УДК 517.54

В. И. РЯЗАНОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк)

О замыкании классов квазиконформных отображений с интегральными ограничениями

Получена теорема замыкания некомпактных классов квазиконформных отображений с ограничениями на характеристики М. А. Лаврентьева интегрального типа.

Одержана теорема замикання некомпактних класів квазіконформних відображень з обмеженнями на характеристики М. А. Лаврентьєва інтегрального типу.

Настоящая статья посвящена изучению классов квазиконформных отображений с ограничениями на характеристики Лаврентьева интегрального типа. Исследования экстремальных задач при различных ограничениях такого рода проводились многими авторами. Историю вопроса и приложения можно найти в [1]; в [2] получены необходимые и достаточные условия компактности указанных классов. В данной статье дано конструктивное описание замыкания некомпактных классов. Кроме того, получена новая теорема сходимости, которая позволяет получать всевозможные интегральные неравенства между характеристиками аппроксимирующих и предельного отображений. Все эти неравенства являются точными в соответствующем смысле.

1. Некоторые определения и обозначения. Q-квазиконформными (Q-к. к.) отображениями принято называть [3, с. 194] обобщенные гомеоморфные решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z \tag{1}$$

с $p(z) \leqslant Q$, где $Q > 1$, а $p(z) = (1 + |\mu(z)|)(1 - |\mu(z)|)^{-1}$. При этом измеримые функции $\mu(z)$ и $p(z)$ называются соответственно комплексной характеристикой и характеристикой Лаврентьева отображения $f(z)$. В дальнейшем через $\mathfrak{F}$ обозначается класс всех Q-к. к. отображений расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на себя с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$, а через $\mathfrak{F}^{\Phi}$ — его подкласс, выделяемый дополнительным интегральным ограничением вида

$$\int_E \Phi(p(z))\, dxdy \leqslant \mathrm{M}, \quad E \subset \mathbb{C}. \tag{2}$$

Здесь $\Phi(t)$ — произвольная вещественная функция, заданная на отрезке $I = [1, Q]$, а $0 < \operatorname{mes} E < \infty$.

В случае, когда

$$\inf_{1 \leqslant t \leqslant Q} \Phi(t) > -\infty, \tag{3}$$

через Ψ обозначается семейство всех непрерывных неубывающих выпуклых (вниз) функций $\varphi : I \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(t) \leqslant \Phi(t)$, $t \in I$, и

$$\Phi_0(t) = \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(t), \quad t \in I,$$

— верхняя огибающая семейства функций Ψ. Ясно, что $\Phi_0(t) \leqslant \Phi(t)$, $t \in I$. В дальнейшем Φ_0 будем называть *нижней огибающей* функции Φ.

Из общих свойств выпуклых функций и множеств [4, с. 53; 5, с. 115] получаем следующие утверждения.

Предложение 1. *При условии* (3) *нижняя огибающая* $\Phi_0 : I \to \mathbb{R}$ *функции* $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *существует и представляет собой наибольшую непрерывную неубывающую выпуклую на отрезке* I *функцию, график которой лежит ниже графика* Φ.

Предложение 2. *Надграфик нижней огибающей* Φ_0 *функции* Φ *при выполнении условия* (3) *представляет собой пересечение всех полуплоскостей, опорных к надграфику* Φ *с углами наклона* $\vartheta \in [0, \pi/2]$ *и* $\vartheta = -\pi/2$.

Лемма 1. *График нижней огибающей* Φ_0 *функции* Φ *при условии* (3) *состоит из замкнутых отрезков прямых, опорных к графику* Φ, *с углами наклона* $\vartheta \in [0, \pi/2]$. *При этом концы этих отрезков, возможно вырождающихся в точку, принадлежат замыканию графика* Φ *по крайней мере для всех* $\vartheta \in (0, \pi/2]$. *При* $\vartheta = \pi/2$ *соответствующий отрезок всегда вырождается в точку. При* $\vartheta = 0$ *левый конец такого отрезка — это точка* $(1, \inf \Phi)$, *которая, в отличие от правого конца, не всегда принадлежит замыканию графика* Φ.

