УДК 519.41/47

В. А. КРЕКНИН, А. В. СПИВАКОВСКИЙ, кандидаты физ.-мат. наук,
В. Ф. МАЛИК, ст. преп. (Херсон. пед. ин-т)

Об одном аналоге подгруппы Фраттини

Доказано необходимое и достаточное условие существования в конечной p-группе G, $p > 2$, такой циклической подгруппы X, что всякая подгруппа, содержащая X, имеет дополнение в G.

Доведена необхідна і достатня умова існування в скінченній p-групі G, $p > 2$, такої циклічної підгрупи X, що всяка підгрупа, яка містить в собі X, має доповнення в G.

В настоящей работе изучаются конечные p-группы, $p > 2$, в которых дополняемы все подгруппы, содержащие заданную циклическую подгруппу X. Рассматриваемый вопрос находится в русле исследований групп, имеющих сепарирующие подгруппы [1—3]. Аналогичные задачи изучались другими авторами. Так, А. П. Петравчук [4] исследовал конечные непримарные группы, в которых дополняемы все подгруппы, содержащие хотя бы одну силовскую подгруппу. Н. М. Сучков получил полное описание локально конечных групп, в которых дополняемы все подгруппы, имеющие нетривиальное пересечение с некоторой фиксированной подгруппой [5].

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть G — конечная p-группа, $p > 2$, X — ее циклическая подгруппа. Любая подгруппа из G, содержащая X, дополняема во всей группе тогда и только тогда, когда G представима в виде произведения подгруппы X на элементарную абелеву подгруппу A.*

Достаточное условие теоремы очевидно. Несмотря на кажущуюся естественность необходимого условия, его доказательство довольно трудоемко. Заметим, что максимальная подгруппа M группы G, содержащая элементарную абелеву подгруппу A, порождается всеми подгруппами группы G, не имеющими дополнения в G. В этом смысле подгруппа M является аналогом подгруппы Фраттини (см. также [6]).

Введем теперь некоторые обозначения: x — образующая подгруппы X; p^s, $s \geqslant 2$, — порядок подгруппы X; $y = x^{p^{s-1}}$; $w = x^{p^{s-2}}$; очевидно $y = w^p$; G_k — k-й член нижнего центрального ряда группы G; A — элементарная абелева подгруппа; $H = \langle x^p \rangle A$.

Установим некоторые свойства конечных p-групп, представимых в виде произведения циклической подгруппы на элементарную абелеву.

Л е м м а 1. *Пусть $G = AX$. Тогда H — характеристическая подгруппа группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — контрпример минимального порядка к лемме. Если бы G была абелевой группой, то все элементы группы G порядка, делящего p^{s-1}, принадлежали бы подгруппе H, и H была бы характеристической подгруппой группы G. Таким образом, G является неабелевой группой. Обозначим через Z центр группы G. Если $g \in Z$, $g = x^v a$, то $a \in Z$ и $x^v \in Z$. Поэтому $Z = \langle x^{p^m} \rangle A_1$, где $A_1 = Z \cap A$, $m > 0$. Предположим, что $m > 1$ и рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z$; $\overline{G} = \langle \overline{x} \rangle \overline{A}$, где $\overline{x}$ и $\overline{A}$ — образы элемента x и подгруппы A в фактор-группе $\overline{G}$. При $m > 1$ подгруппа $\langle \overline{x}^p \rangle \overline{A}$ будет собственной подгруппой в фактор-группе $\overline{G}$, и в силу минимальности группы G указанная подгруппа является характеристической подгруппой в G. Тогда ее полный прообраз $\langle x^p \rangle A$ — характеристическая подгруппа группы G, что противоречит предположению. Пусть $m = 1$. Тогда $x^p \in Z$ и H — абелева подгруппа. Поскольку H не является характеристической подгруппой, то существует автоморфизм f, действующий на группе G, такой, что $f(H) \neq H$. Из равенства $[G:H] = p$ следует, что подгруппа $\langle H : f(H) \rangle = G$. Пусть $D = H \cap f(H)$; тогда $D \subseteq Z$ и $[H:D] = p$. Следовательно, $[G:D] = p^2$ и $D = Z$. Пусть $g \in H$, $f(g) \notin H$. Тогда $f(g) = x^i a$, где $(i, p) = 1$, $a \in A$. Так как $[G:D] = p^2$, то $\overline{G}$ — абелева группа. Поэтому G — регулярная p-группа. Следовательно [7], $(x^t a)^t = x^{tt} a^t g_1^t g_2^t \dots g_r^t$, где $t = p^{s-1}$, $g_k \in G_2 \subset Z$. Так как $Z \subset H$, то $g_k^t = e$, $g^t = e$, однако $(f(g))^t = x^{tt} \neq e$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть G — группа, удовлетворяющая условию леммы 1. Тогда подгруппы $\langle x^{p^i} \rangle A$, $i = 1, 2, 3, \dots, s-1$, являются характеристическими подгруппами группы G.*

