УДК 517.95

В. И. СУМИН, канд. физ.-мат. наук (Нижегород. ун-т)

Функционально-операторные уравнения Вольтерра и устойчивость существования глобальных решений краевых задач

Рассматриваются вопросы, связанные с получением условий устойчивости существования глобальных решений краевых задач для полулинейных эволюционных уравнений различных типов. Доказана теорема об устойчивости существования глобальных решений операторного уравнения Вольтерра по возмущению правой части. Отсюда следуют различные (известные и новые) условия устойчивости для краевых задач по возмущению краевых условий и правых частей.

Розглядаються питання, пов'язані з одержанням умов стійкості існування глобальних розв'язків крайових задач для напівлінійних еволюційних рівнянь різноманітних типів. Доведена теорема про стійкість існування глобальних розв'язків операторного рівняння Вольтерра за збуренням правої частини. Звідси слідують різні (відомі та нові) умови стійкості для крайових задач за збуренням крайових умов та правих частин.

Как показано в [1], при численном решении прикладных задач оптимального управления распределенными системами необходимо считаться с возможностью неустойчивости таких систем. Пусть некая управляемая краевая задача рассматривается в фиксированной области П изменения независимых переменных, а соответствующая оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные (т. е. определенные во всей П) решения краевой задачи из некоторого функционального пространства W (П). Пусть Ω — класс тех допустимых управлений, каждому из которых отвечает единственное в W (П) решение краевой задачи. Простые примеры [1] показывают, что для нелинейных краевых задач характерен случай, когда любой элемент Ω может быть выведен из Ω возмущениями, сколь угодно малыми в L_2-норме, удобной и привычной для численных методов оптимизации. Возникает вопрос о приемлемых для численной оптимизации достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений (у. с. г. р.) краевых задач [1]. Подобные вопросы имеют большое значение и в теории условий оптимальности [2—6]. Проблемы у. с. г. р. по возмущениям более общим, чем возмущения по управлению, возникают при численном решении краевых задач [7] и задач с неточными исходными данными [8], при анализе чувствительности систем [9], в теории обратных и некорректных (в том числе и оптимизационных) задач [5, 7, 10]. Однако если для сосредоточенных систем имеются довольно общие теоремы у. с. г. р. [2, с. 198], то для распределенных систем изучались лишь специальные случаи (так, в [1, 4, 6, 11—14] рассмотрены вопросы у. с. г. р. по возмущению управлений).

В настоящей статье показано, что для получения конструктивных достаточных условий у. с. г. р. краевых задач по возмущениям общего вида представляет интерес введенный в [4, 6, 1] класс функционально-операторных уравнений Вольтерра. К уравнениям этого класса сводятся самые разнообразные краевые задачи для полулинейных эволюционных уравнений и систем (параболических [1], гиперболических [1, 3, 4], интегро-дифференциальных [11], кинетики реактора [12] и др.). Основной результат статьи — теорема об у. с. г. р. операторного уравнения Вольтерра по возмущению правой части (теорема 2). Ее доказательство естественно связано с введенным в [6, 1] и используемым ниже определением оператора типа Вольтерра, обобщающим определение А. Н. Тихонова из [15]. Из теоремы 2 следуют известные (например, [1 2, 6, 11, 14]), и новые условия у. с. г. р. краевых задач указанного семейства по возмущению правых частей и краевых условий (см. примеры п. 4).

1. Определения и теоремы. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу, $t = \{t^1, \ldots, t^n\}$, $L_{q,m} \equiv L_{q,m}(\Pi)$ — лебегово пространство m — вектор функций $z(t) = \operatorname{col}\{z^1(t), \ldots, z^m(t)\}$*. Оператор $A[\cdot]: L_{q,m} \to L_{r,l}$ ($q, r \in [1, +\infty]$) назовем вольтерровым [6, 1] на некоторой системе T измеримых подмножеств Π, если $\forall H \in \mathrm{T}$ и $\forall y \in L_{q,m}$ значения $A[y](t)$ при $t \in H$ зависят лишь от сужения $y|_H$ и не зависят от значений $y(t)$ на $CH \equiv \Pi \setminus H$. Иначе говоря, если $Q_H: L_{q,m}(H) \to L_{q,m}$ — оператор продолжения вида $Q_H[z](t) \equiv \{z(t), t \in H; 0, t \in CH\}$, то $\forall H \in \mathrm{T}$ и $\forall y \in L_{q,m}$ выполняется условие $A[y]|_H \equiv \{AQ_H[y|_H]\}|_H$; т. е. оператор $\{AQ_H[\cdot]\}|_H: L_{q,m} \times (H) \to L_{r,l}(H)$ естественно обозначать и далее через A. В этом смысле будем писать $A: L_{q,m}(H) \to L_{r,l}(H)$, если $H \in \mathrm{T}$. Класс всех вольтерровых на T операторов (при всевозможных q, m, r, l) обозначим через $V(\mathrm{T})$. Очевидно, $A \in V(\mathrm{T})$ тогда и только тогда, когда $\forall H \in \mathrm{T}$ справедливо $P_H A P_{CH} = 0$, где $P_H[y](t) \equiv \chi_H(t)\, y(t)$, $t \in \Pi$; $\chi_H(\cdot)$ — характеристическая функция H. Для совокупности $\mathrm{T}^{\cup}$ всех конечных объединений множеств из T имеем $V(\mathrm{T}^{\cup}) = V(\mathrm{T})$.

