УДК 517.956.4

Г. П. ЛОПУШАНСЬКА, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння

Теорема о представлении решения в D' неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в виде свертки правой части и фундаментальной функции обобщается на случай линейного неоднородного дифференциального уравнения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. На основании этой теоремы предложено один метод изучения как прямых, так и обратных краевых задач в пространстве распределений.

Теорема про зображення розв'язку у D' неоднорідного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами у вигляді згортки правої частини і фундаментальної функції узагальнюється на випадок лінійного неоднорідного диференціального рівняння із нескінченно диференційованими коефіцієнтами. На основі цієї теореми запропоновано один метод вивчення як прямих, так і обернених крайових задач у просторі розподілів.

Нехай $L(x, D) = \sum\limits_{|k|\leqslant m} a_k(x) D^k$ — гіпоеліптичний диференціальний оператор з коефіцієнтами $a_k(x) \in C^\infty(R^n)$, $\mathscr{E}(x, y)$ — нормальна фундаментальна функція його, тобто розв'язок у $D'(R^n)$ рівняння $L(x, D)\mathscr{E}(x, y) = \delta(x-y)$ такий, що $L^*(y, D)\mathscr{E}(x, y) = \delta(x-y)$. Нехай $Z(R^n) = \{\psi(y) = (\varphi(x), \mathscr{E}(x, y)), \varphi \in D(R^n)\}$ ($Z \subset C^\infty$ для гіпоеліптичного оператора L), $D \subset V \subset C^\infty$. Позначимо через $D' \cap V_y$ простір узагальнених функцій $f(x, y)$ із $D'(R^n \times R^n)$, які належать V як функції від y, тобто [1] $(\varphi(x), f(x, y)) \in V(R^n)$ для довільної $\varphi \in D(R^n)$ і $(\varphi_n(x), f(x, y)) \xrightarrow[n\to\infty]{V} 0$, коли $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{D} 0$. Ясно, що у випадку гіпоеліптичного оператора L $\mathscr{E}(x, y) \in D' \cap C_y^\infty$ і $L^*(y, D)(\varphi(x), \mathscr{E}(x, y)) = (\varphi(x), L^*(y, D)\mathscr{E}(x, y)) = (\varphi(x), \delta(x-y) = \varphi(y)$,

$$(L^*(x, D)\varphi(x), \mathscr{E}(x, y)) = (\varphi(x)), L(x, D)\mathscr{E}(x, y)) = \varphi(y) \in C^\infty(R^n).$$

Назвемо «композицією» $f(x, y) \in D' \cap V_y$ і $F(y) \in V'(R^n)$ функціонал $f_F(x) = f(x, y) \circledast F(y)$, визначений рівністю $(\varphi(x), f_F(x)) = ((\varphi(x), f(x, y)), F(y))$ для кожної $\varphi \in D(R^n)$. Легко показати його лінійність і неперервність, так що $f_F(x) \in D'(R^n)$.

Теорема 1. *Нехай $F \in Z'(R^n)$ $(F \in D'(R^n))$. Узагальнена функція $u(x) = \mathscr{E}(x, y) \circledast F(y)$ є розв'язком у $Z'(R^n)$ $(D'(R^n))$ рівняння*

$$L(x, D)u = F \tag{1}$$

і він єдиний у класі тих розподілів із $D'(R^n)$, для яких існує «композиція» із нормальною фундаментальною функцією.

Дійсно, для кожної $\psi \in Z(R^n)$ $(\varphi \in D(R^n))$

$$(\psi, Lu) = (L^*\psi, u) = (L^*\psi(x), \mathscr{E}(x, y) \circledast F(y)) =$$

$$= ((L^*\psi(x), \mathscr{E}(x, y)), F(y)) = (\psi(y), F(y))$$

$$((\varphi, Lu) = (L^*\varphi, u) = ((L^*\varphi(x), \mathscr{E}(x, y)), F(y)) = (\varphi(y), F(y))).$$

Якщо $u_1(x)$, $u_2(x)$ — два розв'язки рівняння із $D'(R^n)$, то для $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ маємо $L(x, D)u(x) = 0$ у $D'(R^n)$, а для кожної $\varphi \in D$ $(\varphi, u) = ((L^*\varphi(x), \mathscr{E}(x, y)), u(y)) = (L^*\varphi(x), \mathscr{E}(x, y) \circledast u(y)) = (L^*(y, D) \times (\varphi(x), \mathscr{E}(x, y)), u(y)) = ((\varphi(x), \mathscr{E}(x, y)), Lu(y)) = 0$, тобто $u(x) = 0$ у $D'(R^n)$.