2. Теорема замыкания. Рассмотрим вопрос о замыкании класса $\mathfrak{F}^{\Phi}$ относительно локально равномерной (л. р.) сходимости. При этом помимо неравенства (3) будем предполагать выполненным условие

$$\inf_{1 \leqslant t \leqslant Q} \Phi(t) < \mathrm{M}/\mathrm{mes}\, E. \tag{4}$$

Отметим, что неравенства (3) и (4) отсекают только тривиальные случаи. Если $\inf \Phi > \mathrm{M}/\mathrm{mes}\, E$, то класс $\mathfrak{F}^{\Phi}$ пуст. Если $\inf \Phi = -\infty$, то замыкание класса $\mathfrak{F}^{\Phi}$ совпадает со всем классом $\mathfrak{F}$. Случай $\inf \Phi = \mathrm{M}/\mathrm{mes}\, E$ исследуется также просто.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(t) : I \to \mathbb{R}$ — *произвольная функция, удовлетворяющая условиям* (3) *и* (4). *Тогда в топологии л. р. сходимости*

$$\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}} = \mathfrak{F}^{\Phi_0}, \tag{5}$$

где $\Phi_0(t) : I \to \mathbb{R}$ — *нижняя огибающая функции* $\Phi(t)$.

Заметим, что полученный в результате замыкания класс $\mathfrak{F}^{\Phi_0}$ согласно критерию работы [2] компактен. Остановимся на наиболее важных частных случаях. При $\Phi(t) = (t-1)(t+1)^{-1}$ получаем следствие.

Следствие 1. *Замыкание* (*некомпактного*) *подкласса* $\mathfrak{F}$, *выделяемого соотношением* $\int\limits_E |\mu(z)|\, dxdy \leqslant \mathrm{M}$, *совпадает с* (*компактным*) *подклассом* $\mathfrak{F}$, *выделяемым ограничением*

$$\int\limits_E |\mu(z)|\,(1 - |\mu(z)|)^{-1} dxdy \leqslant \frac{Q+1}{2}\, \mathrm{M}.$$

Имеет место более общее утверждение.

Следствие 2. *Если функция* $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *выпукла вверх и не убывает, то в соотношении* (5)

$$\Phi_0(t) = \Phi(1) + \frac{\Phi(Q) - \Phi(1)}{Q-1}(t-1).$$

Последнее справедливо также в случае, когда $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *просто выпукла вверх и* $\Phi(Q) \geqslant \Phi(1)$.

Следствие 3. *Если* $\min \Phi$ *достигается на правом конце интервала* I, *то замыкание класса* $\mathfrak{F}^{\Phi}$ *совпадает с полным классом* $\mathfrak{F}$.

3. Теорема сходимости. На самом деле можно освободиться от нормировки класса $\mathfrak{F}$ и, переходя к произвольной области $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, получить:

Теорема 2. *Пусть* g_n, $n = 1, 2, \ldots$, — *последовательность* Q-*к. к. отображений области* $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, *которая сходится л. р. к отображению* g. *Тогда для любой непрерывной функции* $\Phi(t) : I \to \mathbb{R}$ *характеристики*

Лаврентьева удовлетворяют неравенству

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E \Phi(p_n(z))\,dxdy \geqslant \int_E \Phi_0(p(z))\,dxdy, \qquad (6)$$

где $\Phi_0(t): I_\infty \to \mathbb{R}$ — *нижняя огибающая* Φ, *а* $E \subseteq D$ — *произвольное измеримое множество с* $\operatorname{mes} E < \infty$.

Отсюда, в частности, вытекает следствие.

Следствие 4. *Для любой непрерывной неубывающей выпуклой вниз функции* $\Phi: I \to \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E \Phi(p_n(z))\,dxdy \geqslant \int_E \Phi(p(z))\,dxdy.$$

4. **Доказательства основных результатов**. Прежде, чем переходить к доказательствам теорем, сформулируем одну лемму, которая является прямым следствием известного результата Штребеля [6] и слабой сходимости якобианов Q-к. к. отображений [7—8].

Лемма 2. *Пусть* f_n *и* g_n, $n = 1, 2, \ldots$,— *последовательности* Q-*к. к. отображений, заданных в областях* D *и* $W \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, *сходящихся л. р. к отображениям* f *и* g *соответственно, и* μ_n, ν_n, μ, ν — *их комплексные характеристики. Если при этом* $\mu_n(z) - \nu_n(z) \to 0$ *почти всюду на некотором измеримом множестве* $E \subseteq D \cap W$, *то* $\mu(z) = \nu(z)$ *почти всюду на* E.