Далее рассматривается возникающий в задачах математической физики вариант, когда $q = r = \infty$, Π — некоторый брус $[a, b]$**, а T определяется парой $\mu = \{\nu, \lambda\}$ наборов $\nu, \lambda \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $\nu \cup \lambda \neq \varnothing$, $\nu \cap \lambda = \varnothing$, и состоит из всех брусов $H_\delta \equiv [\alpha, \beta]$ (здесь $\delta \equiv \{\alpha, \beta\}$), удовлетворяющих условиям $\alpha^i = a^i$, $i \notin \nu$; $\beta^i = b^i$, $i \notin \lambda$. Такую систему T обозначим $\mathrm{T}_{\Pi,\mu}$.

В $L_{\infty,m}$ рассмотрим операторные уравнения вида

$$z(t) = f(t, A[z](t)), \tag{1}$$

где $A: L_{\infty,m} \to L_{r,l}$ — линейный оператор; $f(t, p): \Pi \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям типа Каратеодори.

К) $f(t, p)$ непрерывно дифференцируема по p при почти всех (п. в.) t и вместе с производной $f_p'(t, p)$ измерима на Π по t для всех $p \in \mathbb{R}^l$. Существует неубывающая функция $N(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (назовем ее порядком роста f) такая, что $\forall M \geqslant 0: |f|, |f_p'| \leqslant N(M)$, $t \in \Pi$, $|p| \leqslant M$. Класс таких $f(t, p)$ обозначим $K(\Pi, N)$.

Оператор A удовлетворяет таким условиям:

а) A регулярен, т. е. обладает линейной положительной мажорантой $B: L_\infty \to L_\infty$, $|A[z](t)| \leqslant B[|z|](t)$, $t \in \Pi$, $z \in L_{\infty,m}$; Положительный оператор B ограничен [16, с. 30], т. е. ограничен и A; для (1) можно рассматривать решения из $L_{\infty,m}$;

б) существует пара $\mu = \{\nu, \lambda\}$ такая, что $B \in V(\mathrm{T}_{\Pi,\mu})$.

В силу а) и б) $A \in V(\mathrm{T}_{\Pi,\mu})$, т. е. можно говорить как о глобальных из $L_{\infty,m}$, так и о локальных из $L_{\infty,m}(H)$, $H \in T^{\cup}_{\Pi,\mu}$, решениях (1).

в) Спектральный радиус $\rho(B)$ оператора B равен нулю.

Положим $\varphi(H) \equiv \| P_H B \|_{L_\infty \to L_\infty}$, $H \in \mathrm{T}_{\Pi,\mu}$. Справедлива следующая локальная теорема существования и единственности.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия а) — в). Если брус $H \in \mathrm{T}_{\Pi,\mu}$ при некотором $M > 0$ удовлетворяет условию*

$$\varphi(H)\, N(M) < M \tag{2}$$

---

*$L_{q,m}(H)$ — пространство с нормой $\|z\|_{q,m,H} \equiv \left(\int\limits_H |z|^q dt\right)^{1/q}$, $1 \leqslant q < \infty$; $\|z\|_{\infty,m,H} \equiv \operatorname{vraisup}\limits_{t \in H} |z(t)|$ (модуль вектора равен сумме модулей его компонентов). При $m = 1$ пишем $L_q(H)$, $\|z\|_{q,H}$, если $H = \Pi$ — $L_{q,m}$, $\|z\|_{q,m}$, а при $m = 1$ — L_q, $\|z\|_q$.

** $[a, b] \equiv [a^1, b^1] \times \ldots \times [a^n, b^n]$, запись $[a, b]$ предполагает $a^i < b^i$, $i = \overline{1, n}$.

