УДК 517.524

Д. И. БОДНАР, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов)

Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда

Построен новый рекуррентный алгоритм преобразования двойного степенного ряда в соответствующую ветвящуюся дробь с линейными частными числителями. Установлены необходимые и достаточные условия существования предлагаемого алгоритма, рассмотрены признаки сходимости построенной соответствующей ветвящейся цепной дроби.

Побудований новий рекурентний алгоритм перетворення подвійного степеневого ряду у відповідний гіллястий ланцюговий дріб з лінійними частинними чисельниками. Встановлені необхідні і достатні умови існування запропонованого алгоритму, розглянуті ознаки збіжності побудованого відповідного гіллястого ланцюгового дробу.

Одним из основных подходов, используемых для представления аналитических функций непрерывными дробями, является построение соответствующих непрерывных дробей. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ — разложение функции f в окрестности нуля. Если определители Ганкеля, составленные из коэффициентов этого ряда, отличны от нуля, то соответствующая непрерывная дробь является правильной C-дробью [1]

$$c_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z}{1} = c_0 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \dots}}. \tag{1}$$

Коэффициенты a_k, $k = 1, 2, \dots$, дроби (1) находятся из условия соответствия

$$f(z) - f_n(z) = O(z^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Пусть задан двойной степенной ряд

$$f(z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij} z_1^i z_2^j. \tag{3}$$

Ветвящаяся цепная цробь (ВЦД) называется соответствующей этому ряду, если разложение ее каждой n-й подходящей дроби ($n = 1, 2, \dots$) в формальный степенной ряд совпадает с разложением (3) до всех степеней порядка n включительно. Именно таким образом будем понимать в данном случае условие (2), где $f_n(z)$ — n-я подходящая дробь соответствующей ВЦД, $z = (z_1, z_2)$. В отличие от одномерного случая для кратного степенного ряда, удовлетворяющего определенным условиям, существуют различные конструкции соответствующих ВЦД.

В работах [2—4] рассматривалась соответствующая ВЦД ряду (3) в виде

$$1 + \Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{c_{ii} z_1 z_2}{1 + \Phi_i}, \quad \Phi_i = \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{p+i,i} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{c_{i,p+i} z_2}{1}. \tag{4}$$

Другая модель ВЦД, соответствующей ряду (3), предложена в работе [5]

$$1 + F_{00} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i0} z_1}{1 + F_{i0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{0i} z_2}{1 + F_{0i}}, \quad F_{ij} = \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{b_{p+i,p+j} z_1 z_2}{1}. \tag{5}$$

Под n-й подходящей дробью (4) или (5) понимаем конечную ВЦД, являющуюся частью (4) или (5) и содержащую только те элементы b_{ij} или c_{ij} соответственно, для которых $i + j \leqslant n$. Двумерные соответствующие ВЦД (4) или (5) существенно отличаются от соответствующей цепной дроби (1) тем, что некоторые их частные числители являются полиномами второй степени. Требование линейности частных числителей естественно приводит к следующей конструкции соответствующей ВЦД [6]:

$$Q_{00} = a_{00} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{b_{i(k)} z_{i_k}}{1} = a_{00} + \sum_{i_1=1}^{2} \cfrac{b_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{2} \cfrac{b_{i(2)} z_{i_2}}{1 + \dots}}, \tag{6}$$

где $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$ — мультииндексы. Пусть

$$f_n(z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} z_1^i z_2^j \tag{7}$$

— разложение n-й подходящей дроби (6), т. е. конечной ВЦД, являющейся частью (6) и содержащей только те элементы $b_{i(k)}$, для которых $k \leqslant n$. Из условия соответствия (2) следует, что $q_{ij}^{(n)} = q_{ij}$, $i + j \leqslant n$. Поэтому $q_{ij}^{(n-1)} = q_{ij}^{(n)}$, $i + j \leqslant n - 1$, и для определения 2^n элементов $b_{i(n)}$, $i_p = 1, 2,$