Доказательство теоремы 1. Заметим прежде всего, что поскольку $\Phi_0(t) \leqslant \Phi(t)$, то $\mathfrak{F}^{\Phi} \subseteq \mathfrak{F}^{\Phi_0}$, и так как согласно критерию работы [2] класс $\mathfrak{F}^{\Phi_0}$ компактен, получаем, что $\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}} \subseteq \mathfrak{F}^{\Phi_0}$.

Докажем, что имеет место и обратное включение. Действительно, пусть $\mathfrak{M}^{\Phi_0}$ — класс всех комплексных характеристик отображений из $\mathfrak{F}^{\Phi_0}$ Покажем, что в $\mathfrak{M}^{\Phi_0}$ содержится всюду плотное относительно сходимости п. в. подмножество ступенчатых на множестве E функций. Итак, пусть $\mu(z) = q(z)\,e^{i\vartheta(z)} \in \mathfrak{M}^{\Phi_0}$, где $q(z): \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$, $\vartheta(z): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — некоторые измеримые функции. Полагаем $q_m(z) = k2^{-m}$ и $\vartheta_m(z) = l2^{-m}$ на каждом множестве:

$$E_{kl}^m = \{z \in E : k2^{-m} \leqslant q(z) < (k+1)\,2^{-m}, \quad l2^{-m} \leqslant \vartheta(z) < (l+1)\,2^{-m}\},$$

где $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$. Отметим, что все множества E_{kl}^m измеримы [9, с. 28]. Поэтому все функции $q_m(z)$, $\vartheta_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots$, также измеримы, $0 \leqslant q_m(z) \leqslant q(z)$, $|q(z) - q_m(z)| \leqslant 2^{-m}$, $|\vartheta(z) - \vartheta_m(z)| \leqslant 2^{-m}$ и, следовательно, $\mu_m(z) = q_m(z)\,e^{i\vartheta_m(z)} \in \mathfrak{M}^{\Phi_0}$, $\mu_m(z) \to \mu(z)$ п. в. при $m \to \infty$. Таким образом, в классе $\mathfrak{F}^{\Phi_0}$ существует всюду плотное относительно л. р. сходимости подмножество отображений со ступенчатыми на множестве E комплексными характеристиками [10, с. 202]. Поскольку $\overline{\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}}} = \overline{\mathfrak{F}^{\Phi}}$ [11, с. 44], то для завершения доказательства достаточно убедиться, что такие отображения принадлежат $\overline{\mathfrak{F}^{\Phi}}$.

Пусть отображение $f \in \mathfrak{F}^{\Phi_0}$ имеет на E ступенчатую комплексную характеристику

$$\mu(z) = \nu_l, \quad z \in E_l, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

и $\nu_l = q_l e^{i\vartheta_l}$, $q_l \in \mathbb{R}^+$, $\vartheta_l \in \mathbb{R}$, $p_l = (1 + q_l)(1 - q_l)^{-1}$ и $\varphi_l = \Phi_0(p_l)$. Тогда $p(z) = (1 + |\mu(z)|)(1 - |\mu(z)|)^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\int_E \Phi_0(p(z))\,dxdy \leqslant M. \qquad (7)$$

Более того, без ограничения общности можно считать, что

$$\int_E \Phi_0(p(z))\,dxdy < M. \qquad (8)$$

Действительно, если в (7) имеет место равенство, то в силу условия (4) найдется хотя бы одно $l = 1, 2, \ldots$, для которого $\varphi_l > \inf \Phi = \min \Phi_0 = \Phi_0(1)$, $\operatorname{mes} E_l > 0$. Но тогда для любого $1 \leqslant p < p_l$:

$$\frac{\Phi_0(p_l) - \Phi_0(p)}{p_l - p} \geqslant \frac{\Phi_0(p_l) - \Phi_0(1)}{p_l - 1} > 0,$$

поскольку «наклон» выпуклой функции Φ является неубывающей функцией переменной p [4, с. 59]. Таким образом, $\Phi_0(p)$ строго меньше φ_l для $1 \leqslant p < p_l$. Переходя для такого l на E_l от $\nu_l = q_l e^{i\vartheta_l}$ к $\tilde{\nu}_l = q e^{i\vartheta_l}$, $0 \leqslant q < q_l$, получаем (8). Совершая предельный переход при $q \to q_l$, можем вернуться при замыкании к исходному отображению [10, с. 202].

