УДК 517

Ю.-У. ЛЕБУС (Йен. ун-т, Германия)

Классификация границ для диффузии на открытом интервале

Вводится новая классификация границ с целью описать время жизни вблизи границы одномерного строго марковского процесса. Приведены аналитические и вероятностные свойства границ, а также сравнение с известной классификацией.

Щоб описати час життя поблизу границі такого одновимірного марківського процесу, що може обриватись, введено нову класифікацію границь. Наведені аналітичні та ймовірнісні властивості границь, а також порівняння з відомою класифікацією.

1. Введение. В настоящей работе рассматриваются типы границ для строго марковских процессов $X = (X_t, \zeta, P_x)$ на открытом интервале $(r_0, r_1) \subseteq (-\infty, \infty)$ $(0 \in (r_0, r_1))$. В особенности изучаются вероятностная классификация, данная Е. Б. Дынкиным [1], а также классификация посредством производящего оператора процесса $XAf = D_m D^{+f}_{p_{\pi}^-} = D_n (D_s^+ f - \int f dk)$, $f \in \mathcal{D}(A)$ (см. [1], главы 16, 17). Дополнительно к классификации границ, приведенной в [1—4], вводится такая классификация, которая учитывает распределение времени жизни ζ поблизости границы, а также поведение решения уравнения $\lambda f - Af = g$, $\lambda \in (0, \infty)$, в окрестности границы [5, 6].

Для вещественной функции f, определенной на (r_0, r_1), обозначим через $f(r_i)$ предел $\lim\limits_{x \to r_i} f(x)$, если такой существует. В дальнейшем при использовании этого обозначения $f(r_i)$, $i = 0, 1$, подразумевается существование указанного предела.

Пусть r_1 — естественная граница, т. е. $\int\limits_0^{r_i} (n + k)\, ds = \int\limits_0^{r_i} s d(n + k) = \infty$. Если существует $F \in \mathcal{D}(D_m D^{+\cdot}_{p_{\pi}^-})$ с $0 < |F(r_i)| < \infty$ и $(D_m D^{+F}_{p_{\pi}^-})(r_i) = 0$, то r_i называется консервативной границей. Если существует $F \in \mathcal{D}(D_m D^{+\cdot}_{p_{\pi}^-})$ с $|F(r_i)| < \infty$ и $0 < |(D_m D^{+F}_{p_{\pi}^-})(r_i)| < \infty$, то r_i называется убывающей границей. Убывающая граница r_i с $|F(r_i)| > 0$ $(F(r_i) = 0)$ называется слабо (сильно) убывающей. Если же r_i ни консервативная, ни убывающая, то r_i неопределенная граница, $i = 0, 1$. Подробное рассмотрение этих типов границ можно найти в [5, 6], где доказаны теоремы, которые оправдывают введенную выше терминологию.

Теорема 1. *Если r_1 — консервативная или убывающая граница, то для всех $t \in (0, \infty)$ существует предел $\lim\limits_{x \to r_1} P_x(\zeta > 0)$ и выполняется*

$$\lim_{x \to r_1} P_x(\zeta > 0) = \exp(-l_1 t), \quad t \in (0, \infty),$$

где

$$l_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } r_1 \text{ — консервативная граница;} \\ D_m D^{+F}_{p_{\pi}^-})(r_1)/F(r_1), & \text{если } r_1 \text{ — слабо убывающая граница;} \\ \infty, & \text{если } r_1 \text{ — сильно убывающая граница} \end{cases}$$

и F — упомянутая выше функция.

Теорема 2. *Пусть r_1 — естественная граница и g — непрерывная на (r_0, r_1) функция с $0 < g(r_1) < \infty$. Уравнение*

$$\lambda f - D_m D^{+f}_{p_{\pi}^-} = g, \quad \lambda \in (0, \infty),$$

имеет тогда и только тогда решение f с конечным пределом $f(r_1)$, когда r_1 — консервативная или убывающая граница. В этом случае любое в r_1 ограниченное решение f имеет предел $f(r_1)$ и верно соотношение (используя $1/\infty = 0$)

$$f(r_1) = \frac{1}{\lambda + l_1} * g(r_1).$$

В [5, 6] приведены примеры для таких типов границ и легко применимые достаточные условия для определения границ.

Целью настоящей работы является сравнение определенных выше типов границ с известной системой классификации границ.

