УДК 519.21

В. В БУЛДЫГИН, д-р физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т),
В. В. ЗАЯЦ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Теоремы сравнения и асимптотическое поведение корреляционных оценок в пространствах непрерывных функций. I

Получено уточнение неравенства сравнения для гауссовских случайных функций. С помощью этого неравенства установлен явный вид верхних функций гауссовских процессов, связанных со стационарным процессом с помощью неравенства мажоризации среднеквадратических отклонений. Доказаны неравенства сравнения для полей, возникающих при оценке корреляционной функции однородного гауссовского поля в схеме серий по многим выборкам.

Одержано уточнення нерівності порівняння для гауссівських випадкових функцій. За допомогою цієї нерівності встановлено явний вигляд верхніх функцій гауссівських процесів, пов'язаних із стаціонарним процесом за допомогою нерівності мажоризації середньоквадратичних відхилень. Доведено нерівності порівняння для полів, що виникають при оцінці кореляційної функції однорідного гауссівського поля в схемі серій за багатьма вибірками.

1. Введение. Функциональные оценки корреляционных функций стационарных случайных процессов можно разлить на два класса относительно структуры параметрического множества, на котором они задаются. Это оценки на интервалах (компактных множествах) и на положительной полуоси (некомпактном множестве). Асимптотические свойства оценок из первого класса в пространствах непрерывных функций изучались, например, в работах [1—5]. Причем рассматривались как схема одной выборки, так и схема многих независимых выборок. Асимптотические свойства глобальных функциональных оценок, т. е. оценок из второго класса, изучались в гильбертовых пространствах функций, заданных на некомпактных множествах

[6]. Настоящая работа посвящена исследованию асимптотических свойств оценок корреляционных функций стационарных гауссовских процессов в пространствах непрерывных функций с весом. В п. 2 дана постановка задачи оценивания корреляционной функции (к. ф.) в общем случае однородного гауссовского случайного поля. В п. 3 приведена теорема сравнения для гауссовских случайных функций, а также получены некоторые ее следствия. В частности, установлен явный вид верхней функции гауссовского (не обязательно стационарного) процесса, связанного со стационарным неравенством мажоризации среднеквадратических отклонений. В п. 4 доказаны неравенства сравнения для полей, связанных с оценкой к. ф. из п. 2. В п. 5 доказана в одномерном случае асимптотическая нормальность этой оценки в пространствах непрерывных функций с весом. При этом существенно используются теоремы сравнения, полученные в пп. 2 и 3. Приведены также оценки распределения нормы предельного процесса (ошибки оценивания к. ф.) Эти оценки вместе с соответствующей оценкой скорости сходимости могут полностью решить вопрос о построении функциональных доверительных интервалов для неизвестной корреляционной функции.

2. Постановка задачи. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, $X(t)$, $t \in R^m$,— однородное центрированное гауссовское случайное поле, непрерывное в среднем квадратическом (с. к.), с неизвестной к. ф. $B(h) = EX(t)X(t+h)$, $h \in R^m$. В качестве схемы наблюдений за полем X выберем схему серий по многим выборкам, когда наблюдается набор $\{X_k(t), t \in R^m\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ независимых копий поля X. Рассмотрим оценку

$$\hat{B}_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{mes}(\Pi(T_n))} \int_{\Pi(T_n)} X_k(t)\, X_k(t+h)\, dt, \quad h \in R^m, \tag{1}$$

где $\{T_n = (T_n^{(1)}, T_n^{(2)}, \ldots, T_n^{(m)}),\ n = 1, 2, \ldots\}$—последовательность векторов из R^m с положительными координатами, $\Pi(T_n) = \{y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}) \in R^m : 0 \leqslant y^{(k)} \leqslant T_n^{(k)},\ k = \overline{1, m}\}$ — параллелепипед в R^m, $\operatorname{mes}(\Pi(T_n)) = T_n^{(1)} T_n^{(2)} \cdot \ldots \cdot T_n^{(m)}$ — лебегова мера $\Pi(T_n)$. Известно [6], что если к. ф. B поля X интегрируема с квадратом по мере Лебега в R^m и $\min\limits_{k=\overline{1,m}} T_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, то конечномерные распределения полей

$$Y_n(h) = (n \operatorname{mes}(\Pi(T_n)))^{1/2} (\hat{B}_n(h) - B(h)) \tag{2}$$

