УДК 517.982

М. И. Островский

Сравнение топологий, порожденных геометрическим и операторным растворами подпространств

Настоящая работа посвящена сравнению топологий, порожденных на множестве $G(X)$ всех замкнутых подпространств бесконечномерного банахова пространства X геометрическим раствором Θ Крейна — Красносельского — Мильмана и операторным раствором r Массеры — Шеффера (определения см. в [1, с. 32, 33, 46]). Будучи эквивалентны метрикам (см. [1, с. 33, 34, 46]), эти растворы порождают топологии на $G(X)$, которые обозначим $(G(X), \Theta)$ и $(G(X), r)$ соответственно. Известно [2], что топология $(G(X), r)$ мажорирует топологию $(G(X), \Theta)$, а в случае, когда X — гильбертово, эти топологии совпадают. В [3] указано достаточное условие на X, обеспечивающее различие топологий. В настоящей работе приведено достаточное условие иного характера, имеющее, по мнению автора, то преимущество, что из него следует различие топологий для всех пространств, кроме «почти гильбертовых».

Положим $p(X) = \sup\{p : X$ имеет тип $p\}$, $q(X) = \inf\{q : X$ имеет котип $q\}$ (определения типа и котипа см. [4, с. 51]). Напомним, что $1 \leqslant p(X) \leqslant 2$, $2 \leqslant q(X) \leqslant \infty$, и, что по теореме Кванeня [4, с. 153] пространство X, имеющее тип 2 и котип 2, изоморфно гильбертову.

Теорема. *Если $p(X) \neq 2$ или $q(X) \neq 2$, то топология $(G(X), r)$ строго мажорирует топологию $(G(X), \Theta)$.*

Следствие. *Топология $(G(X), r)$ строго мажорирует топологию $(G(X), \Theta)$ для $X = C(\Omega)$, где Ω — компакт, и для $X = L_p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p \neq 2$.*

Для случаев $X = C[0, 1]$, $X = L_p[0, 1]$, $1 < p < 2$, этот результат был получен в [3].

Для вывода следствия из теоремы достаточно воспользоваться известными оценками типов и котипов [4, с. 51, 52]: $p(C(\Omega)) = 1$, $q(C(\Omega)) = \infty$, $p(L_p) = \min(2, p)$, $q(L_p) = \max(2, p)$. Таким образом, во всех классических пространствах, неизоморфных гильбертову, топология, порожденная операторным раствором, строго мажорирует топологию, порожденную геометрическим.

Доказательство теоремы разобьем на два этапа. Первый — предложение 1 — «склеивание» бесконечномерных пространств $\{W_j\}_{j=0}^{\infty}$, для которых

$$r(W_0, W_j) \nrightarrow 0, \quad \Theta(W_0, W_j) \to 0 \text{ при } j \to \infty, \tag{1}$$

из конечномерных «кусков». Второй — предложение 2 — построение подходящих конечномерных «кусков» в пространствах, удовлетворяющих условию теоремы. При этом используем терминологию и обозначения работ [4, 5], большими латинскими буквами обозначим банаховы пространства, через $d(X, Y)$ — дистанцию Банаха — Мазура, через $\Sigma(X)$ — единичную сферу банахова пространства X.

Предложение 1. *Пусть X таково, что*

$$(\exists \gamma > 1)(\forall Y \subset X)(\forall \varepsilon > 0)\ (\operatorname{codim} Y < \infty) \Rightarrow ((\exists Z_1, Z_2 \subset Y)(\dim Z_1 + \\ + \dim Z_2 < \infty) \wedge (\Theta(Z_1, Z_2) < \varepsilon) \wedge (d(Z_1, Z_2) > \gamma)).$$

Тогда $(G(X), r)$ строго мажорирует $(G(X), \Theta)$.

