УДК 517.988.8

Н. Ю. БАКАЕВ, канд. физ.-мат. наук (Москва)

Условные оценки устойчивости метода Рунге — Кутты для уравнения с переменным оператором

Изучены разностные схемы метода Рунге — Кутты для дифференциального уравнения с переменным оператором и получены для них условные оценки устойчивости в пределах естественных для приложений допущений.

Вивчені різницеві схеми методу Рунге — Кути для диференціального рівняння зі змінним оператором та одержані для них умовні оцінки стійкості в межах природних для застосувань припущень.

1. В статье [1] получены оценки устойчивости в банаховых нормах разностных схем, построенных в рамках метода Рунге — Кутты, для абстрактного линейного дифференциального уравнения с переменным оператором. Методика исследования [1] использует условие гладкости исходного оператора задачи по параметру, которое в приложениях, связанных с исследованием разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными по времени коэффициентами, удается проверить во всей шкале пространств L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, лишь для одномерных разностных операторов. В многомерном случае соответствующее условие может быть установлено лишь в пространствах L_{ph}, $1 < p < \infty$, что связано с возможностью использования в этих пространствах неравенств коэрцитивности. Аналогичные проблемы возникают и при проверке условий применимости других подходов в теории устойчивости разностных схем, базирующихся на операторных принципах [2].

В данной статье развивается модификация подхода, изложенного в [1]. Такая модификация позволяет в определенном смысле избегать перечисленных выше трудностей и в приложениях приводит к более естественным условиям на гладкость разностных операторов по параметру. В частности, можно прийти к оценкам устойчивости разностных схем метода Рунге — Кутты для уравнения теплопроводности в двумерном случае во всей шкале пространств L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Наряду с усилением результатов в рамках излагаемой ниже теории приходится допускать некоторые дополнительные ограничения, в том числе и условия на согласование шагов разностных сеток. Таким образом, полученные далее оценки устойчивости являются условными. Однако в приложениях данное требование согласования шагов сеток оказывается весьма слабым и практически необременительным. В этом принципиальное отличие оценок данной статьи от обычно использующихся в теории устойчивости условных оценок.

2. Пусть задано семейство банаховых пространств E_h, параметризованных с помощью скалярной или векторной величины h. Определим линейный ограниченный оператор $A_h(t): E_h \to E_h$, зависящий от h и $t \in [0, T]$, функцию $F_h(t)$, $t \in [0, T]$, со значениями в E_h и элемент $y_{0h} \in E_h$.

В семействе пространств E_h рассмотрим разностную схему

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) - \tau \sum_{j=1}^{\nu} b_j [A_h(t_k + c_j\tau) Y_j - F_h(t_k + c_j\tau)],$$
$$k = 0,1, \ldots, \quad T/\tau - 1, \tag{1}$$
$$y(t_0) = y_{0h},$$

где $Y_j \in E_h$ определяются из следующей системы уравнений:

$$Y_j = y(t_k) - \tau \sum_{l=1}^{\nu} a_{jl} [A_h(t_k + c_l\tau) Y_l - F_h(t_k + c_l\tau)],$$
$$j = 1,2, \ldots, \nu, \tag{2}$$

и τ — шаг дискретизации, $t_k = k\tau$, $k = 0,1, \ldots, T/\tau$,— дискретный аргумент, b_j, c_j, a_{jl}, $j, l = 1,2, \ldots, \nu$, — коэффициенты, задающие схему. Схема вида (1), (2) возникает в рамках метода Рунге — Кутты [3] и, как уже отмечалось, изучена в [1].

Всюду в дальнейшем будет использоваться терминология из [1, 4], включающая понятия и определения символа генератора схемы $\alpha(z)$, разностной схемы типа $RK(\varphi)$, равномерно (по $t \in [0, T]$ и h) сильно полупозитивного оператора $B_h(t)$.

Из результатов статьи [1] следует, что в рамках принятых в ней ограничений разностная схема (1), (2) может быть представлена в каноническом виде

$$y(t_{k+1}) = [I - \tau\hat{A}_{\tau h}(t_k)]\, y(t_k) + \tau \sum_{j=1}^{\nu} \Omega_{\tau hj}(t_k)\, F_h(t_k + c_j\tau),$$
$$k = 0,1, \ldots, T/\tau - 1, \tag{3}$$
$$y(t_0) = y_{0h},$$

где $\hat{A}_{\tau h}(t_k)$ и $\Omega_{\tau hj}(t_k)$, $j = 1,2, \ldots, \nu$, — некоторые линейные ограниченные в E_h для любого фиксированного набора (τ, h, t_k) операторы. На базе канонического вида в (3) в [1] получены оценки устойчивости схемы (1), (2). Далее покажем, что справедливость представления (3) и оценок устойчивости, полученных в [1], может быть установлена при ограничениях несколько иного типа, более естественных в приложениях.