с неубывающей $N(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, *то* $\forall f\in K(\Pi, N)$ *уравнение* (1) *имеет единственное в* $L_{\infty,m}(H)$ *решение* z_f, *причем* $\|z_f\|_{\infty,m,H}\leqslant N(M)$. *Такой брус ненулевой меры существует, если, например,*

$$\varphi(H_\delta)\to 0,\quad \alpha^i\to b^i,\quad i\in\nu;\quad \beta^i\to a^i,\quad i\in\lambda. \tag{3}$$

Глобальное решение (1) существует не при всякой f. Класс тех f, для каждой из которых (1) имеет единственное в $L_{\infty,m}$ решение z_f, обозначим $S(\Pi)$. Усилив (3), сформулируем условие г), позволяющее доказать удобную в приложениях теорему у.с.г.р. для (1). Пусть $\forall H\in T_{\Pi,\mu}:\psi\times\times(H)=\sup\limits_c\|P_{H^c}BQ_{H^c}\|_{L_\infty(H^c)\to L_\infty}$, где $H^c\equiv H+c$, а sup берется по всем $c\in\mathbb{R}^n$ таким, что $H^c\subset\Pi$.

г) $\psi(H_\delta)\to 0$, $\alpha^i\to b^i$, $i\in\nu$; $\beta^i\to a^i$, $i\in\lambda$.

Введем такие обозначения: $\Delta(z; f_1, f_2)\equiv f_1(t, A[z])-f_2(t, A[z])$, $t\in\Pi$, $z\in L_{\infty,m}$; $\rho(z; f_1, f_2)\equiv\|B[|\Delta(z; f_1, f_2)|]\|_\infty$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия а) — г), а также условие*

$$д)\ \|BP_H[z]\|_\infty\leqslant\|P_HB[z]\|_\infty,\quad z\in L_\infty,\quad H\in T_{\Pi,\mu}.$$

Если $f_0\in S(\Pi)$, *то для каждого порядка роста* $N(\cdot)$ *функции* f_0 *существуют числа* $\varepsilon, \sigma>0$ *такие, что любая функция* $f\in K(\Pi, N)$, *удовлетворяющая неравенству*

$$\rho(z_{f_0}; f, f_0)<\varepsilon, \tag{4}$$

также принадлежит классу $S(\Pi)$, *причем*

$$\|A[z_f]-A[z_{f_0}]\|_{\infty,l}\leqslant\sigma\cdot\rho(z_{f_0}; f, f_0). \tag{5}$$

2. Вспомогательные леммы. Первая из них — обобщение леммы Гронуолла [3], вторая — прямое следствие определений п. 1.

Лемма 1. *Пусть* $q\in[1, +\infty]$, $C:L_q\to L_q$ *— линейный положительный оператор*, $\rho(C)=0$. *Если для неотрицательных* $v, w\in L_q$ $v(t)\leqslant C[v](t)+w(t)$, $t\in\Pi$, *то* $v(t)\leqslant R(C)[w](t)$, $t\in\Pi$, *где* $R(C)\equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}C^k$.

Лемма 2. *Пусть* $C:L_q\to L_q$ *— линейный положительный оператор*, $C\in V(T)$. *Для* $H\in T$ *при любой* $z\in L_q(H):Q_HC[|z|](t)\leqslant CQ_H[|z|](t)$, $t\in\Pi$.

С помощью лемм 1 и 2 докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любой неубывающей* $N(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *существует неубывающая* $\gamma(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *такая, что если* z_1, z_2 *— решения* (1) *из* $L_{\infty,m}\times\times(H)$, $H\in T_{\Pi,\mu}$, *при правых частях соответственно* $f_1, f_2\in K(\Pi, N)$, *удовлетворяющие условию* $\|z_i\|_{\infty,m,H}\leqslant L$, $i=1, 2$, *то выполняется неравенство*

$$\|BQ_H[|z_1-z_2|]\|_{\infty,H}\leqslant\gamma(L)\|BQ_H[|\Delta(z_2; f_1, f_2)|]\|_{\infty,H}. \tag{6}$$

Доказательство. По теореме Лагранжа ($\Delta z\equiv z_1-z_2$)

$$\Delta z(t)\equiv\left\{\int\limits_0^1 f'_{1p}(t, A[z_2]+\theta A[\Delta z])\,d\theta\right\}A[\Delta z](t)+\Delta(z_2; f_1, f_2),\quad t\in H.$$

Отсюда с учетом К), а), б) получаем

$$|\Delta z(t)|\leqslant N(3L\|A\|)B[|\Delta z|](t)+|\Delta(z_2; f_1, f_2)|,\quad t\in H. \tag{7}$$