2. Сравнение различных границ. Установим связь между типами границ, данными в п. 1 и используемыми в [1]. Кроме того, с ними сравним использованную В. Феллером классификацию:

$$\text{достижимая граница, т. е. } \int_0^{r_i} (n+k)\, ds < \infty,$$

$$\text{граница входа, т. е. } \int_0^{r_i} (n+k)\, ds = \infty, \quad \int_0^{r_i} s d(n+k) < \infty,$$

$$\text{естественная граница, т. е. } \int_0^{r_i} (n+k)\, ds = \int_0^{r_i} s d(n+k) = \infty,$$

$$i = 0, 1,$$

и классификацию Дынкина [1]. Доказательства приведены в пп. 3 и 4. В настоящей работе используется терминология монографии [1] (гл. 15, 16).

Теорема 3. *Пусть X — возвратный процесс. Тогда каждая естественная граница является консервативной. Имеют место следующие эквивалентности:*

$$r_1 \text{ — инфинитная граница} \Leftrightarrow r_1 \text{ — естественная граница с } m(r_1) = p(r_1) = \infty,$$

$$r_1 \text{ — слабо финитная граница} \Leftrightarrow r_1 \text{ — естественная граница с } m(r_1) < \infty, \quad p(r_1) = \infty,$$

$$r_1 \text{ — сильно финитная граница} \Leftrightarrow r_1 \text{ — граница входа.}$$

Теорема 4. (ср. с теоремой 16.8 из [1]). *Пусть X — невозвратный процесс. В этом случае нет границы, которая была бы как притягивающей, так и слабо финитной. Кроме того верны следующие эквивалентности:*

$$r_1 \text{ — притягивающая и сильно финитная граница} \Leftrightarrow r_1 \text{ — достижимая граница,}$$

$$r_1 \text{ — сильно отталкивающая и сильно финитная граница} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_1 \text{ — граница входа.}$$

Теорема 5. *Пусть X — невозвратный процесс и r_1 — естественная граница. Имеют место следующие эквивалентности:*

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } r_1 \text{ — притягивающая граница и} \\ \text{инфинитная граница} \\ \text{или} \\ r_1 \text{ — сильно отталкивающая и сла-} \\ \text{бо финитная граница} \\ \text{или} \\ r_1 \text{ — сильно отталкивающая и ин-} \\ \text{финитная граница} \end{array}\right\} \Leftrightarrow r_1 \text{ — консервативная граница;}$$

б) r_1 — слабо отталкивающая и сильно финитная граница $\Leftrightarrow r_1$ — убывающая граница.

С помощью теорем 3—5 легко заметить, что классификация, введенная в п. 1, в основном различает слабо отталкивающие границы.

При условиях

1) существует конечный предел

$$L_1 := \lim_{x \to r_1} -\frac{m(x)}{D_p^+ \dfrac{1}{\pi(x)}}$$

или

2) существует производная Радон—Никодима, а также (не обязательно конечный) предел

$$L_1' := \lim_{x \to r_1} \left(\frac{dk}{dn}\right)(x)$$

возможна более подробная классификация слабо отталкивающих границ.

Теорема 6. *Пусть X — невозвратный процесс и r_1 — слабо отталкивающая граница. Верны следующие эквивалентности:*

а) *из условия* 1 *вытекает эквивалентность*

r_1 — *сильно финитная граница* $\Leftrightarrow r_1$ — *убывающая граница.*

б) *из условия* 2 *вытекают эквивалентности*

r_1 — *сильно финитная граница* $\Leftrightarrow r_1$ — *убывающая граница,*

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \text{ — слабо финитная граница} \\ \text{или} \\ r_1 \text{ — инфинитная граница} \end{array}\right\} \Leftrightarrow r_1 \text{ — консервативная граница.}$$

3. Перевод вероятностных понятий в аналитические. Пусть $1(x) = 1$, $x \in (r_0, r_1)$. Из [1] (17. 11) вытекает, что множества H и S в [1] являются $H(D_m D_{p_\pi^-}^{+\cdot}) = \{h \in \mathcal{D}(D_m D_{p_\pi^-}^{+\cdot}: D_m D_{p_\pi^-}^{+h}(x) = 0,\ x \in (r_0, r_1)\} = \{h : h = \pi(ap + b1),\ a, b \in R\}$ и $\{f \in \mathcal{D}(D_m D_{p_\pi^-}^{+\cdot}) : D_m D_{p_\pi^-}^{+f} = -1\}$.

