и структура коциклов эргодического автоморфизма.— Харьков, 1988.— Ч. I.— 44 с.— Ч. II.— 34 с. — (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низ. температур; 15; 16-88).
2. *Агеев О. Н.* Динамические системы с четнократной лебеговской компонентой в спектре // Мат. сб.— 1988.— 136, № 3.— С. 307—319.

Получено 22.05.90