Доказательство. Построим последовательность подпространств в X, удовлетворяющих условию (1). Пусть числа $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ таковы, что $\delta_i > 0$ и $\Delta = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + 2\delta_i) < \infty$. Возьмем $Y_1 = X$, $\varepsilon_1 = 1$. Согласно предположению найдутся конечномерные $Z_1^1, Z_2^1 \subset Y_1$ с $\Theta(Z_1^1, Z_2^1) < \varepsilon_1$, $d(Z_1^1, Z_2^1) > \gamma$. Рассмотрим δ_1-сеть $\{y_i\}_{i=1}^{n_1}$ на $\Sigma(\operatorname{span}(Z_1^1 \cup Z_2^1))$ и функционалы $\{y_i^*\}_{i=1}^{n_1} \subset \Sigma(X^*)$ такие, что $y_i^*(y_i) = 1$. Положим $Y_2 = (\{y_i^*\}_1^{n_1})^{\text{т}}$ (пересечение ядер функционалов y_i^*), $\varepsilon_2 = 1/2$. Для них в свою очередь найдутся такие конечномерные $Z_1^2, Z_2^2 \subset Y_2$, что $\Theta(Z_1^2, Z_2^2) < \varepsilon_2$, $d(Z_1^2, Z_2^2) > \gamma$. Рассмотрим δ_2-сеть $\{y_i\}_{i=1}^{n_2}$ на $\Sigma\left(\operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^{2}(Z_1^i \cup Z_2^i)\right)\right)$ и функционалы $\{y_i^*\}_{i=1}^{n_2} \subset \Sigma(X^*)$ такие, что $y_i^*(y_i) = 1$. Далее берем $Y_3 = (\{y_i^*\}_{i=1}^{n_2})^{\text{т}}$, $\varepsilon_3 = 1/3$ и т. д. Рассмотрим пространство $V = \overline{\operatorname{span}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z^i\right)$, где $Z^i = \operatorname{span}(Z_1^i \cup Z_2^i)$.

Повторяя рассуждения из [5, с. 4], доказываем, что пространства Z^i образуют конечномерное разложение пространства V. Это означает, что любой вектор $z \in V$ единственным образом разлагается в сильно сходящийся ряд $z = \sum_{i=1}^{\infty} z^i$, $z^i \in Z^i$. Пусть $\pi_{k,n}$, $k \leqslant n$, — операторы на V, заданные равенствами $\pi_{k,n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} z^i\right) = \sum_{i=k}^{n} z^i$. Рассуждениями, аналогичными проведенным в [5, с. 5], показываем, что операторы $\pi_{k,n}$ ограничены и $\sup_{k,n}\|\pi_{k,n}\| \leqslant 2\Delta < \infty$. Поэтому $|||z||| = \sup_{k,n}\|\pi_{k,n} z\|$ является эквивалентной нормой на V. Продолжая ее принадлежащим Пелчинскому [6] (предложение 1) способом на все X, получаем новую норму в X, которая на Z^i, $i = 1, 2, \ldots$ ..., совпадает с исходной и, кроме того, обладает следующим свойством:

$\forall m_2 > m_1 > n_1 > n_2$, $\forall (z^i)_{i=n_2}^{m_2}$, $z^i \in Z^i$ имеет место неравенство

$$||| \sum_{i=n_2}^{m_2} z^i ||| \geqslant ||| \sum_{i=n_1}^{m_1} z^i |||. \qquad (2)$$

Ясно, что различие топологий достаточно доказывать для X с нормой $|||\cdot|||$. Искомой последовательностью подпространств будут следующие: $W_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus Z_1^i$; $W_j = \left(\sum_{i \neq j} \oplus Z_1^i\right) \oplus Z_2^j$.

Покажем, что

$$\Theta(W_j, W_0) < \varepsilon_j \to 0 \text{ при } j \to \infty. \qquad (3)$$

В самом деле, пусть $z \in \Sigma(W_j)$, $z = z_2^j + \sum_{i \neq j} z_1^i$. В силу (2) имеем $||| z_2^j ||| \leqslant 1$. Воспользовавшись тем, что на Z^j новая норма совпадает с исходной, и, следовательно, неравенство $\Theta(Z_1^j, Z_2^j) < \varepsilon_j$ сохраняется, находим вектор $z_1^j \in Z_1^j$ такой, что $||| z_1^j - z_2^j ||| < \varepsilon_j$. Для вектора $\tilde{z} = \sum_{i=1}^{\infty} z_1^i$ имеем $\tilde{z} \in W_0$, $||| \tilde{z} - z ||| < \varepsilon_j$. Аналогичные рассуждения можно провести и для $\tilde{z} \in \Sigma(W_0)$. Тем самым (3) доказано.