Основным исходным предположением, используемым в дальнейшем, является условие представимости оператора $A_h(t)$ в виде суммы линейных ограниченных операторов $A_{hj}(t): E_h \to E_h$, $j = 1,2$, $t \in [0, T]$,

$$A_h(t) = A_{h1}(t) + A_{h2}(t) \tag{4}$$

при следующих дополнительных ограничениях на $A_{hj}(t)$, $j = 1, 2$:

1) операторы $A_{hj}(t)$, $j = 1,2$, — равномерно (по $t \in [0, T]$ и h) сильно полупозитивные с углом φ_0 линейные ограниченные в E_h операторы;

2) операторы $A_{hj}(t)$, $j = 1, 2$, равномерно (по $t \in [0, T]$ и h) почти коммутируют в смысле справедливости неравенства

$$\| B[A_{h1}(t) A_{h2}(t) - A_{h2}(t) A_{h1}(t)]\, u \|_{E_h} \leqslant C_1 \min \{ [\, \| B[A_{hj}(t) + \mu I] \|_{E_h} \times$$
$$\times \| [A_{h(3-j)}(t) + \mu I]\, u \|_{E_h}^{\beta} \| u \|_{E_h}^{1-\beta} + \| B[A_{hj}(t) + \mu I] \|_{E_h}^{\beta} \| B \|_{E_h}^{1-\beta} \times$$
$$\times \| [A_{h(3-j)}(t) + \mu I]\, u \|_{E_h}], \quad \| B \|_{E_h} \| [A_{hj}(t) + \mu I] [A_{h(3-j)}(t) + \mu I]\, u \|_{E_h}^{\beta} \times$$
$$\times [\, \| [A_{hj}(t) + \mu I]\, u \|_{E_h} + \| [A_{h(3-j)}(t) + \mu I]\, u \|_{E_h}]^{1-\beta} \}, \tag{5}$$
$$C_1, \beta = \text{const}, \quad \beta \in [0, 1), \quad j = 1,2, \quad \forall h, \quad \forall t \in [0, T],$$
$$\forall u \in E_h, \quad \forall B \in L(E_h)$$

для всех достаточно больших $\mu \geqslant 0$ (здесь и далее $L(E_h)$ — алгебра линейных ограниченных операторов в E_h);

3) операторы $A_{hj}(t)$, $j=1, 2$, удовлетворяют свойству почти коэрцитивности

$$\| A_{hj}(t) u \|_{E_h} \leqslant C_2 \psi(h) \| [A_h(t) + \mu I] u \|_{E_h}, \quad C_2 = \text{const},$$
$$j = 1, 2, \quad \forall h, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall u \in E_h, \tag{6}$$

при всех достаточно больших $\mu \geqslant 0$ с некоторой положительнозначной функцией $\psi(h)$;

4) выполняется условие гладкой зависимости операторов $A_{hj}(t)$, $j = 1, 2$, от параметра t в форме

$$\| [A_{hj}(t) - A_{hj}(s)] u \|_{E_h} \leqslant C_3(\varepsilon) \{ | t - s |^{\theta} \min [\| \ \|_{E_h} \| [A_{hj}(t) + \mu I] u \|_{E_h},$$
$$\| B [A_{hj}(s) + \mu I]^{\varkappa+\varepsilon} \|_{E_h} \| [A_{hj}(t) + \mu I]^{1-\varkappa+\varepsilon} u \|_{E_h}] +$$
$$+ \| B \|_{E_h} \| [A_{hj}(t) + \mu I]^{\theta_1} u \|_{E_h} \}, \quad j = 1, 2,$$
$$\forall h, \ \forall t, \ s \in [0, T], \quad \forall u \in E_h, \quad \forall B \in L(E_h), \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{7}$$

с некоторыми неотрицательными константами $C_3(\varepsilon)$, $\theta \in (0, 1]$, $\theta_1 \in [0, 1)$, $\varkappa \in (0,1)$, $\varepsilon_0 \in (0, \min[\varkappa/2, 1 - \varkappa])$, не зависящими от h, t, s, u, B ($C_3(\varepsilon)$ может зависеть от ε) при всех достаточно больших $\mu \geqslant 0$.

Главным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть оператор $A_h(t)$ в* (1) *допускает представление* (4) *в виде суммы двух равномерно (по $t \in [0, T]$ и h) сильно полупозитивных с углом $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ линейных ограниченных в E_h операторов $A_{hj}(t)$, $j = 1, 2$, удовлетворяющих условиям* (5) — (7). *Пусть также схема* (1), (2) *принадлежит типу $RK(\varphi_0)$ и справедливы требования*

$$\deg [\alpha(z)] = 0,$$
$$\deg [g_{jl}(z)] \leqslant 0, \quad j, l = 1, 2, \dots, \nu,$$
$$\deg \Big[\sum_{k=1}^{\nu} g_{jk}(z) \Big] \leqslant -1, \quad j = 1, 2, \dots, \nu,$$

где $\alpha(z)$ — символ генератора схемы и $g_{jl}(z)$ — элементы матрицы, обратной к матрице $(([\delta_{jl} + z a_{jl}]))$ (δ_{jl} — символ Кронекера). Тогда при дополнительном условии согласования τ и h в форме

$$\tau^{\bar{\theta}} \psi(h) \leqslant C_4 = \text{const}, \quad \bar{\theta} = \text{const} \in (0, \theta) \tag{8}$$