$p=\overline{1,n}$, n-го этажа ВЦД (6) можем записать только $n+1$ уравнение: $q_{ij}^{(n)}=q_{ij}$, $i+j=n$. Следовательно, соответствующая ВЦД (6) ряду (3) определяется неоднозначно. Естественными представляются два пути образования недостающих уравнений: положить определенное количество элементов $b_{i(n)}$ равными нулю или равными друг другу. В первом случае приходим к соответствующей ВЦД с неравноправными переменными z_1 и z_2 вида [7]

$$b_0+F_0(z_2)+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\frac{b_{k0}z_1}{1+F_k(z_2)}\ ,\quad F_k(z_2)=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathrm{D}}}\frac{b_{ki}z_2}{1}\ . \tag{8}$$

Ветвящиеся цепные дроби, возникающие во втором случае, составляют предмет наших исследований. Рассмотрим ВЦД (6), где

$$b_{i(k)}=a_{2k-|i(k)|,|i(k)|-k} \tag{9}$$

— некоторые комплексные числа, $|i(k)|=i_1+i_2+\ldots+i_k$. Введем обозначения

$$Q_{n,m}=1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{b_{\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{m}i(k)}z_{i_k}}{1},$$

где n, m — целые неотрицательные числа такие, что $n+m\geqslant 1$. Тогда справедливы рекуррентные соотношения

$$Q_{n,m}=1+\frac{a_{n+1,m}z_1}{Q_{n+1,m}}+\frac{a_{n,m+1}z_2}{Q_{n,m+1}}. \tag{10}$$

Если в (6) $a_{ij}\neq 0$, $i+j\geqslant 1$, заданы, то каждой ВЦД $Q_{n,m}$ соответствует формальный степенной ряд

$$\sum_{i+j\geqslant 0}q_{ij}^{(n,m)}z_1^iz_2^j. \tag{11}$$

Пусть $\sum\limits_{i+j\geqslant 0}p_{ij}^{(n,m)}z_1^iz_2^j$ — ряд, обратный (11). Коэффициенты $p_{ij}^{(n,m)}$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}p_{i-k,j-l}^{(n,m)}q_{k,l}^{(n,m)}=0,\quad p_{00}^{(n,m)}=1,\quad i+j>0. \tag{12}$$

Откуда $p_{ij}^{(n,m)}=-q_{ij}^{(n,m)}+\delta_{ij}^{(n,m)}$, где $\delta_{10}^{(n,m)}=\delta_{01}^{(n,m)}=1$ и в случае $i+j\geqslant 2$

$$\delta_{ij}^{(n,m)}=\sum_{k=1}^{i+j}\sum_{\substack{n_1i_1+n_2i_2+\ldots+n_ki_k=i,\\ n_1j_1+n_2j_2+\ldots+n_kj_k=j}}(-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_k}\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\times$$
$$\times\prod_{p=1}^{k}(q_{i_pj_p}^{(n,m)})^{n_p}, \tag{13}$$

где $n_r\geqslant 1$, $i_r+j_r\neq 0$, $r=1,2,\ldots$, $i_1\geqslant i_2\geqslant\ldots\geqslant i_k$, и если $i_r=i_{r+1}$, то $j_r>j_{r+1}$, если же $k=1$, то $i_1\neq i$ и $j_1=j$.

Из рекуррентных соотношений (10) следует

$$q_{ij}^{(n,m)}=q_{10}^{(n,m)}p_{i-1,j}^{(n+1,m)}+q_{01}^{(n,m)}p_{i,j-1}^{(n,m+1)},\quad i+j>0, \tag{14}$$

$$q_{10}^{(n,m)}=a_{n+1,m},\quad q_{01}^{(n,m)}=a_{n,m+1}, \tag{15}$$

причем $p_{i,-1}^{(n,m+1)}=p_{-1,j}^{(n+1,m)}=0$, $p_{00}^{(n,m)}=q_{00}^{(n,m)}=1$.

Пусть задан формальный степенной ряд (3). Построим ВЦД (6) с элементами $b_{i(k)}$ вида (9), соответствующую этому ряду и установим условия, при выполнении которых такая дробь существует. Если ВЦД (6) соответствует ряду (3), то с необходимостью должны выполняться соотношения (14), которые вместе с формулами обращения рядов (12) или (13) составляют основу алгоритма вычисления элементов дроби по заданным коэффициентам ряда (3).