Для доказательства (6) перепишем (7) в виде ($\eta\equiv 3L\|A\|$)

$$Q_H[|\Delta z|](t)\leqslant\eta Q_HB[|\Delta z|](t)+Q_H[|\Delta(z_2; f_1, f_2)|](t),\quad t\in\Pi. \tag{8}$$

С помощью леммы 2 поменяем в (8) местами сомножители Q_H и B. На полученное неравенство подействуем оператором B:

$$BQ_H[|\Delta z|](t)\leqslant(\eta B)[BQ_H[|\Delta z|]](t)+BQ_H[|\Delta(z_2; f_1, f_2)|](t),\quad t\in H. \tag{9}$$

Применив к (9) лемму 1 и положив $\gamma(L)\equiv\|R(\eta B)\|$, получим (6).

3. Доказательство теорем. Доказательство теоремы 1. Произвольно зафиксируем $f \in K(\Pi, N)$, число $M > 0$ и брус H, удовлетворяющие (2). Пусть $G = \{z \in L_{\infty,m}(H) : \|z\|_{\infty,m,H} \leqslant N(M)\}$. Так как

$$\|A[z]\|_{\infty,m,H} \leqslant \|B[|z|]\|_{\infty,H} \equiv \|P_H B Q_H[|z|]\|_{\infty} \leqslant \varphi(H)\|z\|_{\infty,m,H}, \tag{10}$$

$z \in L_{\infty,m}(H)$, то в силу (2) оператор $F[\cdot](t) \equiv f(t, A[\cdot](t))$ переводит G, замкнутое в $L_{\infty,m}(H)$, само в себя.

Так как $\rho(B) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ существует норма $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$, эквивалентная $\|\cdot\|_{\infty,H}$, монотонная относительно полуупорядоченности $L_{\infty}(H)$ по конусу неотрицательных функций, такая, что $\|B[|z|]\|_{(\varepsilon)} \leqslant \varepsilon\|z\|_{(\varepsilon)}$, $z \in L_{\infty}(H)$ [17, с. 90]. Положив $\varepsilon = \{2N(M)\}^{-1}$, с учетом К) получаем

$$\forall z_1, z_2 \in G : \|F[z_1] - F[z_2]\|_{(\varepsilon)} \leqslant N(M)\|B[|z_1 - z_2|]\|_{(\varepsilon)} \leqslant 2^{-1}\|z_1 - z_2\|_{(\varepsilon)},$$

т. е. F — сжимающий на G в норме $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$, и (1) имеет единственное в G решение z_f.

Докажем его единственность в $L_{\infty,m}(H)$. Если z_1, z_2 — два решения (1) из $L_{\infty,m}(H)$, то для $\Delta z \equiv z_1 - z_2$ находим

$$\Delta z(t) = \left\{\int_0^1 f'_v(t, A[z_2](t) + \theta A[\Delta z](t))\, d\theta\right\} A[\Delta z](t).$$

Отсюда, положив $\varkappa \equiv N(\varphi(H)\{\|z_2\|_{\infty,m,H} + \|\Delta z\|_{\infty,m,H}\})$, с помощью К) и (10) получаем $|\Delta z(t)| \leqslant \varkappa B[|\Delta z|](t)$, $t \in H$. По лемме 1 $\Delta z \equiv 0$, т. е. $z_1 \equiv z_2$, $t \in H$. Последнее утверждение теоремы 1 очевидно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем некоторый порядок роста $N(\cdot)$ функции f_0. Рассмотрим случай $a = 0$, $\nu = \varnothing$ (к нему от общего случая приводит замена $t \to \bar{t} : \bar{t}^i = t^i - a^i$, $i \notin \nu$; $\bar{t}^i = b^i - t^i$, $i \in \nu$). Пусть $\lambda = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Положив $\varkappa \equiv \|B[|z_0|]\|_{\infty}$, где $z_0 = z_{f_0}$, зафиксируем любое $M_0 > \varkappa$. Выберем натуральное $\mathfrak{S}$ (оно существует в силу г)) так, чтобы брус $H_\Delta \equiv [0, \beta] \in \mathrm{T}_{\Pi,\mu}$, определяемый равенствами $\Delta = \{0, \beta\}$; $\beta^i = b^i$, $i \notin \lambda$; $\beta^i = \mathfrak{S}^{-1} b^i$, $i \in \lambda$, удовлетворял условию

$$\psi(H_\Delta) N(M_0) < \eta, \tag{11}$$

где $\eta = 2^{-1}(M_0 - \varkappa)$. Пусть целые числа $j_1, \ldots, j_k$ меняются независимо от 1 до $\mathfrak{S}$; $c_{j_1 \ldots j_k}$ — вектор $c \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $c^i = 0$, $i \notin \lambda$; $c^i = (j_r - 1)\beta^i$, $i = i_r \in \lambda$; $h_{j_1 \ldots j_k}$ — брус H^c_Δ при $c = c_{j_1 \ldots j_k}$. Таким образом, Π разбивается на $\mathfrak{S}^k$ брусов $h_{j_1 \ldots j_k}$, причем $h_{11 \ldots 1} = H_\Delta$.