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Коммутант группы G, удовлетворяющей условию леммы 1, содержится в подгруппе $\langle y \rangle A$.*

Доказательство. Фактор-группа группы G по характеристической подгруппе $\langle y \rangle A$ является циклической.

Лемма 2. *Справедливо одно из следующих утверждений:*

1. *Подгруппа $\langle y \rangle A$ элементарная абелева.*
2. *A — характеристическая подгруппа группы G.*
3. *В A существует максимальная подгруппа A_1, характеристическая во всей группе G и содержащаяся в центре подгруппы $\langle y \rangle A$.*

Доказательство. Если $\langle y \rangle A$ — неабелева группа и A не является характеристической подгруппой группы G, то A не является характеристической в подгруппе $\langle y \rangle A$ (следствие 1). Следовательно, существует автоморфизм f группы $\langle y \rangle A$ такой, что $f(A) \neq A$. Так как A имеет в $\langle y \rangle A$ индекс p, то $A \cdot f(A) = \langle y \rangle A$. Из абелевости A вытекает, что $A \cap f(A) = D$, $D \subset Z$, где Z — центр группы $\langle y \rangle A$. В силу соотношений $[A : D] = p$, $[\langle y \rangle A : A] = p$ и неабелевости подгруппы $\langle y \rangle A$, D является центром подгруппы $\langle y \rangle A$. Итак, D — характеристическая подгруппа группы $\langle y \rangle A$, имеет в последней индекс p и $A_1 = D$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Коммутант группы G, удовлетворяющей условию леммы 1,— элементарная абелева группа.*

Доказательство. Обозначим через T подгруппу $\langle y \rangle A$. Лемма очевидна как в случае, когда T — элементарная абелева группа, так и в случае, когда A — характеристическая подгруппа группы G. Остается рассмотреть случай, когда в A содержится подгруппа A_1 индекса p, которая является характеристической в группе G. В силу леммы 2 A_1 — центр подгруппы T. Рассмотрим подгруппу $F = A_1 \times \langle y \rangle$. Так как A_1 имеет индекс p в группе T, то фактор-группа T/A_1 абелева, и коммутант T' группы T содержится в A_1, т. е. T содержится в $N_G(F)$. Очевидно также, что циклическая подгруппа X содержится в $N_G(F)$. Поэтому F — инвариантная подгруппа группы G. Пусть $a \in (T \setminus F) \cap A$. Тогда фактор-группа G/F порождается элементами $\bar{x}$ и $\bar{a}$, которые являются образами элементов x и a. Очевидно, подгруппа T/F инвариантна в G/F и изоморфна циклической подгруппе $\langle \bar{a} \rangle$ порядка p. Следовательно, элемент $\bar{a}$ содержится в центре фактор-группы G/F. Поэтому фактор-группа G/F абелева, и коммутант G' группы G содержится в элементарной абелевой группе F. Лемма доказана.

Отметим один очевидный факт, который используется в дальнейшем: если B — подгруппа группы G, M — дополнение к B в группе G и N — подгруппа в B, $N \triangle G$, то $\bar{M}$—дополнение к подгруппе $\bar{B}$ в фактор-группе $\bar{G} = G/N$; здесь $\bar{B}$ и $\bar{M}$ — образы подгрупп B и M в фактор-группе $\bar{G}$.

Лемма 4. *Любое дополнение к подгруппе X в группе G из леммы 1 содержится в $\langle y \rangle A$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Пусть G — минимальный контрпример к лемме и U — дополнение к циклической подгруппе X, $U \not\subset \langle y \rangle A$.