У [2—13] розглядаються еліптичні, параболічні і гіперболічні крайові задачі у різних просторах узагальнених функцій, у різних постановках. У роботах [2, 4, 7, 9—13] одержано представлення розв'язків за допомогою функцій Гріна, розв'язування крайових задач у [12, 13] і деяких інших роботах зведено до розв'язування інтегральних рівнянь 2-го роду у просторах гладких функцій. Розглянемо один метод розв'язування прямих і граничних обернених крайових задач у просторах розподілів, застосовуючи теорему 1. Обмежимось випадком параболічного оператора другого порядку.

Нехай Ω_0 — область в R^n, обмежена замкненою n — 1-вимірною поверхнею Ω_1 класу C^∞, $Q_i = \Omega_i \times (0;\ T)$, $i = 0,\ 1$; $u\,(x,\ t)$ — розв'язок задачі

$$\begin{gathered} Lu\,(x, t) = F_0\,(x, t), \quad (x, t) \in Q_0, \\ u\,(x, t) = F_1\,(x, t), \quad (x, t) \in Q_1, \\ u\,(x, 0) = F_2\,(x), \quad x \in \Omega_0, \end{gathered} \tag{2}$$

$$Lu\,(x, t) = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x, t)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x, t)\, u_{x_i} + a_0\,(x, t)\, u$$

при досить гладких F_0, F_1, F_2,

$$\tilde{u}\,(x, t) = \begin{cases} u\,(x, t), & (x, t) \in Q_0; \\ 0, & (x, t) \overline{\in} Q_0, \end{cases} \qquad \tilde{F}_0\,(x, t) = \begin{cases} F_0\,(x_1, t), & (x, t) \in Q_0; \\ 0, & (x, t) \overline{\in} Q_0. \end{cases}$$

Тоді $\tilde{u}\,(x, t)$ — регулярна узагальнена функція і для кожної $\varphi\,(x, t) \in \in D\,(R^{n+1})$

$$(\varphi, L\tilde{u}) = (L^*\varphi, \tilde{u}) = \int_{Q_0} L^*\varphi u dxdt = \int_{Q_0} \varphi F_0 dxdt + \int_{Q_1} (\varphi Bu - C\varphi F_1)\, dxdt +$$
$$+ \int_{\Omega_0} [\varphi\,(x, 0)\, F_2\,(x) - \varphi\,(x, T)\, u\,(x, T)]\, dx, \tag{3}$$

де

$$Bu = a\,\frac{du}{dN} + \beta u, \quad Cu = a\,\frac{du}{dN} + (\beta - b)\, u, \quad a = \Big[\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_k\Big)^2\Big]^{1/2},$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} e_i n_i, \quad e_i = a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}, \quad \beta \in C^\infty\,(\overline{Q}_1), \quad n_i = n_i\,(x)$$

— напрямні косинуси зовнішньої нормалі $n\,(x)$, $\nu\,(x)$ — її орт, $N_i = N_i\,(x, t) = \dfrac{1}{a\,(x, t)} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(x,\ t)\, n_k\ (x)$ — напрямні косинуси конормалі, $\dfrac{d}{dN}$ — оператор диференціювання по конормалі.

Введемо узагальнені функції F_{Q_1}, C^*F_1 із $D'\,(R^{n+1})$ з компактними носіями на $\overline{Q}_1$ таким чином: $(\varphi, F_{Q_1}) = \langle \varphi, F_{Q_1} \rangle$, $(\varphi, C^*F_1) = \langle C\varphi, F_1 \rangle$ для кожної $\varphi \in C^\infty\,(R^{n+1})$, де $\langle \varphi, F \rangle$ — дія узагальненої функції $F \in D'\,(\overline{Q}_1)$ на основну функцію $\varphi \in D(\overline{Q}_1) = C^\infty(\overline{Q}_1)$. При цьому $\langle \varphi, F_{Q_1} \rangle = \int_{Q_1} F_{Q_1} \varphi dQ_1 \Big(\langle C\varphi, F_1 \rangle = \int_{Q_1} F_1 C\varphi dQ_1\Big)$ для регулярних F_{Q_1}, F_1. Введемо узагальнену функцію $F_{2T} \in D'\,(R^{n+1})$ з носієм на $\overline{\Omega}_0$: для кожної $\varphi \in C^\infty\,(R^{n+1})$ $(\varphi, F_{2T}) = [\varphi(x, 0), F_{2T}]$, де $[\varphi, F]$ — дія $F \in D'\,(\overline{\Omega}_0)$ на $\varphi \in D\,(\overline{\Omega}_0) = C^\infty\,(\overline{\Omega}_0)$.