Пусть $\gamma(\cdot)$ — функция из леммы 3. Покажем, что в качестве ε можно взять число $\eta/\gamma(N(M_0))$, если $\gamma(N(M_0)) \neq 0$, и любое положительное число, если $\gamma(N(M_0)) = 0$. Зафиксируем любую $f \in K(\Pi, N)$, удовлетворяющую (4) при этом ε. Так как $\eta < M_0$, $\varphi(H_\delta) \leqslant \psi(H_\delta)$, то $\varphi(H_\Delta) N(M_0) < M_0$ и по теореме 1 существует единственное в $L_{\infty,m}(H_\Delta)$ решение z_f, $\|z_f\|_{\infty,m,H_\Delta} \leqslant N(M_0)$. Докажем, что можно последовательными продолжениями по брусам $h_{j_1 \ldots j_k}$ распространить z_f с $H_\Delta = h_{11 \ldots 1}$ на весь Π, причем $\|z_f\|_{\infty,m} \leqslant N(M_0)$. Действуя по индукции, предположим, что z_f продолжено на объединение H некоторого набора таких брусов, $\|z_f\|_{\infty,m,H} \leqslant N(M_0)$. Без ограничения общности будем считать, что $H \in \mathrm{T}^0_{\Pi,\mu}$. Существует брус $h_{j_1 \ldots j_k}$ (обозначим его через h) примыкающий к H так, что $(H \cup h) \in \mathrm{T}^{\cup}_{\Pi,\mu}$. Достаточно доказать, что z_f единственным образом продолжимо с H на $H' \equiv H \cup h$, причем $\|z_f\|_{\infty,m,H'} \leqslant N(M_0)$.

Введем оператор $\widetilde{A} : L_{\infty,m}(h) \to L_{\infty,l}(h)$ формулой $\widetilde{A}[\cdot](t) \equiv AQ_h[\cdot] \times$

$\times (t)$, $t \in h$, и рассмотрим в $L_{\infty,m}(h)$ уравнение

$$y(t) = \tilde{f}(t, \tilde{A}[y](t)), \quad t \in h, \tag{12}$$

где $\tilde{f}(t, p) \equiv f(t, p + \omega(t))$, $\omega(t) \equiv AQ_H[z_f](t)$, $t \in h$. Существование единственного в $L_{\infty,m}(H')$ продолжения с H на H' решения z_f уравнения (1) эквивалентно существованию единственного в $L_{\infty,m}(h)$ решения уравнения (12). Докажем существование такого решения с помощью теоремы 1, проверив выполнение для (12) всех ее условий.

Во-первых, $\tilde{f} \in K(h, \tilde{N})$ при $\tilde{N}(M) \equiv N(M + \varkappa + \eta)$. Действительно, так как $\forall M \geqslant 0 : |\tilde{f}|, |\tilde{f}'_p| \leqslant N(M + \|\omega\|_{\infty,l,h})$, $t \in h$, $|p| \leqslant M$, то достаточно проверить неравенство $\|\omega\|_{\infty,l,h} \leqslant \varkappa + \eta$, которое в силу (4) и выбора ε следует из неравенства $\|\omega\|_{\infty,l,h} \leqslant \varkappa + \gamma(N(M_0))\rho(z_0; f, f_0)$. Последнее есть следствие леммы 3 и цепочки неравенств

$$\|\omega\|_{\infty,l,h} \leqslant \|AQ_H[z_0]\|_{\infty,l,h} + \|AQ_H[z_f - z_0]\|_{\infty,l,h} \leqslant \|BQ_H[|z_0|]\|_\infty + \\ + \|BQ_H[|z_f - z_0|]\|_{\infty,h} \leqslant \varkappa + \|BQ_H[|z_f - z_0|]\|_{\infty,H'}.$$