То, что $r(W_0, W_j) \not\to 0$, будем доказывать от противного. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность ограниченных линейных операторов в X, удовлетворяющих условиям:

I) $||| \iota - \varphi_j ||| \to 0$ (ι — тождественный оператор в X);

II) $\varphi_j(W_j) = W_0$.

Введем операторы $\tau_j : Z_2^j \to Z_1^j$ как сужения операторов $\pi_{j,j}\varphi_j$ на пространства Z_2^j. Для $z_2^j \in Z_2^j$ имеем $\varphi_j(z_2^j) = \tau_j z_2^j + \sum_{i \neq j} w_1^i$ с некоторыми $w_1^i \in Z_1^i$. Следовательно, в силу (2) $||| z_2^j - \tau_j z_2^j ||| \leqslant ||| (z_2^j - \tau_j z_2^j) + \sum_{i \neq j} w_1^i ||| = ||| z_2^j - \varphi_j z_2^j ||| \leqslant ||| z_2^j |||\ ||| \iota - \varphi_j |||$. Получаем $||| z_2^j - \tau_j z_2^j ||| \to 0$ при $j \to \infty$ равномерно по $z_2^j \in \Sigma(Z_2^j)$. Поэтому, начиная с некоторого j операторы τ_j являются изоморфизмами Z_2^j на Z_1^j, и, кроме того, $||| \tau_j |||\ ||| \tau_j^{-1} ||| \to 1$ при $j \to \infty$. Это противоречит неравенству $d(Z_1^j, Z_2^j) > \gamma > 1$, которое сохраняется и в новой норме, поскольку на Z^j она совпадает с исходной. Предложение доказано.

Предложение 2. *Если $q(X) \neq 2$ или $p(X) \neq 2$, то*

$$\forall \gamma > 1, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists Z_1, \quad Z_2 \subset X, \quad \dim Z_1 + \dim Z_2 < \infty \wedge d(Z_1, Z_2) > \gamma \wedge \Theta(Z_1, Z_2) \leqslant \varepsilon.$$

Лемма. *Пусть $Y \subset X$; ψ — фактор-отображение $X \to X/Y$. Рассмотрим в пространстве $X \oplus_1 (X/Y) = \{(x, z) : x \in X, z \in X/Y, \|(x, z)\| = \|x\|_X + \|z\|_{X/Y}\}$ подпространства $G_0 = Y \oplus_1 (X/Y)$ и $G_\varepsilon = \{(\varepsilon x, \psi x) : x \in X\}$, $1 > \varepsilon > 0$. Имеют место неравенства $d(G_\varepsilon, X) \leqslant (1+\varepsilon)/\varepsilon$, $\Theta(G_0, G_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что отображение $\tau : X \to G_\varepsilon$, заданное равенством $\tau x = (\varepsilon x, \psi x)$, удовлетворяет неравенствам $\|\tau\| \leqslant 1 + \varepsilon$, $\|\tau^{-1}\| \leqslant 1/\varepsilon$. Докажем второе неравенство. Пусть $u \in G_\varepsilon$, $u = (\varepsilon x, \psi x)$. Тогда $\|u\| = \varepsilon\|x\| + \|\psi x\|$. В силу того, что ψ — фактор-отображение, для любого $\delta > 0$ найдется $y_\delta \in \operatorname{Ker}\psi = Y$ такое, что $\|x - y_\delta\| < \|\psi x\| + \delta$. Введем вектор $v_\delta = (\varepsilon y_\delta, \psi x) \in G_0$. Для него имеем $\|u - v_\delta\| < (\|\psi x\| + \delta)\varepsilon$. Отсюда