Тепер (3) можна записати у вигляді

$$(\varphi, L\tilde{u}) = (\varphi, \tilde{F}_0 + F_{Q_1} - C^*F_1 + F_2 - F_{2T}), \ \varphi \in D, \ F_{Q_1} = B\tilde{u}|_{Q_1}, \ F_{2T} = \tilde{u}|_{t=T}.$$

Це значить, що $\widetilde{u}$ є розв'язком із $D'(R^{n+1})$ рівняння

$$L\widetilde{u} = \widetilde{F}_0 - F_{Q_1} - C^*F_1 + F_2 - F_{2T} \tag{4}$$

у просторі $\mathscr{E}'$ (оскільки $\widetilde{F}_0, F_1, F_{Q_1}, F_2, F_{2T}$ мають компактні носії, то права частина (4) належить $\mathscr{E}'$). За теоремою 1 $\widetilde{u}(x, t) \in D'(R^{n+1})$ і зображається у вигляді

$$\widetilde{u}(x, t) = \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau) \circledast (\widetilde{F}_0(y, \tau) + F_{Q_1}(y, \tau) - C^*F_1(y, \tau) + F_2(y) - F_{2T}(y)), \tag{5}$$

а оскільки $\widetilde{u}(x, t) = 0$ поза $\overline{Q}_0$, то для кожної $\varphi \in D(R^{n+1} \diagdown \overline{Q}_0)$

$$((\varphi(x, t), \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)), \widetilde{F}_0(y, \tau) + F_{Q_1}(y, \tau) - C^*F_1(y, \tau) + F_2(y) - F_{2T}(y) = 0. \tag{6}$$

Використовуючи властивості $\mathscr{E}$ і аналог теореми Фубіні [1], (6) можна записати у вигляді

$$\int\limits_{R^{n+1}\diagdown\overline{Q}_0} \varphi(x, t) \{(\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_0(y, \tau)) + \langle \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_{Q_1}\rangle - \langle C_{y,\tau}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_1\rangle + [\mathscr{E}(x, t;\ y, 0), F_2(y)] - [\mathscr{E}(x, t;\ y, T), F_{2T}(y)]\}\, dxdt = 0,$$

тобто

$$(\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_0(y, \tau)) + \langle \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_{Q_1}\rangle - \langle C_{y,\tau}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_1\rangle + [\mathscr{E}(x, t;\ y, 0), F_2(y)] - [\mathscr{E}(x, t;\ y, T), F_{2T}(y)] = 0, \quad (x, t) \in R^{n+1} \diagdown \overline{Q}_0, \tag{7}$$

і вважати умовою для знаходження невідомих $F_{Q_1} \in D'(\overline{Q}_1)$, $F_{2T} \in D'(\overline{\Omega}_0)$.

П о с т а н о в к а у з а г а л ь н е н о ї п е р ш о ї к р а й о в о ї з а д а ч і. Нехай $F_0 \in Z'(\overline{Q}_0)$, $F_1 \in D'(\overline{Q}_1)$, $F_2 \in D'(\overline{\Omega}_0)$. Знайти розв'язок $u(x, t) \in D'(\overline{Q}_0)$ задачі (2), а саме узагальнений розв'язок $\widetilde{u}(x, t)$ рівняння (4) у $Z'(R^{n+1})$, який дорівнює нулеві в $R^{n+1} \diagdown \overline{Q}_0$, а значить, задовольняє (7).

Покажемо, що із (7) можна однозначно знайти $F_{Q_1} \in D'(\overline{Q}_1)$ і $F_{2T} \in D'(\overline{\Omega}_0)$. Нехай $\Omega_{1\varepsilon}$ — поверхня в $R^n \diagdown \overline{\Omega}_0$, паралельна до Ω_1, $Q_{1\varepsilon} = \Omega_{1\varepsilon} \times (-\varepsilon_1;\ T + \varepsilon_1)$, $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, якщо $x \in \Omega_1$, $x_\varepsilon \in \Omega_{1\varepsilon}$, ε, $\varepsilon_1 > 0$, $\Omega_{0\varepsilon}$ — область в R^n, обмежена поверхнею $\Omega_{1\varepsilon}$, $\varphi(x_\varepsilon, t) \in D(\overline{Q}_{1\varepsilon})$ — гладке продовження функції $\varphi(x, t) \in D(\overline{Q}_1)$.