Во-вторых, $\tilde{A}$ удовлетворяет а) — в) при $\Pi = h$. Действительно, $\tilde{B} = \{BQ_h\}|_h$ — мажоранта для $\tilde{A}$, причем $\tilde{B} \in V(\mathrm{T}_{h,\mu})$, так как $\mathrm{T}_{h,\mu} = \{h \cap H_\delta : H_\delta \in \mathrm{T}_{\Pi,\mu}\}$; $\rho(\tilde{B}) = 0$ ввиду $\|\tilde{B}^r\| \leqslant \|B^r\|$, $r = 1, 2, \ldots$, и $\rho(\tilde{B}) \leqslant \rho \times (B)$ (пояснение: $\tilde{B}^r \equiv \{B^r Q_h\}|_h$, потому что $B \in V(\mathrm{T}^{\cup}_{\Pi,\mu})$, а $\mathrm{T}^{\cup}_{\Pi,\mu} \ni \overline{[h] \setminus h}$, где $[h]$ — минимальный по вложению из содержащих h брусов системы $\mathrm{T}_{\Pi,\mu}$). В-третьих, функция $\tilde{\varphi}(h_\delta) \equiv \|P_{h_\delta}\tilde{B}\|$, $h_\delta \in \mathrm{T}_{h,\mu}$, удовлетворяет неравенству

$$\tilde{\varphi}(h)\tilde{N}(\eta) < \eta. \tag{13}$$

В самом деле, так как $h = H^c_\Delta$ при некотором $c \in \mathbb{R}^n$ и

$$\tilde{\varphi}(h) = \|P_h[\{BQ_h\}|_h]\|_{L_\infty(h) \to L_\infty(h)} = \|P_h BQ_h\|_{L_\infty(h) \to L_\infty},$$

то $\tilde{\varphi}(h) \leqslant \psi(H_\Delta)$, что вместе с (11) и равенством $N(M_0) = \tilde{N}(\eta)$ приводит к (13). Неравенство (13) в силу теоремы 1 обеспечивает для (12) существование единственного в $L_{\infty,m}(h)$ решения y, $\|y\|_{\infty,m,h} \leqslant N(\tilde{\eta})$.

Итак, (1) имеет единственное в $L_{\infty,m}(H')$ решение z_f, $\|z_f\|_{\infty,m,H'} \leqslant N(M_0)$. Тем самым доказано, что $f \in S(\Pi)$, причем $\|z_f\|_{\infty,m} \leqslant N(M_0)$. С помощью леммы 3 находим

$$\|B[|z_f - z_0|]\|_\infty \leqslant \gamma(N(M_0))\rho(z_0; f, f_0),$$

откуда, полагая $\sigma \equiv \gamma(N(M_0))$, получаем (5). Теорема 2 доказана.

4. Примеры. Рассмотрим характеристическую задачу для гиперболического уравнения (задачу Гурса — Дарбу)

$$x''_{t^1t^2} = g(t, x, x'_{t^1}, x'_{t^2}), \quad t \in \Pi \equiv [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \subset \mathbb{R}^2; \tag{14}$$

$$x(t^1, a^2) = \xi(t^1), \quad a^1 \leqslant t^1 \leqslant b^1; \qquad x(a^1, t^2) = \eta(t^2), \quad a^2 \leqslant t^2 \leqslant b^2;$$
$$\xi(a^1) = \eta(a^2). \tag{15}$$

Здесь $g(t, p) \equiv g(t, p_1, p_2, p_3)$ — вектор-функция из некоторого класса $K \times (\Pi, \cdot)$; $l = 3m$; $p = \mathrm{col}\{p_1, p_2, p_3\}$, $p_i \in \mathbb{R}^m$, $i = \overline{1, 3}$; $\xi(\cdot) : [a^1, b^1] \to \mathbb{R}^m$, $\eta(\cdot) : [a^2, b^2] \to R^m$ липшицевы. Решение (14), (15) понимаем в смысле п. в. и ищем в классе $W(\Pi)$ всех абсолютно непрерывных на Π-m вектор-функций с ограниченными первыми и смешанной производной. В W (П) введем норму $\|x\|_W \equiv \|x\|_{\infty,m} + \|x'_{t^1}\|_{\infty,m} + \|x'_{t^2}\|_{\infty,m}$. Заменой

$$x(t) = \xi(t^1) + \eta(t^2) - \xi(a^1) + \int_{a^2}^{t^1} d\theta^1 \int_{a^2}^{t^2} z(\theta)\, d\theta^2 \tag{16}$$