Из условия (2), где $n = 1$, следует

$$a_{00} = q_{00}, \quad a_{10} = q_{10}, \quad a_{01} = q_{01}. \tag{16}$$

На втором шаге алгоритма вычислим элементы a_{ij}, $i + j = 2$, ВЦД (6) и коэффициенты $q_{ij}^{(n,m)}$, $n + m + i + j = 2$, $n + m = i + j = 1$, возникающие при обращении рядов и играющие вспомогательную роль. Так как $q_{ij}^{(0,0)} = q_{ij}$, $p_{10}^{(1,0)} = -q_{10}^{(1,0)} = -a_{20}$, $p_{10}^{(0,1)} = -q_{10}^{(0,1)} = -a_{11}$, $p_{01}^{(1,0)} = -q_{01}^{(1,0)} = -a_{11}$, $p_{01}^{(0,1)} = -q_{01}^{(0,1)} = -a_{02}$, то, используя (14), где $m = n = j = 0$, $i = 2$; $n = m = 0$, $i = j = 1$; $n = m = i = 0$, $j = 2$, т. е. $q_{20} = -q_{10}a_{20}$, $q_{11} = -(q_{10} + q_{01})\,a_{11}$, $q_{02} = -q_{01}a_{02}$, последовательно находим

$$a_{20} = -q_{20}q_{10}^{-1}, \quad a_{11} = -q_{11}(q_{10} + q_{01})^{-1}, \quad a_{02} = -q_{02}\,q_{01}^{-1} \tag{17}$$

Пусть при некотором $k \geqslant 1$ вычислены элементы ВЦД (6), a_{ij}, $i + j \leqslant k$, и коэффициенты преобразованных рядов $q_{ij}^{(n,m)}$, $n + m + i + j \leqslant k$, $1 \leqslant n + m \leqslant k - 1$, $1 \leqslant i + j \leqslant k - 1$. Используя (14), (15), (12) или (13), вычислим a_{ij}, $i + j = k + 1$, и $q_{ij}^{(n,m)}$, $n + m + i + j = k + 1$, $1 \leqslant n + m \leqslant k$, $1 \leqslant i + j \leqslant k$. Определим

$$X_{k+1} = \{q_{ij}^{(n,m)} : n + m + i + j = k + 1,\ 1 \leqslant n + m \leqslant k,\ 1 \leqslant i + j \leqslant k\},$$

$$X_{r,l} = \{q_{ij}^{(n,m)} : n + i = r,\ m + j = l,\ i + j \geqslant 1\}.$$

Тогда $X_{k+1} = \bigcup\limits_{r+l=k+1} X_{r,l}$. Зафиксируем r и l. Для обозначения элементов множества $X_{r,l}$ в этом случае используем сокращенную запись $x_{ij} = q_{ij}^{(r-i,l-j)}$. Из формулы (13) следует, что $\delta_{ij}^{(n,m)}$ выражаются через $q_{st}^{(n,m)}$, найденные на предыдущих шагах алгоритма. Определим

$$\varepsilon_{ij} = a_{r-i+1,l-j}\delta_{i-1,j}^{(r-i+1,l-j)} + a_{r-i,l-j+1}\delta_{i,j-1}^{(r-i,l-j+1)}, \tag{18}$$

где $i + j \geqslant 1$, $i = \overline{0, r}$, $j = \overline{0, l}$, и $\delta_{-1,j}^{(r+1,l-j)} = \delta_{i,-1}^{(r-i,l+1)} = 0$. На основании (14), (15) получим систему из $(r + 1)(l + 1) - 2$ уравнений для нахождения такого же количества неизвестных $x_{ij} \in X_{r,l}$:

$$\begin{gathered} q_{rl} = -a_{10}x_{r-1,l} - a_{01}x_{r,l-1} + \varepsilon_{rl}, \\ x_{ij} = -a_{r-i+1,l-j}x_{i-1,j} - a_{r-i,l-j+1}x_{i,j-1} + \varepsilon_{ij}, \\ x_{10} = x_{01}, \quad 2 \leqslant i + j \leqslant r + l - 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant r, \quad 0 \leqslant j \leqslant l. \end{gathered} \tag{19}$$