Доопределим функцию Φ на отрезке $[Q^{-1}, 1]$ соотношением $\Phi(t) = \Phi(t^{-1})$, $t \in [Q^{-1}, 1]$. Согласно лемме 1 точки (p_l, φ_l), $l = 1, 2, \ldots$, принадлежат отрезкам прямых, опорных к графику функции Φ. Пусть $(p_l^{(1)}, \varphi_l^{(1)})$ и $(p_l^{(2)}, \varphi_l^{(2)})$, $l = 1, 2, \ldots$,—концы этих отрезков, а $\lambda_l \in [0, 1]$—числа, определяемые из равенств

$$(p_l, \varphi_l) = \lambda_l (p_l^{(1)}, \varphi_l^{(1)}) + (1 - \lambda_l)(p_l^{(2)}, \varphi_l^{(2)}), \quad l = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, согласно той же лемме, существуют такие последовательности $p_{lm}^{(1)} \to p_l^{(1)}$ и $p_{lm}^{(2)} \to p_l^{(2)}$, что $\varphi_{lm}^{(1)} = \Phi(p_{lm}^{(1)}) \to \varphi_l^{(1)}$ и $\varphi_{lm}^{(2)} = \Phi(p_{lm}^{(2)}) \to \varphi_l^{(2)}$ при $m \to \infty$, и, таким образом,

$$p_{lm}^{(0)} = \lambda_l p_{lm}^{(1)} + (1 - \lambda_l) p_{lm}^{(2)} \to p_l, \tag{9}$$

$$\varphi_{lm}^{(0)} = \lambda_l \varphi_{lm}^{(1)} + (1 - \lambda_l) \varphi_{lm}^{(2)} \to \varphi_l. \tag{10}$$

Полагаем

$$\nu_{lm}^{(j)} = q_{lm}^{(j)} e^{i\vartheta_l}, \quad j = 0, 1, 2; \qquad l, m = 1, 2, \ldots,$$

где $q_{lm}^{(j)} = (p_{lm}^{(j)} - 1)(p_{lm}^{(j)} + 1)^{-1}$, $j = 0, 1, 2$; $l, m = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим аффинные Q-к.к. отображения

$$g_{lm}^{(j)}(z) = \frac{z + \nu_{lm}^{(j)} \bar{z}}{e^{i\alpha_l} + \nu_{lm}^{(j)} e^{-i\alpha_l}}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где $\alpha_l = (\vartheta_l + \pi)/2$, $l, m = 1, 2, \ldots$.

Заметим, что при приращении независимой переменной вида $\Delta z = h e^{i\alpha_l}$, $h > 0$, приращения $\Delta g_{lm}^{(j)} = h$, $j = 0, 1, 2$, т. е. при указанных отображениях растяжение вдоль направления $e^{i\alpha_l}$ равно единице, а прямые, параллельные вектору $e^{i\alpha_l}$, переходят в прямые, параллельные вещественной оси. Далее, при приращениях вида $\Delta z = ihe^{i\alpha_l}$, $h > 0$, приращения $\Delta g_{lm}^{(j)} = ihp_{lm}^{(j)}$.

Таким образом, при фиксированном $l = 1, 2, \ldots$ указанные отображения можно склеивать непрерывным образом с сохранением однолистности вдоль любых прямых, параллельных вектору $e^{i\alpha_l}$, простым сдвигом на комплексную постоянную. В силу устранимости аналитических дуг [3, с. 47] получаемые отображения будут Q-к. к.