Тоді із (7) маємо

$$\lim_{\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon, t)\, B_{x,t} \langle \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_{Q_1}\rangle\, dQ_{1\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon, t)\, B_{x,t} \{\langle C_{y,\tau}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_1\rangle - (\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_0) + [\mathscr{E}(x, t;\ y, T), F_{2T}(y)] - [\mathscr{E}(x, t;\ y, 0), F_2(y)]\}\, dQ_{1\varepsilon}, \quad \varphi \in D(\overline{Q}_1),$$

$$\lim_{t \to T+} \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x) \{(\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau),\ F_0(y, \tau)) + \langle \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_{Q_1}\rangle - \langle C_{y,\tau}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau), F_1\rangle + [\mathscr{E}(x, t;\ y, 0), F_2(y)] - [\mathscr{E}(x, t;\ y, T), F_{2T}(y)]\}\, dx = 0, \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}_0),$$

або, використовуючи аналог теореми Фубіні [1]

$$\langle \lim_{\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x_\varepsilon, t;\ y, \tau)\, dQ_{1\varepsilon}, F_{Q_1}\rangle = \langle \lim_{\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon, t)\, B_{x,t}C_{y,\tau}\mathscr{E}(x_\varepsilon,\ t;$$

$$y, \tau)\, dQ_{1\varepsilon}, F_1\rangle - \big(\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x_\varepsilon, t;\ y, \tau)\, dQ_{1\varepsilon}, F_0\big) -$$

$$-\Big[\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x_\varepsilon, t;\ y, 0)\, dQ_{1\varepsilon}, F_2\Big] +$$

$$+\Big[\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon, t)\, B_{x,t}+\mathscr{E}(x_\varepsilon, t;\ y, T)\, dQ_{1\varepsilon}, F_{2T}\Big], \quad \varphi \in D(\overline{Q}_1),$$

$$\Big[\lim_{t\to T+} \int_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathscr{E}(x, t;\ y, T)\, dx, F_{2T}(y)\Big] = \Big[\lim_{t\to T+} \int_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathscr{E}(x, t;\ y, 0)\, dx, F_2(y)\Big] +$$

$$+\langle \lim_{t\to T+} \int_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx, F_{Q_1}\rangle - \langle \lim_{t\to T+} \int_{\Omega_0} \varphi(x)\, C_{y,\tau}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx, F_1\rangle +$$

$$+\Big(\lim_{t\to T+} \int_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx, F_0\Big), \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}_0).$$

Лема 1. *Інтегральний оператор* $(K\varphi)(y, \tau) = \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi(x, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x, t;$ $y, \tau)\, dx$ *діє у просторі* $D(\overline{Q}_1)$.

Доводиться за тією ж схемою, що відповідні твердження у [12, 13].

За цією лемою, лемою 1 [9] і властивостями параболічних потенціалів із попередніх тотожностей отримуємо

$$\langle -\frac{1}{2}\varphi(y, \tau) + \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi(x, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx, F_{Q_1}\rangle =$$

$$= \langle (W\varphi)(y, \tau), F_1\rangle - \Big(\int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi(x, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx, F_0\Big) -$$

$$-\Big[\int_0^T dt \int_{\Omega_1} \varphi(x, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x, t;\ y, 0)\, dx - \frac{1}{2}\varphi(y, 0), F_2\Big], \quad \varphi \in D(\overline{Q}_1), \tag{8}$$

$$(W\varphi)(y, \tau) = C_{y,\tau} \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi(x, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx, \quad (y, \tau) \in Q_1,$$

$$[\varphi(y), F_{2T}(y)] = \Big[\int_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathscr{E}(x, T;\ y, 0)\, dx, F_2(y)\Big] + \langle \int_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathscr{E}(x, T;\ y, \tau)\, dx,$$

$$F_{Q_1}\rangle - \langle \int_{\Omega_0} \varphi(x)\, C_{y,\tau}\mathscr{E}(x, T;\ y, \tau)\, dx, F_1\rangle +$$

$$+\Big(\int_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathscr{E}(x, T;\ y, \tau)\, dx, F_0\Big), \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}_0), \tag{9}$$