сходятся при $n \to +\infty$ к конечномерным распределениям центрированного гауссовского случайного поля $Y(h)$, $h \in R^m$ с к. ф.

$$\rho(h_1, h_2) = \int_{R^m} [B(u)\, B(u + h_2 - h_1) + B(u + h_2)\, B(u - h_1)]\, du = 2(2\pi)^m \int_{R^m} f^2(\lambda) \cos\langle\lambda, h_1\rangle \cos\langle\lambda, h_2\rangle\, d\lambda, \tag{3}$$

где $f(\lambda)$, $\lambda \in R^m$,— спектральная плотность поля X, $\langle a, b\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} a^{(k)} b^{(k)}$ для $a, b \in R^m$.

3. Теоремы сравнения для гауссовских случайных функций и их применения. Пусть Θ — конечное или счетное множество, $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $t \in \Theta$, — центрированные гауссовские случайные функции, $a(t) \geqslant 0$, $q(t) > 0$, $t \in \Theta$ — некоторые функции.

Теорема 1. *Если для любых* $s, t \in \Theta$ *выполнено неравенство*

$$E\,|Z_1(t) - Z_1(s)|^2 \leqslant E\,|Z_2(t) - Z_2(s)|^2, \tag{4}$$

то имеет место оценка

$$P\{\sup_{\Theta} (q(t)\,|Z_1(t)| - a(t)) > 0\} \leqslant 2P\{\sup_{\Theta} (q(t)\, Z_2(t) + \gamma q(t)\, g(t) - a(t)) > 0\}, \tag{5}$$

где

$$g^2(t) = \alpha^2 - EZ_2^2(t) + EZ_1^2(t), \quad t \in \Theta, \tag{6}$$

$$\alpha^2 = \sup_{\Theta} (\max [0, EZ_2^2(t) - EZ_1^2(t)]), \tag{7}$$

а γ — *стандартная нормальная случайная величина, независимая от функции* $Z_2(t)$, $t \in \Theta$.

Доказательство. Предположим, что множество Θ конечно. Обозначим

$$\overline{Z}_1(t) = Z_1(t) + \alpha\gamma, \quad \overline{Z}_2(t) = Z_2(t) + \gamma_g(t),$$

$$\overline{\overline{Z}}_1(t) = q(t)\,\overline{Z}_1(t), \quad \overline{\overline{Z}}_2(t) = q(t)\,\overline{Z}_2(t).$$

Случайную величину γ выберем независимой как от Z_2, так и от Z_1. Тогда, как легко видеть, $E\overline{Z}_1^2(t) = E\overline{Z}_2^2(t)$, $t \in \Theta$. Кроме того, в силу неравенства (4)

$$E\,|\overline{Z}_1(t) - \overline{Z}_1(s)|^2 \leqslant E\,|\overline{Z}_2(t) - \overline{Z}_2(s)|^2, \quad t, s \in \Theta,$$

откуда следует, что для всех $t, s \in \Theta$ $E\overline{Z}_1(t)\,\overline{Z}_1(s) \geqslant E\overline{Z}_2(t)\,\overline{Z}_2(s)$. Поэтому для функций $\overline{\overline{Z}}_1$, $\overline{\overline{Z}}_2$ также справедливы соотношения

$$E\overline{\overline{Z}}_1^2(t) = E\overline{\overline{Z}}_2^2(t),\ t \in \Theta, \quad E\overline{\overline{Z}}_1(t)\,\overline{\overline{Z}}_1(s) \geqslant E\overline{\overline{Z}}_2(t)\,\overline{\overline{Z}}_2(s), \quad t, s \in \Theta.$$

Тогда в силу неравенства Слепяна [7]

$$P\{\sup_{\Theta} (\overline{\overline{Z}}_1(t) - a(t)) > 0\} \leqslant P\{\sup_{\Theta} (\overline{\overline{Z}}_2(t) - a(t)) > 0\}. \tag{8}$$