$$\sup_{u \in \Sigma(G_\varepsilon)} \operatorname{dist}(u, G_0) \leqslant \sup_{u \neq 0} \inf_{\delta > 0} \frac{\|u - v_\delta\|}{\|u\|} \leqslant \sup_{u \neq 0} \inf_{\delta > 0} \frac{\varepsilon(\|\psi x\| + \delta)}{\varepsilon\|x\| + \|\psi x\|} \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $v \in G_0$, $v = (y, z)$. Возьмем $x_\delta \in X$ такой, что $z = \psi x_\delta$ и $\| x_\delta \| \leqslant \leqslant \| z \| + \delta$. Введем векторы $u_\delta = (y + \varepsilon x_\delta, z) \in G_\varepsilon$. Имеем

$$\sup_{v \in \Sigma(G_0)} \operatorname{dist}(v, G_\varepsilon) \leqslant \sup_{v \neq 0} \inf_{\delta > 0} \frac{\| v - u_\delta \|}{\| v \|} \leqslant \sup_{v \neq 0} \inf_{\delta > 0} \frac{\varepsilon (\| z \| + \delta)}{\| y \| + \| z \|} \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство предложения 2. Пусть $1 < p = p(X) < 2$, $q = p/(p-1)$. В [7, с. 286] доказано, что существует последовательность пространств $\{X_n\}$, $\dim X_n = n$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\exists \{m(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists \tau_n \in \mathscr{L}(X_n, l_q^{m(n)})$, $\forall x \in X_n$, $\| \tau_n x \| = \| x \|$;

2) для некоторого набора $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ из условия 1 имеет место

$$\forall \alpha, \beta \in (0, \infty) \ \forall \{r(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{N} \ \forall \{\rho_n\}_{n=1}^{\infty} \ (\rho_n \in \mathscr{L}((\tau_n X_n)^{\perp}, l_p^{r(n)}) \wedge$$

$$\wedge (\forall x \in X_n, \quad \alpha \| x \| \leqslant \| \rho_n x \| \leqslant \beta \| x \|)) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \lambda (\rho_n ((\tau_n X_n)^{\perp}), l_p^{r(n)}) = \infty,$$

где $\lambda(Y, X)$ определяется равенством $\lambda(Y, X) = \inf \{ \| \pi \| : \pi$ — проектор X на $Y\}$;

3) $\exists \{s(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$, $\exists \alpha_1, \beta_1 \in (0, \infty)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists \sigma_n \in \mathscr{L}(X_n^*, l_p^{s(n)})$, $\forall x \in X_n^*$, $\alpha_1 \| x \| \leqslant \| \sigma_n x \| \leqslant \beta_1 \| x \|$.

Введем пространства

$$L_n = l_p^{m(n)} \oplus_1 (l_p^{m(n)} / (\tau_n X_n)^{\perp}), \tag{4}$$

где последовательности $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что выполнены условия 1 и 2. Заметим, что второе слагаемое в (4) изометрично X_n^*, поэтому из условия 3 и результата [4, с. 85] следует, что найдется последовательность подпространств $M_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $\sup_n d(M_n, L_n) < \infty$. Поэтому искомые Z_1 и Z_2 достаточно построить в каком-нибудь из L_n. Воспользовавшись леммой для $X = l_p^{m(n)}$, $Y = (\tau_n X_n)^{\perp}$, находим G_0^n, $G_\varepsilon^n \subset \subset L_n$ такие, что $\Theta(G_0^n, G_\varepsilon^n) \leqslant \varepsilon$; $d(l_p^{m(n)}, G_\varepsilon^n) \leqslant (1 + \varepsilon)/\varepsilon$. Из условия 2 и равенства $G_0 = (\tau_n X_n)^{\perp} \oplus_1 (l_p^{m(n)} / (\tau_n X_n)^{\perp})$ заключаем, что $d(l_p^{m(n)}, G_0^n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Так как $d(G_0^n, G_\varepsilon^n) \geqslant d(l_p^{m(n)}, G_0^n) / d(l_p^{m(n)}, G_\varepsilon^n)$, то, выбирая n достаточно большим, получаем $d(G_0^n, G_\varepsilon^n) > \gamma$. Поэтому в качестве Z_1 и Z_2 можно взять соответствующие G_ε^n и G_0^n.