тобто

$$\langle g, F_{Q_1}\rangle = \langle W\varphi_g, F_1\rangle -$$

$$-\Big(\int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi_g(x, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx, F_0\Big) - [g(y, 0), F_2], \tag{10}$$

де $g(y, \tau) \in D(\overline{Q}_1)$, φ_g — розв'язок інтегрального рівняння

$$-\frac{1}{2}\varphi(y, \tau) + \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi(x, t)\, B_{x,t}\mathscr{E}(x, t;\ y, \tau)\, dx = g(y, \tau), \tag{11}$$

$$(y, \tau) \in \overline{Q}_1,$$

$F_{2T}(y) \in D'(\overline{\Omega}_0)$ і визначається із (9).

Покажемо, що знайдені згідно з (9) — (11) узагальнені функції F_{Q_1} і F_{2T} задовольняють також (7). Розглянемо функцію

$$v(x,t) = (\mathcal{E}(x,t;\ y,\tau), F_0) + \langle \mathcal{E}(x,t;\ y,\tau), F_{Q_1}\rangle - \langle C_{y,\tau}\mathcal{E}(x,t;\ y,\tau), F_1\rangle +$$

$$+ [\mathcal{E}(x,t;\ y,0), F_2] - [\mathcal{E}(x,t;\ y,T), F_{2T}] \text{ при } (x,t) \in (R^n \diagdown \bar{\Omega}_0) \times (0;T) = Q_l.$$

Вона є регулярним розв'язком рівняння

$$Lv(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_l, \tag{12}$$

на безмежності має порядок нормальної фундаментальної матриці і задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon,t)\, B_{x,t} v(x_\varepsilon,t)\, dQ_{1\varepsilon} = 0, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_1), \tag{13}$$

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{R^n \diagdown \bar{\Omega}_0} \varphi(x)\, v(x,t)\, dx = 0, \quad \varphi \in D(R^n \diagdown \bar{\Omega}_0), \tag{14}$$

тобто є розв'язком зовнішньої узагальненої 2-ї крайової задачі для однорідного параболічного рівняння (12). Як у [12], для внутрішньої узагальненої крайової задачі можна довести, що $v(x,\ t) = 0$ в Q_l. Враховуючи (9) і єдиність розв'язку узагальненої задачі Коші для рівняння (12) [3—5], отримуємо також, що $v(x,\ t) = 0$ в $R^n \times [T;\ +\infty)$, а отже, виконується (7).

Покажемо, що існує не більше однієї $F_{Q_1} \in D'(\bar{Q}_1)$ і однієї $F_{2T} \in D'(\bar{\Omega}_0)$, які задовольняють (7). Дійсно, якби було по дві таких узагальнених функції $F_{Q_1,1}$ і $F_{Q_1,2}$ із $D'(\bar{Q}_1)$, $F_{2T,1}$, $F_{2T,2} \in D'(\bar{\Omega}_0)$, то ввівши $\bar{F}_{Q_1} = F_{Q_1,1} - F_{Q_1,2}$ і $\bar{F}_{2T} = F_{2T,1} - F_{2T,2}$, будемо мати

$$\langle \mathcal{E}(x,t;\ y,\tau), \bar{F}_{Q_1}\rangle - [\mathcal{E}(x,t;\ y,T), \bar{F}_{2T}] = 0, \tag{15}$$

$$(x,\ t) \in R^{n+1} \diagdown \bar{Q}_0$$

і

$$\langle \mathcal{E}(x,t;\ y,\tau), \bar{F}_{Q_1}\rangle = 0, \quad (x,\ t) \in \bar{Q}_l. \tag{16}$$

Функція $w(x,t) = \langle \mathcal{E}(x,t;\ y,\tau),\ \bar{F}_{Q_1}\rangle$ в Q_l є розв'язком задачі (12) — (14), а отже, тотожній нуль в Q_l. Але

$$0 = \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon,t)\, B_{x,t} w(x_\varepsilon,t)\, dQ_1 = \langle -\frac{1}{2}\varphi(y,\tau) +$$

$$+ \int\limits_{Q_{1\varepsilon}} \varphi(x,\ t)\, B_{x,t}\mathcal{E}(x,t;\ y,\tau)\, dQ_1, \bar{F}_{Q_1}\rangle, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_1),$$