Множество $\{x(\cdot) \in R^{\Theta} : \sup_{\Theta} (|x(t)| - a(t)) \geqslant 0\}$ является выпуклым центрально-симметричным подмножеством R^{Θ}. Тогда с помощью неравенства Андерсона [8] получаем

$$P\{\sup_{\Theta} (|\overline{\overline{Z}}_1(t)| - a(t)) \leqslant 0\} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{\sup_{\Theta} (|q(t)\,Z_1(t) + q(t)\,\alpha u| -$$

$$- a(t)) \leqslant 0\}\,e^{-u^2/2}du \leqslant (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{\sup_{\Theta} (q(t)\,|Z_1(t)| - a(t)) \leqslant 0\}\,e^{-u^2/2}du =$$

$$= P\{\sup_{\Theta} (q(t)\,|Z_1(t)| - a(t)) \leqslant 0\}.$$

Воспользовавшись неравенством (8) и симметричностью центрированной гауссовской меры, получим

$$P\{\sup_{\Theta} (q(t)\,|Z_1(t)| - a(t)) > 0\} \leqslant P\{\sup_{\Theta} (|\overline{\overline{Z}}_1(t)| - a(t)) > 0\} =$$

$$= 2P\{\sup_{\Theta} (\overline{\overline{Z}}_1(t) - a(t)) > 0\} \leqslant 2P\{\sup_{\Theta} (\overline{\overline{Z}}_2(t) - a(t)) > 0\} =$$

$$= 2P\{\sup_{\Theta} (q(t)\,Z_2(t) + \gamma_g(t)\,g(t) - a(t)) > 0\}.$$

В случае счетного Θ требуемое неравенство получаем с помощью предельного перехода. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 работы [9] является частным случаем теоремы 1 при $q(t) \equiv 1$, $t \in \Theta$.

Следствие. *Пусть* Θ — *сепарабельное метрическое пространство. Утверждение теоремы* 1 *остается в силе, если* $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $t \in \Theta$, — *сепарабельные центрированные гауссовские случайные функции, а* $a(t) \geqslant 0$, $q(t) > 0$, $t \in \Theta$, — *непрерывные функции.*

Положим теперь $\Theta = [0, +\infty)$ и воспользуемся следствием теоремы 1 для получения верхних функций нестационарных гауссовских процессов.

Теорема 2. *Пусть* $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $t \geqslant 0$ — *центрированные гауссовские случайные процессы, причем* $Z_2(t)$, $t \geqslant 0$, *стационарен*, $EZ_2^2(t) \equiv \sigma_2^2$, $t \geqslant 0$, *а к. ф.* B_2 *процесса* Z_2 *удовлетворяет условию: для некоторого* $\delta \in (0, 2]$ *найдется константа* $K_1 > 0$ *такая, что*

$$B_2(h) = \sigma_2^2 - K_1\sigma_2^2|h|^\delta + o(|h|^\delta), \quad h \to 0. \tag{9}$$

Пусть процесс Z_1 *таков, что* $\sup\limits_{t\geqslant 0} EZ_1^2(t) \leqslant \Delta^2 < +\infty$, *и, кроме того выполнено неравенство* (8). *Тогда*

$$P\left\{\limsup_{T\to+\infty} \frac{S_1(T) - (2(\sigma_2^2 + \Delta^2)\ln T)^{1/2}}{\ln\ln T}(2(\sigma_2^2+\Delta^2)\ln T)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta}\right\} = 1,$$

где $S_1(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} |Z_1(t)|$.

Доказательство теоремы 2 опирается на следующее утверждение.

Лемма 1. *В условиях теоремы 2 для любого* $x \geqslant \sigma_2(\sigma_2^2 + \Delta^2)^{1/2} \times ((\sigma_2^2+\Delta^2)^{1/2} - \Delta)^{-1}$ *выполняется неравенство*

$$P\{S_1(T) > x\} \leqslant K_2 T x^{2/\delta - 1} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_2^2 + \Delta^2)}\right), \tag{10}$$

где $K_2 > 0$ — *некоторая константа.*

Доказательство леммы 1. Пусть $g(t)$ и α определены соотношениями (6) и (7), $g_+ = \sup\limits_{t\geqslant 0} g(t)$, $g_- = \inf\limits_{t\geqslant 0} g(t)$, $S_2(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} Z_2(t)$. Тогда, полагая $\Theta = [0, T]$ и используя следствие теоремы 1, получаем цепочку неравенств

$$P\{S_1(T) > x\} \leqslant 2P\{\sup_{t\in[0,T]}(Z_2(t) + \gamma g(t)) > x\} \leqslant (2/\pi)^{1/2} \times$$
$$\times \int_0^{+\infty} [P\{S_2(T) > x + ug_-\} + P\{S_2(T) > x - ug_+\}] e^{-u^2/2} du \leqslant$$
$$\leqslant P\{S_2(T) > x\} + (2/\pi)^{1/2} \int_0^{+\infty} P\{S_2(T) > x - u\Delta\} e^{-u^2/2} du.$$