(θ — *константа в условии* (7)) *схема* (1), (2) *представима в каноническом виде* (3) *и для нее справедлива оценка устойчивости*

$$\| [\hat{A}_{\tau h}(t_k) + \bar{\mu} I]^{\xi} y(t_k) \|_{E_h} + \| [\tau^{-1} \alpha(\tau A_h(t_k)) + \bar{\mu} I]^{\xi} y(t_k) \|_{E_h} \leqslant$$
$$\leqslant C_5(\xi) \Big\{ [(k+1)\tau]^{-\xi} \| y_{0h} \|_{E_h} + \tau \sum_{l=1}^{k} [(k - l + 1)\tau]^{-\xi} \times$$
$$\times \max_{j=1,2,\dots,\nu} \| F_h(t_{l-1} + c_j \tau) \|_{E_h} \Big\},$$
$$k = 0, 1, \dots, T/\tau, \quad \forall h, \ \forall \tau \in (0, \tau_0], \quad \forall \xi \in [0, 1),$$

с некоторыми неотрицательными константами $C_5(\xi)$, $\bar{\mu}$, не зависящими от h, τ, t_k ($C_5(\xi)$ может зависеть от ξ).

Доказательство данной теоремы в основных чертах соответствует доказательству оценок устойчивости в [1]. Основным отличительным моментом является вывод условия гельдеровости по t оператора $\tau^{-1}(\tau A_h(t))$ на основе условия (7) без использования неравенств коэрцитивности. Неравенство почти коэрцитивности (6) привлекается в заключительной части доказательства для корректного применения техники теории возмущений разностных схем.

3. Условия (5)—(7), хотя и выглядят громоздкими, могут быть проверены в случае пространств L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, когда $A_h(t)$ — двумерный разностный эллиптический оператор, аппроксимирующий двумерный дифференциальный оператор без смешанных производных с достаточно гладкими переменными коэффициентами в прямоугольной области с граничными условиями первого или третьего рода. При этом $A_{hj}(t)$, $j = 1, 2$,— соответствующие одномерные разностные операторы. Проверка условий (5)—(7) достаточно проста, но также весьма громоздка (опирается на технику работы [5]), и ввиду ограниченного объема статьи также опускается. Свойство равномерной сильной полупозитивности в L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, операторов $A_{hj}(t)$ следует из результатов [6, 7], а аналогичное свойство для оператора $A_h(t)$ — из условия (5) с учетом результатов [8]. Наконец, имея ввиду оценки почти коэрцитивности, полученные в [9] (с помощью техники работ [8, 10] они легко распространяются на случай почти коммутирующих операторов), приходим к выводу, что условие (8) будет выполнено в L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если справедливо соотношение

$$\tau^{\overline{\theta}} \ln\left(1 + \frac{1}{h_1 + h_2}\right) \leqslant C_6 = \text{const}, \tag{9}$$

где τ — шаг временной сетки, а h_j, $j = 1, 2$,— шаги сеток по пространственным переменным. Очевидно, требование (9) накладывает весьма слабые ограничения на согласование значений шагов разностных сеток.

Таким образом, результаты настоящей статьи могут быть использованы для исследования устойчивости в нормах L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в широком классе разностных схем, аппроксимирующих начально-краевую задачу в прямоугольнике для двумерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

1. *Бакаев Н. Ю.* Оценки устойчивости метода Рунге — Кутты для дифференциальных уравнений с переменным оператором // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 2.— С. 262—265.
2. *Ашиpaлієв А., Соболевський П. Є.* Різницеві схеми високого порядку точності для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1988.— № 6.— С. 3—7.
3. *Штеттер X.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1978.— 464 с.
4. *Бакаев Н. Ю.* Об устойчивости метода Рунге — Кутты для абстрактных линейных уравнений // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 5.— С. 689—694.
5. *Бакаев Н. Ю.* Оценки устойчивости в равномерной метрике некоторых классов разностных схем, аппроксимирующих параболические уравнения.— М., 1988.— 92 с.— Деп. в ВИНИТИ. № 6043—В88.
6. *Алибеков X. А., Соболевский П. Е.* Об устойчивости и сходимости разностных схем высокого порядка аппроксимации для параболических уравнений. II.— М., 1976.— 51 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 3645-76.
7. *Бакаев Н. Ю.* Об устойчивости весовых разностных схем // Укр. мат. журн.— 1990.— 41, № 9.— С. 1254—1259.
8. *Соболевский П. Е.* Дробные степени коэрцитивно-позитивных сумм операторов // Сиб. мат. журн.— 1977.— 18, № 3.— С. 637—657.
9. *Соболевский П. Е., Смирницкий Ю. А.* Коэрцитивная разрешимость разностных эллиптических уравнений.— М., 1978.— 32 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2007-78.
10. *Бакаев Н. Ю.* Теория устойчивости разностных схем в банаховых нормах.— М., 1988.— 32 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 6044-В88.

Получено 22.05.90