Легко видеть [6], что при условии $1 \notin H(D_m D_{p_\pi^-}^{+\cdot})$ можно предположить π положительной функцией, для которой $\pi(r_i) > \pi(0) > 0$, и $|p(r_i)| < \infty$, $i = 0, 1$. Кроме того, функция

$$h^0(x) := \pi(x)(p(r_1) - p(x)), \quad x \in (r_0, r_1),$$

$$(h^1(x) := \pi(x)(p(x) - p(r_0)), \quad x \in (r_0, r_1))$$

строго убывает (возрастает). Очевидно, существуют случаи

$$h^0(r_1) = 0, \quad h^1(r_1) < \infty, \tag{1}$$

$$0 < h^0(r_1) < \infty, \quad h^1(r_1) = \infty, \tag{2}$$

$$h^0(r_1) = 0, \quad h^1(r_1) = \infty. \tag{3}$$

Справедливы следующие соотношения [6]:

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^{r_1} k ds < \infty, \tag{4}$$

$$(2) \Leftrightarrow \int_0^{r_1} k ds = \infty, \quad \int_0^{r_1} s dk < \infty, \tag{5}$$

$$(3) \Leftrightarrow \int_0^{r_1} k ds = \int_0^{r_1} s dk = \infty, \tag{6}$$

и

$$(3) \Leftrightarrow -D^{+}_{p_{\pi}^{-}}(r_1) = \infty. \tag{7}$$

Из теоремы 16.2 [1] вытекает, что X — возвратный (невозвратный) тогда и только тогда, когда

$$\pi = 1, \quad -p(r_0) = p(r_1) = \infty, \tag{8}$$

$$(\pi = 1, \min(-p(r_0), p(r_1) < \infty \text{ или } 1 \notin H(D_m D^{+\cdot}_{p_{\pi}^{-}})). \tag{9}$$

Далее верно (см. [1], 17.8 В и теорема 16.3): из $1 \notin H(D_m D^{+\cdot}_{p_{\pi}^{-}})$ вытекает

$$r_1 \text{ — притягивающая граница } \Leftrightarrow (4), \tag{10}$$

$$r_1 \text{ — слабо отталкивающая граница } \Leftrightarrow (6), \tag{11}$$

$$r_1 \text{ — сильно отталкивающая граница } \Leftrightarrow (5). \tag{12}$$

Из $\pi = 1$, $\min(-p(r_0),\ p(r_1) < \infty$ вытекает

$$r_1 \text{ — притягивающая граница } \Leftrightarrow p(r_1) < \infty, \tag{13}$$

$$r_1 \text{ — сильно отталкивающая граница } \Leftrightarrow p(r_1) = \infty. \tag{14}$$

Далее, если предположить $p(r_1) = \infty$ (т. е. (8) или (9) с $\pi = 1$ и $-p(r_0) < < \infty$), то из теоремы 16.2 и 16.6 [1] можно вывести: из $p(r_1) = \infty$ вытекает

$$r_1 \text{ — финитная граница } \Leftrightarrow m(r_1) < \infty, \tag{15}$$

$$r_1 \text{ — инфинитная граница } \Leftrightarrow m(r_1) = \infty. \tag{16}$$

Следует заметить, что в случае $m(r_1) < \infty$ функция $f'(x) := -\int\limits_0^x m\,dp + m(r_1)\,p(x)$, $x \in (r_0, r_1)$, удовлетворяет $D_m D^{+f'}_{p_{\pi}^{-}} = -1$ и соотношению $\lim\limits_{x \to r_1} \frac{f'(x)}{p(x)} = 0$ (т. е. множество S_0 в [1] не пусто, см. [1], теорема 16.6). С другой стороны, из $m(r_1) = \infty$ вытекает, что для любого решения уравнения $D_m D^{+f'}_{p_{\pi}^{-}} = -1$ верно $\lim\limits_{x \to r_1} \frac{f'(x)}{p(x)} = -\infty$ (т. е. S_0 пусто).