Полагая $u_0 = (x - \sigma_2)/\Delta$, имеем

$$\int_0^{+\infty} P\{S_2(T) > x - u\Delta\} e^{-u^2/2} du = \int_0^{u_0} P\{S_2(T) > x - u\Delta\} e^{-u^2/2} du +$$
$$+ \int_{u_0}^{+\infty} P\{S_2(T) > x - u\Delta\} e^{-u^2/2} du. \tag{11}$$

В силу леммы 2.9 работы [10] найдется константа $K_3 > 0$ такая, что для всех $x \geqslant \sigma_2$ выполняется неравенство

$$P\{S_2(T) > x\} \leqslant K_3 x^{2/\delta - 1} T \exp(-x^2/2).$$

Тогда первое слагаемое правой части равенства (11) можно оценить так:

$$\int_0^{u_0} P\{S_2(T) > x - u\Delta\} e^{-u^2/2} du \leqslant \overline{K}_3 T \sigma_2 (2\pi)^{1/2} (\sigma_2^2 + \Delta^2)^{-1/2} x^{2/\delta - 1} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_2^2 + \Delta^2)}\right).$$

Второе слагаемое правой части равенства (12) допускает при $x \geqslant \sigma_2(\sigma_2^2 + \Delta^2)^{1/2}((\sigma_2^2 + \Delta^2)^{1/2} - \Delta)^{-1}$ простую оценку

$$\int_{u_0}^{+\infty} P\{S_2(T) > x - u\Delta\} e^{-u^2/2} du \leqslant 0{,}5\,(2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_2^2 + \Delta^2)}\right).$$

Объединяя полученные оценки, приходим к неравенству (10). Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 положим

$$x(\beta, t) = (2(\sigma_2^2 + \Delta^2)\ln t)^{1/2} + \frac{\beta \ln\ln t}{(2(\sigma_2^2 + \Delta^2)\ln t)^{1/2}}.$$

Тогда

$$\frac{x^2(\beta, t)}{2(\sigma_2^2 + \Delta^2)} = \ln t + \beta \ln\ln t + 0(1),\ t \to +\infty,$$

$$\exp\left\{-\frac{x^2(\beta, t)}{2(\sigma_2^2 + \Delta^2)}\right\} \sim t^{-1}(\ln t)^{-\beta},\ t \to +\infty,$$

$$x(\beta, t)^{2/\delta - 1} \sim (2(\sigma_2^2 + \Delta^2))^{2/\delta - 1}(\ln t)^{1/\delta - 1/2},\ t \to +\infty.$$

Пусть $A_n(\beta) = \{\omega : S_1(e^n) > x(\beta, e^n)\}$. Тогда для достаточно больших n имеем

$$P(A_n(\beta)) \leqslant K_4 n^{1/\delta - 1/2 - \beta},\ K_4 = K_2(2(\sigma_2^2 + \Delta^2))^{2/\delta - 1},$$

следовательно, при любом $\beta > 1/\delta + 1/2$ ряд $\sum\limits_n P(A_n(\beta))$ сходится, и в силу леммы Бореля — Кантелли из последовательности $A_n(\beta)$ с вероятностью 1 осуществляется лишь конечное число событий. Положим $e^{n-1} \leqslant T < e^n$, $\varkappa = \ln T$. Тогда, используя теорему Лагранжа, при достаточно больших T получаем

$$S_1(T) \leqslant S_1(e^n) \leqslant (2(\sigma_2^2 + \Delta_2)\varkappa)^{1/2} + \beta\frac{\ln\varkappa}{(2(\sigma_2^2 + \Delta^2)\varkappa)^{1/2}} + \\ + \varepsilon\frac{\ln\varkappa}{(2(\sigma_2^2 + \Delta^2)\varkappa)^{1/2}}.$$

Следовательно, для любого $\beta > 1/\delta + 1/2$

$$S_1(T) < (2(\sigma_2^2 + \Delta^2)\ln T)^{1/2} + \beta\frac{\ln\ln T}{(2(\sigma_2^2 + \Delta^2)\ln T)^{1/2}},$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 2.