Рассмотрим сначала случай $s > 2$. В этом случае подгруппа $\langle x^p \rangle A$ также удовлетворяет условию леммы 1. В силу минимальности группы G $U \subset \langle x^p \rangle A$. Следовательно, в подгруппе U существует элемент u такой, что $u = x^i a$, где $(i, p) = 1$, $a \in A$. Тогда $u^p = x^{ip} a^p h$, где $h \in G'$, G' — коммутант группы G. Так как a принадлежит элементарной абелевой группе A, то $a^p = e$, $u^p = x^{ip} h$, $u^p \in G'X$. В силу следствия 2 к лемме 1 $h \in \langle y \rangle A$. Из условия $s > 2$ вытекает $x^{ip} \in \langle y \rangle$. Поэтому $h \in \langle y \rangle$, так как в противном случае $u^p \in U \cap X$, $u^p = x^{ip} h \neq e$, что противоречит соотноше-

$UV \subset \langle y \rangle A$. По предположению V содержится в центре подгруппы $\langle y \rangle A$; поэтому $UV = U \times V$. Кроме того, $U \times V \triangle \langle y \rangle A$, так как $| U \times V| = |G| : |X|$, $|\langle y \rangle A| = (|G| : |X|) \cdot p$, т. е. $U \times V$ — максимальная подгруппа p-группы $\langle y \rangle A$. Из изложенного следует, что подгруппа Фраттини Φ группы $U \times V$ инвариантна в $\langle y \rangle A$. Очевидно также, что $\Phi \subset U$. Если бы $\Phi \neq \{e\}$, то $\Phi \cap V \neq \{e\}$. Однако $\Phi \cap V \subset U \cap V = \{e\}$, т. е. $\Phi = \{e\}$, и группа $U \times V$ элементарная абелева. Итак, циклическая подгруппа X имеет в G элементарное абелево дополнение $U \times V$. Для рассмотренного случая теорема доказана.