Определим μ_{ij} с помощью рекуррентных соотношений

$$\mu_{ij} = a_{i,j-1}\mu_{i,j-1} + a_{i-1,j}\mu_{i-1,j}, \quad i = \overline{0, r}, \quad j = \overline{0, l}, \tag{20}$$

при начальных условиях $\mu_{00} = a_{00} = 1$, $\mu_{i,-1} = \mu_{-1,j} = 0$. Умножим каждое из уравнений (19), содержащее ε_{ij}, на $(-1)^{i+j}a_{r-i,l-j}\mu_{r-i,l-j}$ соответственно и почленно их просуммируем. С учетом $x_{10} = x_{01} = a_{rl}$ получим

$$a_{rl} = \mu_{rl}^{-1}\left[(-1)^{r+l+1}q_{rl} + \sum_{\substack{i+j=3 \\ 0\leqslant i\leqslant r,\, 0\leqslant j\leqslant l}}^{r+l} (-1)^{i+j}\varepsilon_{ij}a_{r-i,l-j}\mu_{r-i,l-j}\right], \tag{21}$$

так как с учетом (18) $\varepsilon_{ij} = 0$, если $i + j = 2$. Остальные x_{ij} находим по рекуррентной формуле

$$x_{ij} = -a_{r-i+1,l-j}x_{i-1,j} - a_{r-i,l-j+1}x_{i,j-1} + \varepsilon_{ij} \tag{22}$$

при начальных условиях $x_{i,-1} = x_{-1,j} = 0$, $x_{10} = x_{01} = a_{rl}$.

Теорема 1. *ВЦД (6) с элементами $b_{i(k)}$ вида (9), вычисленными по предложенному выше алгоритму, является соответствующей двойному ряду (3). Алгоритм преобразования ряда (3) в ВЦД (6) выполним тогда, когда все $\mu_{ij} \neq 0$, $i + j \geqslant 2$.*

Доказательство. Для компактной записи индексов элементов (9) ВЦД (6) используем обозначение

$$\nu_n(i_1, i_2, \dots, i_n) = \nu_n = 2n - (i_1 + i_2 + \dots + i_n),\ n = 1, 2, \dots,\ i_k = 1, 2,\ k = \overline{1, n},$$

Отсюда следует $\nu_n = \nu_{n-1} + 2 - i_n$, $n = 1, 2, \dots, \nu_0 = 0$. Учитывая (9), (15) в предположении неотрицательности индексов, имеем

$$a_{\nu_n, n-\nu_n} = q_{10}^{(\nu_n - 1, n-\nu_n)} = q_{01}^{(\nu_n, n-\nu_n-1)}.$$

Пусть $f_n(z)$ обозначает n-ю подходящую дробь ВЦД (6). Тогда

$$f_n(z) - q_{00} = \sum_{i_1=1}^{2} \frac{a_{\nu_1, 1-\nu_1} z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{2} \frac{a_{\nu_2, 2-\nu_2} z_{i_2}}{1} + \dots + \sum_{i_n=1}^{2} \frac{a_{\nu_n, n-\nu_n} z_{i_n}}{1}.$$

Свернем эту дробь снизу вверх с учетом (14), (15). На первом шаге получим

$$\Big(1 + \sum_{i_n=1}^{2} a_{\nu_n, n-\nu_n} z_{i_n}\Big)^{-1} = (1 + a_{\nu_{n-1}+1, n-1-\nu_{n-1}} z_1 + a_{\nu_{n-1}, n-\nu_{n-1}} z_2)^{-1} =$$

$$= (1 + q_{10}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_1 + q_{01}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_2)^{-1} = p_{10}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_1 + $$
$$+ p_{01}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_2 + O(z^2).$$