тому із однозначної розв'язності в $D(\bar{Q}_1)$ інтегрального рівняння (11) [6, 12] маємо $\langle g, \bar{F}_{Q_1}\rangle = 0$ для кожної $g \in D(\bar{Q}_1)$, що значить $\bar{F}_{Q_1} = 0$ у $D'(\bar{Q}_1)$. Тепер із (15) $[\mathcal{E}(x,t;\ y,T), \bar{F}_{2T}] = 0$ для $(x,t) \in R^{n+1} | \bar{Q}_0$, а значить, $\lim\limits_{t\to T+} \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\, [\mathcal{E}(x,t;\ y,T), \bar{F}_{2T}(y)]\, dx = 0$, тобто $\left[\lim\limits_{t\to T+} \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\, \mathcal{E}(x,t,\ y,T)\, dx, \bar{F}_{2T}\right] = [\varphi(y), \bar{F}_{2T}(y)] = 0$ для кожної $\varphi \in D(\bar{\Omega}_0)$, тому також $\bar{F}_{2T} = 0$ у $D'(\bar{\Omega}_0)$. Отже, доведена така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $F_0 \in Z'(\bar{Q}_0)$, $F_1 \in D'(\bar{Q}_1)$, $F_2 \in D'(\bar{\Omega}_0)$. *Існує єдиний розв'язок першої узагальненої крайової задачі* $u(x,t) \in D'(\bar{Q}_0)$. *Він визначається формулою* (5), *а невідомі розподіли* $F_{Q_1} \in D'(\bar{Q}_1)$ *і* $F_{2T} \in D'(\bar{\Omega}_0)$ *однозначно визначаються згідно з* (9) — (11).

Теорема 3. *Нехай* $F_0 \in Z'(\bar{Q}_0) \cap X_1'(\bar{Q}_0)$, $X_1(\bar{Q}_0) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_0):\ \varphi|_{\bar{Q}_1} = 0,\ D^k\varphi|_{t=T} = 0,\quad k = 0, 1, \ldots\}$, $F_1 \in D'(\bar{Q}_1)$, $F_2 \in D'(\bar{\Omega}_0)$, $u(x,\ t)$ — *розв'язок першої узагальненої крайової задачі. Тоді* $u(x,\ t)$ *та-*

кож задовольняє задачу (2) *в сенсі* [13], *а саме: для кожної* $\psi\in X_1(\overline{Q}_0)$ *виконується тотожність*

$$(L^*\psi, u) = (\psi, F_0) - \langle C\psi, F_1\rangle + [\psi(x, 0), F_2] \tag{17}$$

і навпаки.

Дійсно, із (4) для довільної $\psi\in X_1(\overline{Q}_0)$ маємо $(L^*\psi, \tilde{u}) = (\psi, \tilde{F}) - (\psi, C^*F_1) + (\psi, F_2)$, а тоді (17). Навпаки, легко перевірити, що узагальнена функція, визначена у [13] як единий розв'язок задачі (2) в сенсі (17) і продовжена нулем поза $\overline{Q}_0$, задовольняє також (4).

Постановка узагальненої другої крайової задачі. Нехай $F_0\in Z'(\overline{Q}_0)$, $F_{Q_1}\in D'(\overline{Q}_1)$, $F_2\in D'(\overline{\Omega}_0)$. Знайти розв'язок $u\in D'(\overline{Q}_0)$ рівняння $Lu(x,t) = F_0(x,t)$, $(x,t)\in Q$, який задовольняє умови $Bu|_{Q_1} = F_{Q_1}$, $u|_{t=0} = F_2$. Під розв'язком цієї задачі розуміємо узагальнений розв'язок рівняння (4), який дорівнює нулеві при $(x,t)\in R^{n+1}\setminus\overline{Q}_0$ (а значить, невідомі $F_1\in D'(\overline{Q}_1)$, $F_{2T}\in D'(\overline{\Omega}_0)$ визначаються із (7)).

Подібно до попередніх доводяться такі теореми.