Зафиксируем теперь $m = 1, 2, \ldots$ и разобьем всю плоскость на полосы, параллельные вектору $e^{i\alpha_l}$, прямыми вида $z_{lmk}(t) = te^{i\alpha_l} + ik2^{-m}e^{i\alpha_l}$, $\tilde{z}_{lmk}(t) = te^{i\alpha_l} + i(k2^{-m} + \lambda_l 2^{-m}) e^{i\alpha_l}$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Между прямыми $z_{lm0}(t)$ и $\tilde{z}_{lm0}(t)$ полагаем $f_{lm}(z) \equiv g_{lm}^{(1)}(z)$. Во всех остальных полосках принимаем по определению $f_{lm}(z) \equiv g_{lm}^{(j)}(z) + c_{lmk}^{(j)}$, где $j = 1$ между прямыми $z_{lmk}(t)$ и $\tilde{z}_{lmk}(t)$ и $j = 2$ между прямыми $\tilde{z}_{lmk}(t)$ и $z_{lm(k+1)}(t)$, а постоянные $c_{lmk}^{(j)}$ находятся при фиксированных l и $m = 1, 2, \ldots$ индукцией по $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ из условия склеивания.

Из способа построения отображений $g_{lm}(z)$ следует, что при $\Delta z = i2^{-m}e^{i\alpha_l}$ приращение Δg_{lm} имеет вид $\Delta g_{lm} = \Delta g_{lm}^{(1)} + \Delta g_{lm}^{(2)}$, где $\Delta g_{lm}^{(j)}$ — приращения $g_{lm}^{(j)}(z)$ при $\Delta z_j = ih_j e^{i\alpha_l}$, $j = 1, 2$, $h_1 = \lambda_l 2^{-m}$, $h_2 = (1 - \lambda_l) \times 2^{-m}$, т. е. $\Delta g_{lm} = i2^{-m}\{\lambda_l p_{lm}^{(1)} + (1 - \lambda_l) p_{lm}^{(2)}\} = i2^{-m} p_{lm}^{(0)}$, что совпадает с приращением $\Delta g_{lm}^{(0)}$ при $\Delta z = i2^{-m}e^{i\alpha_l}$. Однако, по построению $g_{lm}(z) \equiv g_{lm}^{(0)}(z)$ на прямой $z_{lm0}(t)$. Поэтому на любой прямой $z_{lmk}(t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеем $g_{lm}(z) \equiv g_{lm}^{(0)}(z)$. С другой стороны, так как $z_{lmk}(t) \equiv z_{l(m+1)2k}(t)$, то при увеличении m происходит лишь добавление указанных прямых дробления.

Таким образом, при фиксированном $l = 1, 2, \ldots$ на множестве всех точек прямых $z_{lmk}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, которое всюду плотно в $\mathbb{C}$, последовательность $g_{lm}(z)$ сходится при $m \to \infty$ к аффинному отображению

$$g_l(z) = \frac{z + \nu_l \bar{z}}{e^{i\alpha_l} + \nu_l e^{-i\alpha_l}},$$

а потому сходится к нему и л. р. на всей плоскости [3, с. 76]. Кроме того, из распределения мер и соотношения (10) имеем

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathscr{E}} \Phi(p_{lm}(z))\, dxdy = \varphi_l \operatorname{mes} \mathscr{E},$$

где $p_{lm}(z)$ — характеристики Лаврентьева $g_{lm}(z)$, а $\mathscr{E}$ — произвольное измеримое множество с $\operatorname{mes} \mathscr{E} < \infty$.

Поэтому при каждом фиксированном $l = 1, 2, \ldots$ найдется такая подпоследовательность $f_{ln} = g_{lm_n}$ последовательности g_{lm}, что

$$\left| \int_{E_l} \Phi(p_l^n(z))\, dxdy - \varphi_l \operatorname{mes} E_l \right| \leqslant 2^{-(l+n)},$$

где $p_l^n(z)$ — характеристики Лаврентьева $f_{ln}(z)$.

Пусть f_n, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность Q-к.к. отображений класса $\mathfrak{F}$ с комплексными характеристиками

$$\mu_n(z) = \begin{cases} \mu_{ln}(z), & z \in E_l, \quad l = 1, 2, \ldots, \\ \mu(z), & z \in \mathbb{C} \setminus E, \end{cases} \tag{11}$$

где $\mu_{ln}(z)$ и $\mu(z)$ — комплексные характеристики отображений $f_{ln}(z)$ и $f(z)$. Тогда

$$\left| \int_E \Phi(p_n(z))\, dxdy - \int_E \Phi_0(p(z))\, dxdy \right| \leqslant 2^{-n},$$

где $p_n(z)$ — характеристики Лаврентьева отображений $f_n(z)$, и в силу (8) $f_n \in \mathfrak{F}^{\Phi}$ при достаточно больших n.