После второго шага имеем

$$\Big[1 + \sum_{i_{n-1}=1}^{2} a_{\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1}} z_{i_{n-1}} (1 + p_{10}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_1 + p_{01}^{(\nu_{n-1}, n-1-\nu_{n-1})} z_2 +$$
$$+ O(z^2))\Big]^{-1} = [1 + q_{10}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_1 (1 + p_{10}^{(\nu_{n-2}+1, n-2-\nu_{n-2})} z_1 +$$
$$+ p_{01}^{(\nu_{n-2}+1, n-2-\nu_{n-2})} z_2) + q_{01}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_2 (1 + p_{10}^{(\nu_{n-2}, n-1-\nu_{n-2})} z_1 +$$
$$+ p_{01}^{(\nu_{n-2}, n-1-\nu_{n-2})} z_2) + O(z^3)]^{-1} = \Big[1 + \sum_{\substack{i+j=0\\ i\geqslant 0, j\geqslant 0}}^{2} q_{ij}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_1^i z_2^j +$$
$$+ O(z^3)\Big]^{-1} = 1 + \sum_{\substack{i+j=0\\ i\geqslant 0, j\geqslant 0}}^{2} p_{ij}^{(\nu_{n-2}, n-2-\nu_{n-2})} z_1^i z_2^j + O(z^3),$$

после $(n-1)$-го шага будем иметь

$$\sum_{i_1=1}^{2} a_{\nu_1, 1-\nu_1} z_{i_1} \Big(1 + \sum_{\substack{i+j=1\\ i\geqslant 0, j\geqslant 0}}^{n-1} p_{ij}^{(\nu_1, 1-\nu_1)} z_1^i z_2^j + O(z^n)\Big) =$$
$$= q_{10}^{(0,0)} z_1 \Big(1 + \sum_{\substack{i+j=1\\ i\geqslant 0, j\geqslant 0}}^{n-1} p_{ij}^{(1,0)} z_1^i z_2^j\Big) + q_{01}^{(0,0)} z_2 \Big(1 + \sum_{\substack{i+j=1\\ i\geqslant 0, j\geqslant 0}}^{n-1} p_{ij}^{(0,1)} z_1^i z_2^j\Big) + O(z^{n+1}) =$$
$$= \sum_{\substack{i+j=1\\ i\geqslant 0, j\geqslant 0}}^{n} q_{ij}^{(0,0)} z_1^i z_2^j + O(z^{n+1}) = \sum_{\substack{i+j=1\\ i\geqslant 0, j\geqslant 0}}^{n} q_{ij} z_1^i z_2^j + O(z^{n+1}),$$

так как $q_{ij}^{(0,0)} = q_{ij}$ $i, j = 0, 1, 2, \dots$.

Утверждение. *Если ряд (3) является разложением функции $f(z_1+z_2)$, то при выполнении условий теоремы 1 соответствующая ВЦД (5) с элементами $b_{i(k)}$ вида (9) вырождается в цепную дробь*

$$a_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(z_1+z_2)}{1}. \tag{23}$$

Доказательство. Если ряд (3) является разложением функции $f(z_1+z_2)$, то $q_{ij}=\binom{i+j}{i}q_{i+j}$, $i,j=0,1,2,\ldots$. Учитывая (16), (17), имеем

$$a_{00}=q_0,\quad a_{10}=a_{01}=a_1=q_1,\quad a_{20}=a_{11}=a_{02}=a_2=-q_2q_1^{-1};$$

$$q_{10}^{(1,0)}=q_{10}^{(0,1)}=q_{01}^{(1,0)}=q_{01}^{(0,1)}=a_2,\quad p_{10}^{(1,0)}=p_{10}^{(0,1)}=p_{01}^{(1,0)}=p_{01}^{(0,1)}=-a_2.$$

Докажем методом математической индукции по k, что в предположениях утверждения

$$q_{ij}^{(n,m)}=(-1)^{i+j+1}\binom{i+j}{i}L_{i+j,n+m},\ p_{ij}^{(n,m)}=(-1)^{i+j}\binom{i+j}{i}K_{i+j,n+m}, \tag{24}$$