2. Рассмотрим случай, когда $Z \cap X \neq \{e\}$, т. е. $y \in Z$. Обозначим через $\overline{G}$ фактор-группу $G/\langle y \rangle$. Тогда в силу минимальности группы G в фактор-группе $G/\langle y \rangle$ существует элементарное абелево дополнение $\overline{V}$ к подгруппе $\overline{X}$; $\overline{G} = \overline{V} \cdot \overline{X}$, $\overline{V} \cap \overline{X} = \{\overline{e}\}$. Обозначим через F подгруппу $G'X$. Снова в силу минимальности группы G, $F = AX$, $A \cap X = \{e\}$. Так как $y \in X$, то $\overline{F} = \overline{A} \cdot \overline{X}$, $\overline{A} \cap \overline{X} = \{\overline{e}\}$; здесь $\overline{F}$ — образ подгруппы F в группе $\overline{G}$. Положим $\overline{V}_1 = \overline{V} \cap \overline{F}$. Тогда $\overline{V}_1$ — дополнение к $\overline{X}$ в группе $\overline{F}$. В силу леммы 4 $\overline{V}_1 \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{A}$, так как в группе $\overline{G}$ роль y играет элемент $\overline{w}$. Если $\overline{g} \in (\langle \overline{w} \rangle \overline{V}) \cap \overline{F}$, то $\overline{g} \in \langle \overline{w} \rangle \overline{A}$. В самом деле, в этом случае $\overline{g} = \overline{v}\overline{w}^t = \overline{a}\overline{x}^r$, где $\overline{v} \in \overline{V}$, $\overline{a} \in \overline{A}$. Поэтому $\overline{v} = \overline{a}\overline{x}^r\overline{w}^{-t} \in \overline{V} \cap \overline{F}$, т. е. $\overline{v} \in \overline{V}_1 \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{A}$. Отсюда следует, что r делится на p^{s-2}, и $\overline{g} \in \langle \overline{w} \rangle \overline{A}$. В силу следствия 2 к лемме 1 $\overline{G}' \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{V}$, а следовательно, $\overline{G}' \subset (\langle \overline{w} \rangle \overline{V}) \cap \overline{F} = \langle \overline{w} \rangle \overline{A}$. Итак, $\overline{G}' \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{A}$, и значит, $G' \subset \langle w \rangle A$. Обозначим через U дополнение к AX в группе G. Тогда $U(\langle w \rangle A)$ — инвариантная подгруппа группы G, так как $U(\langle w \rangle A)$ содержит коммутант группы G. Пусть N — нижний слой центра группы $U(\langle w \rangle A)$. Очевидно, N — нормальная подгруппа группы G. Обозначим через B дополнение к подгруппе NX в группе G. Из инвариантности N следует, что BN — подгруппа в G и $\overline{BN}$ — дополнение к циклической подгруппе $\overline{X}$ в фактор-группе $\overline{G}$. Следовательно, $\overline{BN} \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{V}$. Далее, так как $\langle y \rangle A$ является характеристической подгруппой в AX, то $\langle y \rangle A$ инвариантна в G и $\langle y \rangle A$ перестановочна с U. Если $D = U(\langle y \rangle A)$, то $\overline{D}$ — дополнение к $\overline{X}$ в фактор-группе $\overline{G}$; в самом деле, если $\overline{d} \in \overline{D} \cap \overline{X}$, то $d = x^r = uay^t$, где $u \in U$, $a \in A$. Поэтому $uay^tx^{-r} = e$, т. е. $u = e$, $ay^tx^{-r} = e$, а значит, $a = e$, $y^tx^{-r} = e$, или $y^t = x^{-r}$. Но тогда $d = y^t$, $\overline{d} = \overline{e}$. Равенство $\overline{G} = \overline{D}\overline{X}$ очевидно. Итак, $\overline{D}$ — дополнение к $\overline{X}$ в группе $\overline{G}$. В силу леммы 4 $\overline{D} \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{V}$. Итак, $\overline{BN} \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{V}$ и $\overline{D} \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{V}$; подгруппа $\overline{D}$ имеет индекс p в группе $\langle w \rangle \overline{V}$. Действительно, $|\langle \overline{w} \rangle \overline{V}| = p \cdot |\overline{V}| = p(|\overline{G}| : |\overline{X}|)$; $|\overline{D}| = |\overline{G}| : |\overline{X}|$, так как $\overline{D}$ — дополнение к $\overline{X}$ в $\overline{G}$. Отсюда следует, что $\overline{BN} \subset \langle \overline{w} \rangle \overline{D}$, или $BN \subset U(\langle w \rangle A)$. Поэтому $BN = B \times N$, так как N содержится в центре подгруппы $U(\langle w \rangle A)$. Кроме того, $B \times N$ имеет индекс p в подгруппе $U(\langle w \rangle A)$, и, следовательно, $B \times N \triangle U(\langle w \rangle A)$. Как и при доказательстве первой части необходимого условия теоремы, можно показать, что $B \times N$ — элементарная абелева группа. Пусть N_1 — дополнение к циклической подгруппе $\langle y \rangle$ в N. Покажем, что $B \times N_1$ — элементарное абелево дополнение к циклической подгруппе X в группе G. Действительно, равенство $(B \times N_1) X = G$ очевидно. Пусть $g \in (B \times N_1) \cap X$; тогда $g = bh = x^r$, $b \in B$, $h \in N_1$; отсюда следует, что $b = x^r h^{-1}$, или $b = e$, $x^r h^{-1} = e$, так как $B \cap (NX) = \{e\}$. Из равенства $x^r h^{-1} = e$ получаем $x^r = h = e$, так как $h \in N_1 \cap X = N_1 \cap \langle y \rangle = \{e\}$. Итак, $B \times N_1$ — элементарное абелево дополнение к циклической подгруппе X в группе G. Необходимое условие теоремы полностью доказано.

1. *Черников С. Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 6—14.
2. *Спиваковский А. В.* Строение конечных групп, имеющих C-сепарирующие подгруппы.— Киев, 1984.— 63 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.13).
3. *Крекнин В. А., Спиваковский А. В.* Об одном классе групп, имеющем C-сепарирующие подгруппы // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 6.— С. 729—733.
4. *Петравчук А. П.* Конечные UH-группы с абелевыми силовскими подгруппами // VIII

Всесоюзн. симп. по теории групп: Тез. докл. (Суммы, 25—27 мая 1982 г.).— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 93—94.
5. *Сучков Н. М.* О группах, в которых дополняются подгруппы в зависимости от пересечения с данной // Там же.— С. 124.
6. *Ведерников В. А.* О конечных группах, близких к вполне факторизуемым // Там же.— С. 20.
7. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 486 с.

Получено 14.09.90