Остается показать, что $f_n \to f$ л. р. Поскольку класс $\mathfrak{F}$ секвенциально компактен [3, с. 76], то для этого достаточно доказать, что любая сходящаяся подпоследовательность f_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, сходится именно к f [11, с. 203]. Но ввиду (11) это справедливо по лемме 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mu(z)$ и $\mu_n(z)$: $D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, — комплексные характеристики отображений g и g_n и f и f_n — соответствующие отображения класса $\mathfrak{F}$ с комплексными характеристиками

$$\nu(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus D; \end{cases} \qquad \nu_n(z) = \begin{cases} \mu_n(z), & z \in D, \\ 0 & z \in \mathbb{C} \setminus D. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему на основании леммы 2 получаем, что $f_n \to f$ л.р.

Пусть $\mathrm{M}_0 = \liminf_{n\to\infty} \int_E \Phi(p_n(z))\,dxdy$, где $p_n(z)$ — характеристики Лаврентьева отображений $g_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда для некоторой подпоследовательности $\mathrm{M}_0 = \lim_{k\to\infty} \int_E \Phi(p_{n_k}(z))\,dxdy$. Далее, пусть $\mathfrak{F}_\varepsilon^\Phi$, $\varepsilon>0$, — подкласс $\mathfrak{F}$, выделяемый ограничением (2) при $\mathrm{M}=\mathrm{M}(\varepsilon)=M_0+\varepsilon$. Для всех достаточно больших $k=1, 2, \ldots$ отображения $f_{n_k}\in\mathfrak{F}_\varepsilon^\Phi$. Так как $f=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}$, то по теореме 1 $f\in \overline{\mathfrak{F}_\varepsilon^\Phi} = \mathfrak{F}_\varepsilon^{\Phi_0}$ и, таким образом, $\int_E \Phi_0(p(z))\,dxdy \leqslant \mathrm{M}_0+\varepsilon$, где $p(z)$—характеристика Лаврентьева отображения $f(z)$. Ввиду произвольного выбора ε получаем (6).

5. Принцип редукции. Для приложений важным является следующий принцип редукции экстремальных задач из некомпактных классов в компактные.

Следствие 5. *Пусть $J(f)$ — произвольный непрерывный функционал, заданный на классе $\mathfrak{F}$. Тогда*

$$\sup_{f\in\mathfrak{F}^\Phi} J(f) = \max_{f\in\mathfrak{F}^{\Phi_0}} J(f),$$

где Φ_0 — нижняя огибающая функции Φ.

Таким образом, решение экстремальных задач переносится в компактные классы $\mathfrak{F}^{\Phi_0}$, где множество комплексных характеристик выпукло. Это позволяет привлечь сюда идеи выпуклого анализа и оптимального управления [2].

1. *Крушкаль С. Л.*, *Кюнау Р.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения.— Новосибирск : Наука, 1984.— 216 с.
2. *Гутлянский В. Я.*, *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику М. А. Лаврентьева // Сиб. мат. журн.— 1990.— 31, № 2.— С. 21—36.
3. *Lehto O.*, *Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen.— Berlin etc. : Springer, 1965.— 269 s.
4. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного.— М. : Наука, 1965.— 424 с.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М. : Мир, 1973.— 471 с.
6. *Strebel K.* Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. math. helv.— 1969.— **44**, N 7.— S. 469—475.
7. *Leschinger K.* Untersuchungen über Jacobi-Determinanten von zweidimensionalen quasikonformen Abbildungen // Bonn. math. Schr.— 1974.— N 72.— S. 1—58.
8. *Renelt H.* Quasikonforme Abbildungen und elliptische systeme erster Ordnung in der Ebene // Teubner Texte Math.— 1982.— **46**.— S. 1—140.
9. *Сакс С.* Теория интеграла.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— 495 с.
10. *Рязанов В. И.* О сходимости характеристик квазиконформных отображений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 2.— С. 200—204.
11. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т.— М. : Мир, 1966.— Т. 1.—594 с.

Получено 16.05.90