где $n+m+i+j=k$, $1\leqslant n+m\leqslant k-1$, $1\leqslant i+j\leqslant k-1$, $k=2,3,\ldots$, $L_{i+j,n+m}$, $K_{i+j,n+m}$ — некоторые константы. При $k=2$ равенства (24) справедливы и $L_{1,1}=K_{1,1}$. Пусть соотношения (24) выполняются при $n+m+$ $+i+j\leqslant k$. Докажем их справедливость при $n+m+i+j=k+1$. В частности, из (24) при $n+m+i+j\leqslant k$, $1\leqslant i+j\leqslant k$ следует

$$a_{ij}=q_{10}^{(i-1,j)}=L_{1,i+j-1}=a_{i+j},\ \text{если}\ i\geqslant 1,$$

$$a_{ij}=q_{01}^{(i,j-1)}=L_{1,i+j-1}=a_{i+j},\ \text{если}\ j\geqslant 1.$$

Используя (19), получаем

$$\mu_{ij}=\binom{i+j}{i}\prod_{s=1}^{i+j-1}a_s,\ \text{если}\ i,j=\overline{0,k+1},\ 2\leqslant i+j\leqslant k+1.$$

Учитывая предположение индукции, известные тождества из комбинаторики [8], формулы (14), обозначения (13) в случае $n+m+i+j=k+1$, $2\leqslant i+j\leqslant k$, имеем

$$\delta_{ij}^{(n,m)}=\sum_{k+l=1}^{i+j-1}p_{i-k,j-l}^{(n,m)}q_{kl}^{(n,m)}=(-1)^{i+j}\sum_{k+l=1}^{i+j-1}\binom{i+j-k-l}{i-k}\binom{k+l}{k}\times$$

$$\times K_{i+j-k-l,n+m}L_{k+l,n+m}=(-1)^{i+j}\sum_{r=1}^{i+j-1}K_{i+j-r,n+m}L_{r,n+m}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{r}\binom{i+j-r}{i-k}\binom{r}{k}=(-1)^{i+j}\binom{i+j}{i}M_{i+j,n+m}.$$

Из (18) вытекает

$$\varepsilon_{ij}=a_{r+l-i-j+1}\left(\delta_{i-1,j}^{(r-i+1,l-j)}+\delta_{i,j-1}^{(r-i,l-j+1)}\right)=(-1)^{i+j+1}\binom{i+j}{i}\times$$

$$\times M_{i+j-1,r+l-i-j-1}a_{r+l-i-j+1},$$

если $i=\overline{0,r}$, $j=\overline{0,l}$, $3\leqslant i+j\leqslant k+1$, $r=\overline{0,k+1}$, $l=\overline{0,k+1}$, $r+l=$ $=\overline{0,k+1}$. Таким образом, учитывая (21), где $r=\overline{0,k+1}$, $l=\overline{0,k+1}$, $r+l=k+1$, имеем

$$a_{rl}=(-1)^{r+l+1}q_{r+l}\left(\prod_{s=1}^{r+l-1}a_s\right)^{-1}-\sum_{p=3}^{r+l}\left(\prod_{s=r+l-p+2}^{r+l-1}a_s\right)^{-1}M_{p-1,r+l-p+1}=a_{r+l}.$$

Так как

$$p_{ij}^{(n,m)} = -q_{ij}^{(n,m)} + \delta_{ij}^{(n,m)} = -q_{ij}^{(n,m)} + (-1)^{i+j}\binom{i+j}{i} M_{i+j,n+m},$$

то для завершения доказательства утверждения достаточно убедиться в справедливости равенств (24) только для $q_{ij}^{(n,m)}, n+m+i+j=k+1$. Пусть r и l — произвольные фиксированные индексы такие, что $r+l=k+1$, $r, l=\overline{0, k+1}$. Учитывая (22) и используя метод математической индукции, находим

$$x_{ij} = -a_{k+1-i-j}(x_{i-1,j}+x_{i,j-1}) + \varepsilon_{ij} = (-1)^{i+j+1} a_{k+1-i-j} \times$$

$$\times \left[L_{i+j-1,k-i-j+1} \left(\binom{i+j-1}{i-1} + \binom{i+j-1}{i} \right) + \binom{i+j}{i} M_{i+j-1,k-i-j+1} \right] =$$

$$= (-1)^{i+j+1} \binom{i+j}{i} L_{i+j,k-i-j}.$$

ВЦД (6), у которой все $a_{ij}=a_{i+j}$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, тождественна непрерывной дроби (23).