В случае $p(X) = 1$ пользуемся тем, что построенные выше Z_1 и Z_2 можно с помощью теоремы М. И. Кадеца [4, с. 50] вложить в X.

Рассмотрим случай $q = q(X) > 2$. Воспользуемся тем, что для $p = = q/(q-1)$ ($p = 1$ в случае $q = \infty$) имеет место следующее утверждение [4, с. 21, 23]: найдется $\alpha > 0$ такое, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ в l_p^n найдется подпространство Y_n с $\dim Y_n = [\alpha n]$ (целая часть) и $d(Y_n, l_2^{[\alpha n]}) < 2$. При этом, если подпространства $Y_{k(n)} \subset l_q^n$ таковы, что $\dim Y_{k(n)} / n^{2/q} \to \infty$ при $n \to \infty$ ($\dim Y_{k(n)} / \ln n \to \infty$ в случае $q = \infty$), то и

$$d(Y_{k(n)}, l_2^{t(n)}) \to \infty, \quad \text{при } n \to \infty, \tag{5}$$

где $t(n) = \dim Y_{k(n)}$. Отсюда следует, что в l_q^n найдутся подпространства X_n коразмерности $[\alpha n]$ такие, что $d(l_q^n / X_n, l_2^{[\alpha n]}) < 2$.

Рассмотрим пространства $L_n = l_q^n \oplus_1 (l_q^n / X_n)$. Воспользовавшись результатом [4, с. 85] и теоремой Дворецкого [4, с. 24], получаем, что в X найдутся подпространства M_n такие, что $\sup_n d(L_n, M_n) < \infty$. Поэтому искомые Z_1 и Z_2 достаточно построить в каком-нибудь из L_n. Для этого воспользуемся леммой с $X = l_q^n$, $Y = X_n$. Получим пространства G_ε^n, $G_0^n \subset L_n$, для которых $d(G_\varepsilon^n, l_q^n) \leqslant (1 + \varepsilon)/\varepsilon$, $\Theta(G_\varepsilon^n, G_0^n) \leqslant \varepsilon$. Так как $G_0^n = X_n \oplus_1 (l_q^n / X_n)$ имеет подпространство l_q^n / X_n, для которого $d(l_q^n / X_n, l_2^{[\alpha n]}) < 2$, то из (5) следует, что $d(G_0^n, l_q^n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Далее рассуждаем так же, как и в первом случае. Предложение доказано.

Теорема следует из предложений 1 и 2 поскольку, как легко видеть, если $Y \subset X$ и $\operatorname{codim} Y < \infty$, то $p(X) = p(Y)$, $q(X) = q(Y)$.

1. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М. : Мир, 1970.— 456 с.
2. *Berkson E.* Some metrics on the subspaces of a Banach space // Pacif. J. Math.— 1963.— **13**, N 1.— P. 7—22.
3. *Гурарий В. И., Маркус А. С.* Исправление к статье «О геометрическом и операторном определениях раствора подпространств» // Мат. исслед.— 1967.— **2**, № 1.— С. 169.
4. *Milman V. D., Schechtman G.* Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces.— Berlin: Springer, 1986.— 156 p.
5. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces.— Berlin: Springer, 1977.— V. 1.— 188 p.
6. *Pelczynski A.* Projections in certain Banach spaces // Stud. math. — 1960. — **19**, N 2.— P. 209—228.
7. *Rosenthal H. P.* On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables // Isr. J. Math.— 1970.— **8**, N 3.— P. 273—303.

Физ.-техн. ин-т низких температур
АН УССР, Харьков

Получено 17.11.86