4. Неравенства сравнения, возникающие при оценке корреляционной функции. Вернемся к постановке задачи, сформулированной в п. 2, и установим неравенства сравнения для полей Y, Y_n. Для предельного поля Y такое неравенство будет иметь следующий вид.

Лемма 2. *Если спектральная плотность f поля X ограничена: $C = \sup\limits_{\lambda \in R^m} f(\lambda) < +\infty$, то для любых $t, s \in R^m$*

$$E|Y(t) - Y(s)|^2 \leqslant 2C(2\pi)^m E|X(t) - X(s)|^2 \tag{12}$$

Доказательство вытекает из соотношения (3) и того факта, что

$$E|X(t) - X(s)|^2 = 4\int_{R^m} f(\lambda)\sin^2 < \frac{\lambda}{2},\ t - s > d\lambda. \tag{13}$$

Кроме того, из соотношения (3) получаем, что в условиях леммы 2 выполняется

$$\sup_{h \in R^m} EY^2(h) \leqslant 2C(2\pi)^m\sigma^2. \tag{14}$$

Лемма 3. *Пусть исходное поле X непрерывно с вероятностью 1 и спектральная плотность f поля X ограничена. Тогда поле Y также непрерывно с вероятностью* 1.

Доказательство вытекает из гауссовости полей Y_n, неравенства (12) и теоремы Дадли [11].

Для допредельных полей Y_n выполняется неравенство сравнения, близкое к (12). Обозначим $\|\lambda\| = \langle\lambda, \lambda\rangle^{1/2}$ для $\lambda \in R^m$.

Лемма 4. *Пусть поле X среднеквадратично-непрерывно, и его спектральная плотность f ограничена, $\sup\limits_{\lambda\in R^m} f(\lambda) = C < +\infty$. Пусть также при некотором $\gamma \in [0, 1]$ конечен спектральный момент*

$$\omega_\gamma = \int\limits_{R^m} \|\lambda\|^\gamma f(\lambda)\, d\lambda < +\infty.$$

Тогда для любых $t, s \in R^m$

$$E|Y(t) - Y(s)|^2 \leqslant 2C(2\pi)^m E|X(t) - X(s)|^2 +$$
$$+ 2^{4-\gamma} C (2\pi)^m \omega_\gamma m^{1/4} \pi^{-1/2} \|t - s\|^{1/2+\gamma} \left(\sum_{k=1}^m 1/T_n^{(k)}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\tilde{T}_n = \prod\limits_{k=1}^m T_n^{(k)}$.

Из соотношений (1), (2) получаем $E|Y_n(t) - Y_n(s)|^2 = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = 4(2\pi)^m \int\limits_{R^m} \int\limits_{R^m} f(\lambda) f(\mu)\, \Psi_n^2(\lambda + \mu) \sin^2\left\langle \frac{\mu}{2}, t - s \right\rangle d\lambda d\mu,$$

$$I_2 = 4(2\pi) \int\limits_{R^m} \int\limits_{R^m} f(\lambda) f(\mu)\, \Psi_n^2(\lambda + \mu) \sin\left\langle \frac{\mu}{2}, t - s \right\rangle \sin\left\langle \frac{\lambda}{2}, t - s \right\rangle \times$$
$$\times \cos\left\langle \frac{\lambda - \mu}{2}, t + s \right\rangle d\lambda d\mu,$$

$$\Psi_n^2(\lambda) = (2\pi)^{-m} \tilde{T}_n^{-1} \left| \int\limits_{\Pi(T)_n} e^{i\langle\lambda, t\rangle} dt \right|^2 = (2\pi)^{-m} \prod_{k=1}^m \left[\sin^2 \frac{\lambda_k T_n^{(k)}}{2} / (\lambda_k^2 T_n^{(k)}/4) \right].$$