Последнее утверждение не справедливо для других рассмотренных ранее типов соответствующих ВЦД. В качестве контрпримера рассмотрим соответствующие ВЦД (4) и (8), являющиеся разложением функции e^{x+y}. Их вторые подходящие дроби соответственно равны

$$g_2 = 1 + \frac{x}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{y}{1-\frac{1}{2}y} + xy =$$

$$= \frac{(1+xy)(2-x)(2-y)+4(x+y-xy)}{(2-x)(2-y)},$$

$$h_2 = 1 + \frac{y}{1-\frac{1}{2}y} + \frac{x}{1-y-\frac{1}{2}x} = \frac{4+2x-2y-2y^2-3xy}{(2-y)(2-2y-x)}.$$

Вторая же подходящая дробь непрерывной дроби (23), в которую разлагается функция e^{x+y}, равна

$$f_2 = 1 + \frac{x+y}{1-\frac{1}{2}(x+y)} = \frac{1+x+y}{2-x-y}.$$

Очевидно, $f_2 \neq g_2$, $f_2 \neq h_2$.

Исследуем сходимость построенной соответствующей ВЦД. Используем признаки сходимости многомерных g-дробей [6].

Теорема 2. *Если* $|a_{ij}| \leqslant 1/4$, $i+j \geqslant 2$, *то ВЦД* (6) *с элементами* $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$ *вида* (9) *сходится в области* $|z_1|+|z_2| \leqslant 1$.

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{i,j\to\infty} a_{ij}=0$, *то ВЦД* (6) *с элементами* $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$ *вида* (9) *сходится к функции* f, *мероморфной в* $\mathbb{C}^2$ *и голоморфной в области* $|z_i| \leqslant 1/8\alpha$, $i=1,2$, *где* $\alpha = \sup|a_{ij}|$.

Рассмотрим вопрос о многомерном аналоге признака сходимости предельно периодической непрерывной дроби Ван Флека [1].

Теорема 4. *Пусть*

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1} \qquad (25)$$

— *многомерная С-дробь такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{i(k)} = a \neq 0,\ a \in \mathbb{C}$, *и*

$$\Omega^{(N)} = \bigcup_{\gamma\in(-\pi/2,\pi/2)} \Omega^{(N)}_{a,\gamma}, \tag{26}$$

где $\Omega^{(N)}_{a,\gamma} = \Omega_{a,\gamma} \times \Omega_{a,\gamma} \times \ldots \times \Omega_{a,\gamma}$ — *декартово произведение* N *областей*

$$\Omega_{a,\gamma} = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| - \operatorname{Re}[we^{(\arg a - 2\gamma)i}] < \frac{\cos^2\gamma}{2N|a|} \right\}. \tag{27}$$

Тогда 1) *если* K — *произвольный компакт области* (26), *то существует область* $D_K \subset \Omega^{(N)}$ *и номер* n, *зависящий от* K, *такой что для произвольного мультииндекса* $i(n)$ *ВЦД* $\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=n}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}\right)^{-1}$ *равномерно сходится на произвольных компактах* D_K *к функции, голоморфной в* D_K; 2) *ВЦД* (25) *сходится к функции* f, *мероморфной в* $\Omega^{(N)}$ *или тождественно равной* ∞.

Доказательство. Вложим множество K в связный компакт K', где K' — множество точек отрезков, соединяющих точки K с началом координат. Очевидно, $K' \subset \Omega^{(N)}$. Пусть $U_r(z) = \{w \in \mathbb{C}^N : |w_i - z_i| < r_i,\ i = \overline{1, N}\}$ — открытый поликруг. Для каждой точки $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_N^{(0)}) \in K'$ существует угол $\gamma_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ такой, что $z^{(0)} \in \Omega^{(N)}_{a,\gamma_0}$. Так как $\Omega^{(N)}_{a,\gamma_0}$ — открытое множество, тосуществует поликруг $U_{3r^{(0)}}(z^{(0)}) \subset \Omega^{(N)}_{a,\gamma_0}$. Каждую точку $z^{(0)} \in K'$ покроем поликругом $U_{r^{(0)}}(z^{(0)})$. Так как K' — ограниченное замкнутое множество, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{r^{(k)}}(z^{(k)})\}_{k=1}^{s}$, где $z^{(k)} \in K'$, $k = \overline{1, s}$, $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_N^{(k)})$. Пусть $D_K = \bigcup\limits_{k=1}^{s} U_{r^{(k)}}(z^{(k)})$. Зафиксируем k, $1 \leqslant k \leqslant s$. Если $w \in \overline{U}_{2r^{(k)}}(z^{(k)})$ и $\varepsilon_k = 1 - 2N\delta\cos^{-2}\gamma_k$, где $\overline{U}$ замыкание множества U, угол γ_k определяется из условия

