УДК 517.5

С. А. ПИЧУГОВ, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

Формула Риса для мультипликаторных операторов в пространстве тригонометрических полиномов

Для широкого класса операторов свертки в пространстве тригонометрических полиномов одной переменной приводится простое доказательство формулы Риса, основанное на приближении ядра свертки функциями, ортогональными полиномам.

Для широкого класу операторів згортки в просторі тригонометричних поліномів однієї змінної наводиться просте доведення формули Ріса, основане на наближенні ядра згортки функціями, ортогональними поліномам.

Пусть $\mathscr{T}_{2n+1}$ — пространство действительнозначных тригонометрических полиномов T_n,

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \ c_{-k} = \bar{c}_k, \ k = 1, \ldots, n.$$

Известное неравенство С. Н. Бернштейна

$$\| T_n^{(r)} \| \leqslant n^r \| T_n \|, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

является непосредственным следствием формулы Риса для оператора дифференцирования

$$T_n'(x) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_n(x + x_k), \tag{2}$$

где $x_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$ (см., например, [1], гл. 10). При этом (1) верно для любой нормы, инвариантной по сдвигу.

Аналогичные (2) формулы известны для оператора тригонометрического сопряжения и различных комбинаций этих двух операторов [1] (гл. 10). Доказательства формул типа (2) основаны на интерполяционных свойствах ядер соответствующих операторов.

В работах [2, 3] доказаны аналогичные (2) формулы, но с бесконечным числом узлов, т. е. формулы типа

$$(AT_n)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k T_n(x + x_k), \tag{3}$$

для широкого класса операторов свертки.

Идея доказательства (3) состоит в разложении в ряд Фурье соответствующих оператору мультипликаторов. При этом необходимым условием является абсолютная сходимость этого ряда Фурье.

Ввиду 2π-периодичности функции T_n для оператора A из формулы (3) можно получить формулу Риса типа (2). Однако для формулы Риса ограничение на поведение ряда Фурье мультипликатора представляется неестественным.

В настоящей статье предложено простое доказательство формулы Риса, основанное на приближении ядра оператора функциями, ортогональными полиномам. При этом мы не требуем указанного выше ограничения.

Пусть $A: \mathscr{T}_{2n+1} \to \mathscr{T}_{2n+1}$ — мультипликаторный оператор с мультипликаторами $\{\mu_k\}_{k=-n}^{n}$, т. е. оператор свертки с ядром $U_n(x)$:

$$(AT_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x - y) U_n(y)\, dy = \sum_{k=-n}^{n} \mu_k c_k e^{ikx},$$

где

$$U_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mu_k e^{ikx}, \ \mu_{-k} = \bar{\mu}_k.$$

Определение. *Скажем, что мультипликаторный оператр* A *принадлежит классу* $\mathcal{R}_n$, *если при некотором значении* φ *мультипликаторы* μ_k *имеют вид*

$$\mu_k = \lambda_k e^{i\varphi}, \ \ \lambda_k \geqslant 0, \ \ k = 1, \dots, n;$$

$$\lambda_n \neq 0; \ \ \mu_0 = 0.$$

С данным оператором A из $\mathcal{R}_n$ будем связывать специальный четный полином

$$K_n(A; x) \equiv K_n(x) = \lambda_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \cos kx.$$

Через $t_n^{\perp}$ обозначим функции, ортогональные на периоде всем полиномам степени не выше n.

Теорема. *Пусть* $A \in \mathcal{R}_n$. *Тогда для любого полинома* T_n *имеет место формула Риса*

$$(AT_n)(x) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k K_n(A; x_k)\, T_n(x - x_k), \tag{4}$$

где $x_k = \dfrac{k\pi - \varphi}{n}$.

Доказательство. Для любой функции $t_n^{\perp}$

$$(AT_n)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(-y)\,(U_n(y) + t_n^{\perp}(y))\,dy.$$

Выберем $t_n^{\perp}$ специальным образом. Положим

$$t_n^{\perp}(y) = e^{i(ny+\varphi)}\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} e^{iky} + e^{-i(ny+\varphi)}\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} e^{-ikg}.$$

В этом случае

$$U_n(y) + t_n^{\perp}(y) = e^{i(ny+\varphi)} K_n(y) + e^{-i(ny+\varphi)} K_n(y) = K_n(y)\, 2\cos(ny + \varphi). \tag{5}$$

Пусть $D_{2n}(x) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{2n} \cos kx$ — ядро Дирихле. Тогда

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k D_{2n}\left(x - k\frac{\pi}{n}\right) = 2\cos nx. \tag{6}$$

Полагая в (6) $x = y + \varphi n^{-1}$ и подставляя в (5), получаем

$$(AT_n)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(-y)\, K_n(y)\, \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k D_{2n}\left(y - \frac{k\pi - \varphi}{n}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k T_n\left(-\frac{k\pi - \varphi}{n}\right) K_n\left(\frac{k\pi - \varphi}{n}\right).$$

Применим последнюю формулу к полиному $P_n(y) = T_n(y + x)$ и получим (4).

С л е д с т в и е 1. *Для любой нормы, инвариантной по сдвигу, и любого оператора A из $\mathcal{R}_n$*

$$\| AT_n \| \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \left| K_n\left(A;\ \frac{k\pi - \varphi}{n}\right)\right| \| T_n \|. \tag{7}$$

Отметим важный частный случай, при котором гарантируется точность неравенства (7).