Теорема 4. *Нехай* $F_0\in Z'(\overline{Q}_0)$, $F_{Q_1}\in D'(\overline{Q}_1)$, $F_2\in D'(\overline{\Omega}_0)$. *Існує единий розв'язок другої узагальненої крайової задачі* $u(x,t)\in D'(\overline{Q}_0)$. *Він визначається формулою* (5), *де*

$$\langle g, F_1\rangle = \langle \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi_g(x,t)\,\mathcal{E}(x,t;\,y,\tau)\,dx, F_{Q_1}\rangle + \left(\int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi_g(x,t)\,\mathcal{E}(x,t;\right.$$

$$\left. y,\tau)\,dx,\ F_0\right) - \left[\int_0^T dt \int_{\Omega_1} \varphi_g(x,t)\,\mathcal{E}(x,t;\,y,0)\,dx, F_2\right],$$

$$g\in D(\overline{Q}_0),$$

φ_g — *розв'язок інтегрального рівняння*

$$\frac{1}{2}\,\varphi(y,\tau) + \int_\tau^T dt \int_{\Omega_1} \varphi(x,t)\,C_{y,\tau}\mathcal{E}(x,t;\,y,\tau)\,dx = g(y,\tau),$$

$F_{2T}\in D'(\overline{\Omega}_0)$ *визначається формулою* (9).

Введемо $X_2(\overline{Q}_0) = \{\varphi\in D(\overline{Q}_0) : C\varphi|_{Q_1} = 0,\ D_t^k\varphi|_{t=T} = 0,\ k = 0, 1, \ldots\}$.

Теорема 5. *Нехай* $F_0\in Z'(\overline{Q}_0)\cap X_2'(\overline{Q}_0)$, $F_{Q_1}\in D'(\overline{Q}_1)$, $F_2\in D'(\overline{\Omega}_0)$, $u(x,t)$ — *розв'язок другої узагальненої крайової задачі. Тоді* $u(x,t)$ *задовольняє також умову*

$$(L^*\psi, u) = (\psi, F_0) + \langle\psi, F_{Q_1}\rangle + [\psi(x,0), F_2],\ \psi\in X_2(\overline{Q}_0), \tag{18}$$

тобто є розв'язком другої узагальненої крайової задачі в сенсі (18) [12] *і навпаки.*

Аналогічні результати справедливі для інших крайових задач, внутрішніх і зовнішніх, у тому числі із мішаними крайовими умовами.

У випадку постійних коефіцієнтів рівняння $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}(x-\xi,\ t-\tau)$ і операція «композиції» $\circledast$ із фундаментальною функцією співпадає з операцією згортки. Відомо [1], що $\mathcal{E}*F\in D'_+$ при $\mathcal{E}, F\in D'_+$. Аналогічні твердження справедливі для операції «композиції».

Лема 2. *Якщо* $F\in Z'(R^1)$, $f(x,y)\in D'\cap C_y^\infty$ *і дорівнює нулеві при* $x<0$, *то* $f(x,y)\circledast F(y)\in D'_+(R^1)$.

Позначимо через $D'_+(R^{n+1})\,(Z'_+(R^{n+1}))$ клас узагальнених функцій $F(x,t)$, які належать $D'(R^{n+1})\,(Z'(R^{n+1}))$ і дорівнюють нулеві при $t<0$.

Лема 3. *Якщо* $F\in Z'_+(R^{n+1})$, $f(x,t;y,\tau)\in D'\cap C_{y,\tau}^\infty$ *і дорівнює нулеві при* $t<\tau$, *то* $f(x,t;y,\tau)\circledast F(y,\tau)\in D'_+(R^{n+1})$.

Твердження лем 2, 3 випливають із означення просторів і операції.

У [14] розглянуто деякі прямі і обернені крайові задачі для параболічної системи з постійними коефіцієнтами у півсмузі. Оскільки використана там теорема про представлення розв'язку є частинним випадком теореми 1, то тепер на підставі теореми 1 можна поширити отримані в [14] результати на випадок рівняння (чи системи) із змінними нескінченно диференційованими коефіцієнтами, а отримані у [14] для знаходження невідомих розподілів системи рівнянь у згортках замінити певними системами інтегральних рівнянь Вольтера у класі гладких функцій. Розглянемо для прикладу одну некласичну крайову задачу.