Отметим, что $\int\limits_{R^m} \Psi_n^2(\lambda)\, d\lambda = 1$. Оценим интеграл I_1. В силу соотношения (13) получаем

$$I_1 \leqslant (2\pi)^m C E|X(t) - X(s)|^2. \tag{16}$$

Для оценки слагаемого I_2 понадобится тот факт, что функция $\Psi_n^2(\lambda)$ обладает свойствами ядра, именно, для любого $\varepsilon = (\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(m)})$, $\varepsilon^{(k)} > 0$, $k = \overline{1, m}$, $\int\limits_{\Pi[-\varepsilon, \varepsilon]} \Psi_n^2(\lambda)\, d\lambda \to 1$, если только $\min\limits_{k=\overline{1,m}} T_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (здесь $\Pi[-\varepsilon, \varepsilon] = \{y \in R^m : -\varepsilon^{(k)} \leqslant y^{(k)} \leqslant \varepsilon^{(k)}, k = \overline{1, m}\}$). Кроме того,

$$\int\limits_{R^m/\Pi[-\varepsilon, \varepsilon]} \Psi_n^2(\lambda)\, d\lambda < \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m (\varepsilon_k T_n^{(k)})^{-1}. \tag{17}$$

Произведя в выражении для I_2 замену переменных $\varkappa = \lambda + \mu$, $\mu = \mu$, получим

$$|I_2| \leqslant 4(2\pi)^m \int\limits_{R^m} f(\mu) \left| \sin\left\langle \frac{\mu}{2}, t - s \right\rangle \right| \left| \int\limits_{R^m} f(\varkappa - \mu)\, \Psi_n^2(\varkappa) \right| \sin\left\langle \frac{\varkappa - \mu}{2}, t - \right.$$
$$\left. - s \right\rangle \cos\left\langle \frac{\varkappa}{2} - \mu, t + s \right\rangle \Bigg| d\varkappa d\mu. \tag{18}$$

Внутренний интеграл в правой части неравенства (18) оценивается сверху выражением

$$C \int\limits_{R^m} \Psi_n^2(\varkappa) \left| \sin\left\langle \frac{\varkappa - \mu}{2}, t - s \right\rangle \right| d\varkappa.$$

Оценим разность

$$\left|\int_{R^m} \Psi_n^2(\varkappa)\left|\sin\langle\frac{\varkappa-\mu}{2}, t-s\rangle\right| d\varkappa - \left|\sin\langle\frac{\mu}{2}, t-s\rangle\right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{R^m} \Psi_n^2(\varkappa)\left|\sin\langle\frac{\varkappa-\mu}{2}, t-s\rangle - \sin\langle\frac{\mu}{2}, t-s\rangle\right| d\varkappa.$$

В последнем интеграле область интегрирования разобъем на две: $\Pi[-\varepsilon, \varepsilon]$ и $R^m \setminus \Pi[-\varepsilon, \varepsilon]$, где $\varepsilon \in D_+^m = \{(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(m)} : \varepsilon^{(1)}) = \ldots = \varepsilon^{(m)} > 0\}$. Интегралы по этим областям обозначим I' и I'' соответственно. В силу неравенства (17) для $\varepsilon \in D_+^m$

$$I'' < 2 \int_{R^m \setminus \Pi[-\varepsilon, \varepsilon]} \Psi_n^2(\lambda)\, d\lambda < 8/\pi\varepsilon^{(1)} \sum_{k=1}^{m} (1/T_n^{(k)}).$$

Интеграл I' оценим следующим образом:

$$I' \leqslant \int_{\Pi[-\varepsilon, \varepsilon]} \Psi_n^2(\varkappa)\, d\varkappa \cdot 2 \sup_{\varkappa \in \Pi[-\varepsilon, \varepsilon]} \left| \cos\langle\frac{2\mu-\varkappa}{4}, t-s\rangle \times\right.$$

$$\left.\times \sin\langle\frac{\varkappa}{4}, t-s\rangle\right| \leqslant 2 \sup_{\varkappa \in \Pi[-\varepsilon, \varepsilon]} \left|\sin\langle\frac{\varkappa}{4}, t-s\rangle\right| \leqslant \|t-s\| \sup_{\varkappa \in \Pi[-\varepsilon, \varepsilon]} \|\varkappa\|/2 =$$

$$= \sqrt{m}\, \|t-s\|\, \varepsilon^{(1)}/2.$$

Объединяя оценки для I' и I'', получаем

$$I' + I'' \leqslant m^{1/2} \|t-s\|\, \varepsilon^{(1)}/2 + 8/(\pi\varepsilon^{(1)}) \sum_{k=1}^{m} (1/T_n^{(k)}). \tag{19}$$