С л е д с т в и е 2. *Пусть оператор A из $\mathcal{R}_n$ такой, что все значения $K_n\left(A;\ \frac{k\pi - \varphi}{n}\right)$ одного знака, $k = 1, \ldots, 2n$. Тогда для любой нормы, инвариантной по сдвигу, имеет место точное неравенство*

$$\| AT_n \| \leqslant | \lambda_n | \| T_n \|. \tag{8}$$

Действительно, в этом случае для $\varepsilon = 1$ или -1

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \left| K_n\left(A;\ \frac{k\pi - \varphi}{n}\right)\right| = \varepsilon\, \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} K_n\left(A;\ \frac{k\pi - \varphi}{n}\right) = \varepsilon \lambda_n.$$

Для полинома $T_n(x) = \cos nx$ имеем $(AT_n)(x) = \lambda_n \cos(nx + \varphi)$. Отсюда следует точность (8).

Отметим достаточное условие знакопостоянства четного полинома $K_n(A; x)$ для всех $x \in [0, 2\pi)$ в терминах $\{\lambda_n\}$ [1, с. 294]. Применяя два раза преобразование Абеля, получаем

$$K_n(A; x) = 2 \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\, \Delta^2 \lambda_{n-k} F_k(x) + 2n F_{n-1}(x)\, \lambda_1,$$

где $\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$, $\Delta^2\lambda_k = \Delta\lambda_k - \Delta\lambda_{k+1}$, F_k — ядра Фейера, $F_k(x) \geqslant 0$.

С л е д с т в и е 3. *Пусть оператор A из $\mathcal{R}_n$ такой, что*

$$\Delta^2 \lambda_{n-k} \geqslant 0,\ \ k = 0, 1, \ldots, n-2;\ \ \lambda_1 \geqslant 0. \tag{9}$$

Тогда для любой нормы, инвариантной по сдвигу, имеет место точное неравенство

$$\| AT_n \| \leqslant \lambda_n \| T_n \|.$$

Для примера рассмотрим оператор дифференцирования порядка r, где $r \geqslant 1$ — произвольное (не обязательно целое). В этом случае

$$\mu_0 = 0;\ \ \mu_k = k^r e^{i\frac{r\pi}{2}},\ \ k > 0;\ \ \mu_k = |k|^r e^{-i\frac{r\pi}{2}},\ k < 0;$$

Условия (9) очевидно выполнены, и получаем точное неравенство С. Н. Бернштейна (1) для произвольных $r \geqslant 1$.

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 2.— 537 с.
2. *Civin P.* Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J.— 1941.— 8.— P. 656—665.
3. *Boas R. P. Jr.* Entire Functions.— New York, 1954.— 150 p.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 1.— 615 с.

Получено 28.12.89

Следствие 1. *Для любой нормы, инвариантной по сдвигу, и любого оператора A из $\mathcal{R}_n$*

$$\| AT_n \| \leqslant \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \left| K_n \left(A; \frac{k\pi - \varphi}{n} \right) \right| \| T_n \|. \tag{7}$$

Отметим важный частный случай, при котором гарантируется точность неравенства (7).

Следствие 2. *Пусть оператор A из $\mathcal{R}_n$ такой, что все значения $K_n\left(A; \dfrac{k\pi - \varphi}{n}\right)$ одного знака, $k = 1, \ldots, 2n$. Тогда для любой нормы, инвариантной по сдвигу, имеет место точное неравенство*

$$\| AT_n \| \leqslant | \lambda_n | \| T_n \|. \tag{8}$$

Действительно, в этом случае для $\varepsilon = 1$ или -1

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \left| K_n \left(A; \frac{k\pi - \varphi}{n} \right) \right| = \varepsilon \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} K_n \left(A; \frac{k\pi - \varphi}{n} \right) = \varepsilon \lambda_n.$$

Для полинома $T_n(x) = \cos nx$ имеем $(AT_n)(x) = \lambda_n \cos(nx + \varphi)$. Отсюда следует точность (8).

Отметим достаточное условие знакопостоянства четного полинома $K_n(A; x)$ для всех $x \in [0, 2\pi)$ в терминах $\{\lambda_n\}$ [1, с. 294]. Применяя два раза преобразование Абеля, получаем

$$K_n(A; x) = 2 \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \Delta^2 \lambda_{n-k} F_k(x) + 2n F_{n-1}(x) \lambda_1,$$

где $\Delta \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$, $\Delta^2 \lambda_k = \Delta \lambda_k - \Delta \lambda_{k+1}$, F_k — ядра Фейера, $F_k(x) \geqslant 0$.

Следствие 3. *Пусть оператор A из $\mathcal{R}_n$ такой, что*

$$\Delta^2 \lambda_{n-k} \geqslant 0, \ \ k = 0, 1, \ldots, n-2; \ \ \lambda_1 \geqslant 0. \tag{9}$$

Тогда для любой нормы, инвариантной по сдвигу, имеет место точное неравенство

$$\| AT_n \| \leqslant \lambda_n \| T_n \|.$$

Для примера рассмотрим оператор дифференцирования порядка r, где $r \geqslant 1$ — произвольное (не обязательно целое). В этом случае

$$\mu_0 = 0; \ \ \mu_k = k^r e^{i\frac{r\pi}{2}}, \ \ k > 0; \ \ \mu_k = |k|^r e^{-i\frac{r\pi}{2}}, \ k < 0;$$

Условия (9) очевидно выполнены, и получаем точное неравенство С. Н. Бернштейна (1) для произвольных $r \geqslant 1$.

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 2.— 537 с.
2. *Civin P.* Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J.— 1941.— 8.— P. 656—665.
3. *Boas R. P. Jr.* Entire Functions.— New York, 1954.— 150 p.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 1.— 615 с.

Получено 28.12.89