Предположим, что $p(r_1) = \infty$, $m(r_1) < \infty$. Соотношение $|\lim\limits_{x \to r_1} f'(x)| = \infty$ верно ($< \infty$) тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^{r_1} p\,dm = \infty$ ($< \infty$). Из этого замечания и из теоремы 16.6 и § 16.10 в [1] можно вывести: из $p(r_1) = \infty$, $m(r_1) < \infty$ вытекает

$$r_1 \text{ — слабо финитная граница } \Leftrightarrow \int\limits_0^{r_1} p\,dm < \infty, \tag{17}$$

$$r_1 \text{ — сильно финитная граница } \Leftrightarrow \int\limits_0^{r_1} p\,dm = \infty. \tag{18}$$

Далее из $p(r_1) < \infty$ (т. е. $1 \notin H(D_m D^{+\cdot}_{p_{\pi}^{-}})$ или $\pi = 1$, $p(r_1) < \infty$) вытекает

$$r_1 \text{ — финитная граница } \Leftrightarrow \int\limits_0^{r_1} m\,dp < \infty, \tag{19}$$

$$r_1 \text{ — инфинитная граница } \Leftrightarrow \int\limits_0^{r_1} m\,dp = \infty. \tag{20}$$

Это можно получить из того факта, что функция $f(x)=\pi(x)\int\limits_x^r mdp,\ x\in(r_0,$ $r_1)$, удовлетворяет уравнению $D_m D^{+f}_{p_{\overline{\pi}}}=-1$ (т. е. S_0 не пусто). С другой стороны, из $\int\limits_0^{r_1} mdp=\infty$ вытекает, что предел $\lim\limits_{x\to r_1}\frac{f(x)}{\pi(x)}=-\infty$ для любого решения $D_m D^{+f}_{p_{\overline{\pi}}}=-1$. (т. е. S_0 пусто). Далее, верно утверждение: из $p(r_1)<\infty,\ \int\limits_0^{r_1} mdp<\infty$ вытекает

$$r_1 \text{ — слабо финитная граница } \Leftrightarrow \limsup_{x\to r_1}\pi(x)\int\limits_0^{r_1} mdp=\infty, \tag{21}$$

$$r_1 \text{ — сильно финитная граница } \Leftrightarrow \limsup_{x\to r_1}\pi(x)\int\limits_x^{r_1} mdp<\infty \tag{22}$$

(ср. с [1], § 16.10, теорема 16.6.).

4. Доказательства теорем Доказательство теоремы 3: 1°. Поскольку X — возвратный процесс, верно $\pi=1$ (ср. с (8)). Из [5] (теорема 3.9, (а)) вытекает, что в условиях теоремы 3 любая естественная граница является консервативной.

2°. Указанные эквивалентности вытекают из (15)—(18).

Доказательство теоремы. 4. 1°. Из того, что граница r_1 притягивающая, следует соотношение $\pi(r_1)<\infty$ (ср. с (10)). Кроме того, если $\pi=1$, то $p(r_1)<\infty$ (см. (13)). Если бы r_1 была слабой финитной границей, то из (19) и (21) вытекало бы $\pi(r_1)=\infty$. Это противоречит $\pi(r_1)<$ $<\infty$.

2°. В случае $\pi=1$, $p(r_1)=\infty$ (т. е. $k(x)=0,\ x\in(r_0,r_1)$ и $s(r_1)=$ $=\infty$) нет ни притягивающей, ни достижимой границы r_1 (ср. с (13)).

Пусть $1\notin H(D_m D^{+}_{p_{\overline{\pi}}})$ или $\pi=1,\ p(r_1)<\infty$. Вследствие (1) верно соотношение

$$\left.\begin{array}{l}\pi(r_1)<\infty\\ \int\limits_0^{r_1} mdp<\infty\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\int\limits_0^{r_1} kds<\infty\\ \int\limits_0^{r_1} nds<\infty,\end{array}\right.$$

т. е. притягивающие и финитные границы совпадают с достижимыми границами. Наконец в силу доказанного в п. 1° притягивающие и сильно финитные границы совпадают с достижимыми.

3°. В [5] доказано, что r_1 тогда и только тогда граница входа, когда

$$\pi(r)=\infty,\quad \int\limits_0^{r_1}\pi dk<\infty,\quad \int\limits_0^{r_1}\pi dn<\infty.$$

Из (7) и обобщения теоремы L'Hospital [6] можно вывести, что r_1 тогда и только тогда граница входа, когда справедливо (2) и

$$\limsup_{x\to r_1}\frac{\int\limits_x^{r_1} mdp}{\frac{1}{\pi(x)}}=\limsup_{x\to r_1}\frac{\int\limits_x^{r_1}\int\limits_0^{y}\pi dn\,dp(y)}{\int\limits_x^{r_1}\left(\int\limits_0^{y}\pi dk+(D_s^{+}\pi)(0)\right)dp(y)}.$$

Значит, из (12) и $\pi(x)<\infty$ вытекает, что r_1 тогда и только тогда граница входа, когда r_1 — сильно отталкивающая и сильно финитная граница.