$$U_{3r^{(k)}}(z^{(k)}) \subset \Omega^{(N)}_{a,\gamma_k}; \qquad \delta = \max(\delta_m,\ m = \overline{1, N}),$$

$$\delta_m = \max(|aw_m| - \operatorname{Re}(aw_m e^{-2\gamma i}) : |w_m - z_m^{(k)}| = 2r_m^{(k)}),$$

то легко проверить, что

$$aw_m \in P_{\varepsilon_k,\gamma_k}, \quad m = \overline{1, N}, \quad P_{\varepsilon,\gamma} = \Omega_{(1-\varepsilon)^{-1},\gamma}.$$

Пусть

$$\rho_m^{(k)} = \min(|\xi_m - az_m| : \xi_m \in \partial P_{\varepsilon_k,\gamma_k}, |z_m - z_m^{(k)}| = r_m^{(k)}).$$

Возьмем номер n настолько большим, что

$$|a_{i(p)} - a| \leqslant \min(\rho_m^{(k)}(r_m^{(k)} + |z_m^{(k)}|)^{-1} : m = \overline{1, N},\ k = \overline{1, s})$$

для всех мультииндексов $i(p)$ таких, что $p \geqslant n$. Тогда для тех же значений индексов и каждого $z \in \overline{U}_{r^{(k)}}(z^{(k)})$ будем иметь

$$|a_{i(p)} z_m - az_m| \leqslant \rho_m^{(k)}.$$

Отсюда следует, что для каждого $z \in \overline{U}_{r^{(k)}}(z^{(k)})$ элементы $a_{i(p)} z_{i_p}$, $p = n, n+1, \ldots, i_k = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, p}$, ВЦД, фигурирующей в условии 1 теоремы, принадлежат ограниченному множеству параболической области $P_{\varepsilon_k,\gamma_k}$. В силу теоремы 3.23 [6] эта дробь сходится в каждой точке $z \in \overline{U}_{r^{(k)}}(z^{(k)})$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться многомерным аналогом теоремы Монтеля (см., например, теорему 2.17 [6]). В случае $N=1$ область (26) совпадает с плоскостью с разрезом

$$z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(az + \frac{1}{4} \right) \right| < \pi.$$

Следствие. *Пусть* $\lim\limits_{i,j\to\infty} a_{ij} = a \neq 0$ *и* $\Omega^{(2)}$ *определяется согласно* (26), (27). *Тогда ВЦД* (6) *с элементами* $b_{i(k)}$ *вида* (9) *сходится к функции* f, *мероморфной* $\Omega^{(2)}$ *или тождественно равной* ∞.

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.— М.: Мир, 1985.— 414 с.
2. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1978.— № 7.— С. 614—617.
3. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two variable generalisation of the Stieltjes-type continued fraction // J. Comp. and Appl. Math.— 1978.— 4, N 3.— P. 181—190.
4. *Cuyt A., Verdonk B.* Multivariate rational interpolation // Computing.— 1985.— N 4.— P. 41—61.
5. *Siemaszko W.* Branched continued fraction for double series // J. Comp. and Appl. Math.— 1980.— N 2.— P. 121—125.
6. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби.— Киев : Наук. думка, 1986.— 176 с.
7. *Siemaszko W.* Thiele-type barnched continued fraction for two-variable functions // J. Comp. Appl. and Math.— 1983.— N 9.— P. 137—153.
8. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика.— М. : Наука, 1969.— 328 с.

Получено 06.07.9)