Постановка задачі. Нехай $\Omega_0 = (h; 0)$, $F_0 \in Z'(\overline{Q}_0)$, $g(t), q(t) \in D'(\overline{Q}_{1h})$. Знайти роз'язок $u(x, t) \in D'(\overline{Q}_0)$ і невідомі $g_1(t)$, $q_1(t) \in D'(\overline{Q}_{10})$, які задовольняють у Q_0 рівняння

$$Lu \equiv u_t - (a(x, t) u_x)_x - b(x, t) u_x - c(x, t) u = F_0(x, t)$$

і умови $u(h, t) = q(t)$, $u(0, t) = q_1(t)$, $a(h, t) u_x(h, t) + \mu_1(t) u(h, t) = g(t)$, $a(0, t) u_x(0, t) + \mu_2(t) u(0, t) = g_1(t)$, $u(x, 0) = 0$ ($Q_{10} = \{0\} \times (0; \infty)$, $Q_{1h} = \{h\} \times (0; \infty)$), тобто знайти розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ із $D'_+(R^2)$ рівняння вигляду (4), а саме

$$L\tilde{u} = F,$$

$$F = F_0 - [a(x, t) \cdot b'(x - h) + (b(x, t) - \mu_1(t)) \cdot \delta(x - h)] \cdot q(t) +$$
$$+ [a(x, t) \cdot \delta'(t) + (b(x, t) - \mu_2(t)) \cdot \delta(x)] \cdot q_1(t) - g(t) \cdot \delta(x - h) +$$
$$+ g_1(t) \cdot \delta(x), \qquad (19)$$

який дорівнює нулеві поза $\overline{Q}_0$.

Зауважимо, що $\tilde{u}(x, t) \in D'_+(R^2)$ (за лемою 3). За теоремою 1 розв'язок рівняння (19)

$$\tilde{u}(x, t) = \mathcal{E}(x, t; y, \tau) \circledast F(y, \tau),$$

$$\tilde{u}(x, t) = -\langle \frac{\partial}{\partial y} (a(y, \tau) \mathcal{E}(x, t; y, \tau))_{y=0} - (b(0, \tau) - \mu_2(\tau)) \mathcal{E}(x, t; 0, \tau), q_1(\tau)\rangle +$$
$$+ \langle \frac{\partial}{\partial y} (a(y, \tau) \mathcal{E}(x, t; (y, \tau))_{y=h} - (b(h, \tau) - \mu_1(\tau)) \mathcal{E}(x, t; h, \tau), q(\tau)\rangle +$$
$$+ \langle \mathcal{E}(x, t; 0, \tau), g_1(\tau)\rangle - \langle \mathcal{E}(x, t; h, \tau), g(\tau)\rangle + (\mathcal{E}(x, t; y, \tau), F_0(y, \delta)),$$
$$(x, t) \overline{\in} \overline{Q}_0, \qquad (20)$$

і визначається однозначно у класі функцій $Z'_+(R^2)$. Підставляючи (20) в умови $\lim\limits_{x \to h-} \tilde{u}(x, t) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} \tilde{u}(x, t) = 0$ (еквівалентні рівності нулеві $\tilde{u}(x, t)$ при $x < h$ і $x > 0$ відповідно) і виконуючи перетворення, як вище, для знаходження $g_1(t)$ і $q_1(t)$ отримаємо систему двох інтегральних рівнянь Вольтерра.

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1979.— 320 с.
2. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 128—131.
3. *Житарашу Н. В.* Теоремы об изоморфизмах в L_2-теории слабых решений параболических граничных задач // Докл. АН СССР.— 1981.— 260, № 5.— С. 1054—1058.
4. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач.— Киев : Вища шк., 1990.— 200 с.
5. *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.—371 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
7. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Мат. сб.— 1969.— 78, № 3.— С. 446—472.

8. *Ройтберг Я. А.* Гиперболические задачи в полной шкале пространств типа соболевских // Функцион. и числ. методы мат. физики.— 1988.— Вып. 00.— С. 191—196.
9. *Лопушанская Г. П.* О некоторых свойствах решений нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 11.— С. 1487—1494.
10. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Там же.— 1986.— 38, № 6.— С. 795—798.
11. *Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в пространстве обобщенных функций.— Львов, 1986.— 12 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 2358-Ук86.
12. *Лопушанська Г. П.* Розв'язок другої крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку у просторі узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 1986.— Вип. 25.— С. 17—21.
13. *Лопушанская Г. П.* Решение первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в пространстве обобщенных функций // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1987.— № 26.— С. 3—7.
14. *Лопушанская Г. П.* О решении некоторых классов обратных краевых задач в пространстве распределений.— Львов, 1990.— 12 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 48-Ук90.

Получено 01.10.90