задача (14), (15) приводится к эквивалентному уравнению (1). Действительно, формула (16) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями $z \in L_{\infty,m}$ и удовлетворяющими (15) функциями $x \in W$ (П). Таким образом, задача (14), (15) эквивалентна уравнению (1), в котором

$$f(t, p) \equiv g(t, p_1 + \xi(t^1) + \eta(t^2) - \xi(a^1), \quad p_2 + \xi'(t^1); \quad p_3 + \eta'(t^2)),$$

а оператор $A: L_{\infty,m} \to L_{\infty,l}$ определяется формулами

$$A[\cdot] \equiv \mathrm{col}\{A_1[\cdot], A_2[\cdot], A_3[\cdot]\}, \quad A_1[z](t) \equiv \int_{a^1}^{t^1} d\theta^1 \int_{a^2}^{t^2} z(\theta)\, d\theta^2,$$

$$A_2[z](t) \equiv \int_{a^2}^{t^2} z(t^1, \theta^2)\, d\theta^2, \quad A_3[z](t) \equiv \int_{a_1}^{t^1} z(\theta^1, t^2)\, d\theta^1$$

и имеет мажоранту

$$B[z](t) \equiv \int_{a^1}^{t^1} d\theta^1 \int_{a^2}^{t^2} z(\theta)\, d\theta^2 + \int_{a^2}^{t^2} z(t^1, \theta^2)\, d\theta^2 + \int_{a^1}^{t^1} z(\theta^1, t^2)\, d\theta^1 \tag{17}$$

(если $f(t, p)$ не содержит явно p_i, то i-е слагаемое в (17) опускается, $i = 1, 2, 3$), удовлетворяющую условиям а) — д) при $\nu = \varnothing$, $\lambda = \{1, 2\}$. Здесь $T_{\Pi,\mu} = \{H_\delta = [\alpha, \beta] : \alpha = a;\ a^i \leqslant \beta^i \leqslant b^i,\ i = 1, 2\}$.

Если $g \in K(\Pi, N)$, то соответствующая $f \in K(\Pi, \bar{N})$ с $\bar{N}(M) \equiv N(M + \omega[\xi, \eta])$, где $\omega[\xi, \eta] \equiv \|\Omega[\xi, \eta]\|_{\infty,l}$, $\Omega[\xi, \eta] \equiv \mathrm{col}\{\xi(t^1) + \eta(t^2) - \xi(a^1), \xi'(t^1), \eta'(t^2)\}$. Введем обозначение $\Lambda[x] \equiv \mathrm{col}\{x, x'_{t^1}, x'_{t^2}\}$, $x \in W$ (П). Для любых двух троек ξ, η, g; $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g}$ с указанными свойствами и $x \in W$ (П) положим

$$\mathcal{J} \equiv |g(t, \Lambda[x] + \Omega[\xi - \bar{\xi}, \eta - \bar{\eta}]) - \bar{g}(t, \Lambda[x])|,$$

$$r[x; \xi, \eta, g; \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g}] \equiv \iint\limits_{\Pi} \mathcal{J}\, dt^1 dt^2 + \operatorname*{vraisup}_{a^1 \leqslant t^1 \leqslant b^1} \int_{a^2}^{b^2} \mathcal{J}\, dt^2 + \operatorname*{vraisup}_{a^2 \leqslant t^2 \leqslant b^2} \int_{a^1}^{b^1} \mathcal{J}\, dt^1. \tag{18}$$

Через $R[x; \xi, \eta, g; \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g}]$ обозначим сумму (18), условившись, что если в (14) явно входит x'_{t^1} или x'_{t^2}, то первое слагаемое опускается; если в (14) явно не входит x'_{t^1} (x'_{t^2}), то опускается второе (третье) слагаемое. Непосредственно из теоремы 2 получаем следующее утверждение об у. с. г. р. (14), (15) по возмущению правой части (14) и граничных условий (15).

Утверждение 1. *Пусть задача* (14), (15) *при* $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $g = g_0$ *имеет единственное в* W (П) *решение* x_0. *Для каждого порядка роста* $N(\cdot)$ *функции* g_0 *существуют числа* $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ *такие, что при любых* ξ, η, g, *удовлетворяющих условию* $\forall M \geqslant 0$: $|g(t, p + \Omega[\xi, \eta])| \leqslant N(M + \omega[\xi_0, \eta_0])$, $t \in \Pi$, $|p| \leqslant M$, *и неравенству* $R[x_0; \xi, \eta, g; \xi_0, \eta_0, g_0] \leqslant \varepsilon$, *задача* (14), (15) *имеет единственное в* W (П) *решение* x, *причем* $\|x - x_0\|_W \leqslant \|\Omega[\xi - \xi_0, \eta - \eta_0]\|_{\infty,l} + \sigma r[x_0; \xi, \eta, g; \xi_0, \eta_0, g_0]$.