В случае $\pi = 1$ верно $p(r_1) = s(r_1) = \infty$, если r_1 — граница входа или сильно отталкивающая граница (см. (14)).

С помощью (14)—(18) можно доказать эквивалентность границ входа с теми границами, которые являются сильно отталкивающими и одновременно сильно финитными.

Доказательство теоремы 5. а). Поскольку в случае притягивающей границы r_1 существует функция $h \in H(D_m D^{+\cdot}_{\frac{p}{\pi}})$ с $0 < h(r_1) < \infty$ (ср. (10) и (12)), то утверждение вытекает из теоремы 3 и [5], § 3.9. (a)·

б). Из а) и теоремы 4 следует, что любая убывающая граница r_1 является и слабо отталкивающей. Значит, $1 \notin H(D_m D^{+\cdot}_{\frac{p}{\pi}})$ (см. (10)—(14)).

Так как любая убывающая граница r_1 удовлетворяет

$$F_1 = \lim_{x \to r_1} \pi(x) \int_x^{r_1} m dp < \infty,$$

каждая такая граница и является сильно финитной (ср. (19)—(22) и п. 1).

Доказательство теоремы 6. На основе теорем 4 и 5 можно без ограничения общности предположить, что r_1 слабо отталкивающая, т. е. $1 \notin H(D_m D^{+\cdot}_{\frac{p}{\pi}})$ и $\pi(r_1) = \infty$, $\lim\limits_{x \to r_1} -(D^{+1}_{\frac{p}{\pi}})(x) = \infty$ (ср. (10)—(15) и (2)).

а). Пусть $L_1 < \infty$. Тогда $\int_0^r m dp < \infty$. Из условия $\pi(r_1) = \infty$ и из (22) можно заключить, что r_1 сильно финитная. С другой стороны, r_1 убывающая (см. [4], § 3.9 (b)).

Пусть $L_1 = \infty$. Тогда верно $\int_0^{r_1} m dp = \infty$ или

$$\int_0^{r_1} m dp < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to r_1} \pi(x) \int_x^{r_1} m dp = \infty, \tag{23}$$

т. е. r_1 — инфинитная или слабо финитная граница (см. (20) и (21)). Так как любое решение уравнения $D_m D^{+f}_{\frac{p}{\pi}} = -1$ представимо в виде

$$f(x) = -\pi(x) \int_0^x m dp + a\pi(x) + bh^0(x), \quad x \in (r_0, r_1),$$

или в случае (23)

$$f(x) = \pi(x) \int_x^{r_1} m dp + a\pi(x) + bh^0(x), \quad x \in (r_0, r_1),$$

$a, b \in R$, легко понять, что данное уравнение не может иметь конечных решений, т. е. r_1 не является убывающей границей.

б). Из существования предела L_1' вытекает существование предела L_1. Значит, утверждение теоремы является следствием части а), того факта, что r_1 — не неопределенная граница (см. [5], теорема 3.9 (c)), и теорем 4 и 5.

1. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.— М. : Физматгиз, 1963.
2. *Itô K., McKean H. P.* Diffusion processes and their sample path.— Berlin etc. : Springer, 1965.
3. *Karlin S., Taelor H. M.* A second course in stochastic processes.— New York etc. : Acad. press, 1981.— 400 p.
4. *Mandl P.* Analytical treatment of one-dimensional Markov processes.— Berlin etc. : Springer, 1968.— 200 p.
5. *Löbus J.-U.* Generalized second order differential operators and non-conservative one-dimensional quasidiffusions with natural boundaries // Lect. Notes Contr. and Inform. Scie.— 1987.— 96.— P. 164—175.
6. *Löbus J.-U.* Verallgemeinerte Differentialoperatoren zweiter Ordnung und nichtkonservative eindimensionale Quasidiffusionsprozesse: Diss.— Jena, 1987.— 107 p.

Получено 16.03.90