Минимизируя правую часть неравенства (19) по $\varepsilon \in D_+^m$ или, что равносильно, по $\varepsilon^{(1)} \in (0, +\infty)$, имеем

$$I' + I'' \leqslant 4m^{1/4}\varkappa^{-1/2} \|t-s\|^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} (1/T_n^{(k)})\right)^{1/2}. \tag{20}$$

Из неравенства (20) вытекает, что для всякого $\mu \in R^m$ найдется число $\theta(\mu)$ ($|\theta(\mu)| \leqslant 1$) такое, что

$$\int_{R^m} \Psi_n^2(\varkappa)\left|\sin\langle\frac{\mu-\varkappa}{2}, t-s\rangle\right| d\varkappa = \left|\sin\langle\frac{\mu}{2}, t-s\rangle\right| +$$

$$+ \theta(\mu)\, 4\pi^{-1/2} m^{1/4} \|t-s\|^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} (1/T_n^{(k)})\right)^{1/2}.$$

С учетом этого соотношения из неравенства (18) получаем

$$|I_2| \leqslant C(2\pi)^m 4 \int_{R^m} f(\mu) \sin^2\langle\frac{\mu}{2}, t-s\rangle\, d\mu + C(2\pi)^m 4m^{1/4}\pi^{-1/2} \|t-$$

$$-s\|^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} (1/T_n^{(k)})\right)^{1/2} 4 \int_{R^m} |\theta(\mu)|\, f(\mu) \left|\sin\langle\frac{\mu}{2}, t-s\rangle\right| d\mu \leqslant$$

$$\leqslant C(2\pi)^m E\,|X(t) - X(s)|^2 + 2^{4-\gamma} C(2\pi)^m \omega_\gamma \pi^{-1/2} \|t-s\|^{1/2+\gamma} \left(\sum_{k=1}^{m} (1/T_n^{(k)})\right)^{1/2}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $|\sin x| \leqslant |x|^\gamma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Объединяя оценки для I_1 и I_2, получаем неравенство (15). Лемма доказана.

Замечания. 1. При $\gamma = 0$ неравенство (15) принимает вид

$$E|Y_n(t) - Y_n(s)|^2 \leqslant 2C(2\pi)^m E|X(t) - X(s)|^2 + 16C(2\pi)^m \sigma^2 m^{1/4} \pi^{-1/2} \| t - s \|^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} (1/T_n^{(k)}) \right)^{1/2}.$$

2. Неравенство (15) согласовано с неравенством (12) в том смысле, что при формальном переходе к пределу при $n \to +\infty$ в (12) получаем соотношение (15), если только $\lim\limits_{n\to+\infty} \min\limits_{k=\overline{1,m}} T_n^{(k)} = +\infty$.

1. *Иванов А. В.* Одна предельная теорема для оценки корреляционной функции // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1978.— Вып. 19.— С. 76—81.
2. *Булдыгин В. В.* Предельные теоремы в функциональных пространствах и одна задача статистики случайных процессов // Вероятностные методы бесконечномерного анализа.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 24—36.
3. *Булдыгин В. В., Иларионов Е. В.* Об одной задаче статистики случайных полей // Вероятностный бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—14.
4. *Дыховичный А. А.* Об оценке корреляционной функции однородного и изотропного гауссовского поля // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1983.— Вып. 29.— С. 37—40.
5. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей.— Киев : Выща шк., 1986.— 216 с.
6. *Булдыгин В. В., Заяц В. В.* Асимптотические свойства корреляционных оценок в функциональных пространствах. I, II//Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 2.— С. 179—187; № 3.— С. 322—329.
7. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for Gaussian noise // Bell Syst. Techn. J.— 1962.— **41**, N 2.— P. 463—501.
8. *Anderson T. W.* The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— **6**, N 2.— P. 170—176.
9. *Булдыгин В. В.* Об одном неравенстве сравнения для распределения максимума гауссовского процесса // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1983.— Вып. 28.— С. 9—14.
10. *Pickands* III. *J.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— **145**.— P. 51—73.
11. *Дадли Р. М.* Выборочные функции гауссовского процесса // Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения.— М. : Мир, 1978.— С. 7—62.

Получено 06.03.90