Покажем, как из утверждения 1 могут быть получены теоремы у. с. г. р. для управляемой задачи Гурса — Дарбу, ставшей «пробным камнем» теории оптимального управления распределенными системами (см., например, [1, 3, 5]). Пусть граничные функции зафиксированы, а уравнение (14) имеет вид

$$x''_{t^1 t^2} = h(t, x, x'_{t^1}, x'_{t^2}, u(t)), \tag{19}$$

где $u(\cdot)$ — управление из некоторого семейства $\mathcal{D}$ измеримых на П функций, принимающих значения из $U \in \mathbb{R}^s$; $h(t, p, u) \equiv h(t, p_1, p_2, p_3, u)$ — определенная на $\Pi \times \mathbb{R}^{3m} \times \mathbb{R}^s$ функция, удовлетворяющая такому условию: существует $N(\cdot)$ такая, что $\forall u(\cdot) \in \mathcal{D}$ функция $g(t, p) \equiv h(t, p, u(t))$ принадлежит $K(\Pi, N)$.

Теорема у. с. г. р. по возмущению управления в задаче (19), (15) получается перефразировкой утверждения 1. Положим

$$\forall u, \bar{u} \in \mathcal{D},\ x \in W(\Pi): I \equiv |h(t, x, x'_{t^1}, x'_{t^2}, u) - h(t, x, x'_{t^1}, x'_{t^2}, \bar{u})|,$$

$$r[x; u, \bar{u}] \equiv \iint_{\Pi} I dt^1 dt^2 + \operatorname*{vraisup}_{a^1 \leqslant t^1 \leqslant b^1} \int_{a^2}^{b^2} I dt^2 + \operatorname*{vraisup}_{a^2 \leqslant t^2 \leqslant b^2} \int_{a^1}^{b^1} I dt^1. \qquad (20)$$

Через $R[x; u, \bar{u}]$ обозначим сумму (20), условившись, что если в (19) явно входит $x'_{t^1}(x'_{t^2})$, то первое слагаемое опускается; если в (19) явно не входит $x'_{t^1}(x'_{t^2})$, то опускается второе (третье) слагаемое.

Утверждение 2. *Если управлению $u_0 \in \mathcal{D}$ отвечает единственное в $W(\Pi)$ решение x_0 задачи* (19), (15), *то существуют числа $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ такие, что любому управлению $u \in \mathcal{D}$, удовлетворяющему условию $R[x_0; u, u_0] < \varepsilon$, также отвечает единственное в $W(\Pi)$ решение x задачи* (19), (15), *причем*

$$\| x - x_0 \|_W \leqslant \sigma \cdot r[x_0; u, u_0].$$

Это утверждение обобщает результаты [13].

1. *Сумин В. И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1990.— **30**, № 1.— С. 3—21.
2. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М. : Наука, 1979.— 429 с.
3. *Плотников В. И., Сумин В. И.* Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. мат. журн.— 1981.— **22**, № 6.— С. 142—161.
4. *Сумин В. И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Горький, 1975.— 17 с.
5. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач.— М. : Наука, 1981.— 400 с.
6. *Сумин В. И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами// Докл. АН СССР.—1989.— **305**, № 5.— С. 1056—1059.
7. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики.— М. : Наука, 1989.— 608 с.
8. *Сумин М. И.* Оптимальное управление системами с приближенно известными исходными данными // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1987.— **27**, № 2.— С. 163—177.
9. *Дончев А.* Системы оптимального управления. Возмущение, приближение и анализ чувствительности.— М. : Мир, 1987.— 156 с.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 285 с.
11. *Морозов С. Ф., Сумин В. И.* Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение нестационарного переноса // Мат. заметки.— 1977.— **21**, № 5.— С. 665—676.
12. *Морозов С. Ф., Сумин В. И.* Нелинейные интегро-дифференциальные системы уравнений нестационарного переноса // Сиб. мат. журн.— 1978.— **19**, № 4.— С. 842—848.
13. *Плотников В. И., Сумин В. И.* Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса — Дарбу // Дифференц. уравнения.— 1972.— **8**, № 5.— С. 845—856.
14. *Сумин В. И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Дифференц. уравнения.— 1986.— **22**, № 9.— С. 1587—1596.
15. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секция А.— 1938.— **1**, вып. 8.— С. 1—25.
16. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М. : Наука, 1966.— 499 с.
17. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.— М. : Физматгиз, 1962.— 394 с.

Получено 07.02.90