УДК 517.5

В. В. Листопад, асп. (Киев. пед. ин-т)

НЕКОТОРЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МОНОТОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

The uniform estimates are obtained for the monotone approximation of functions from generalized Babenko classes.

Одержані рівномірні оцінки для монотонної апроксимації функцій із узагальнених класів Бабенка.

Введение и формулировка результатов. Пусть $k \in N$, $(r+1) \in N$, $m := k + r$, $n \in N$, $I := [-1; 1]$, C — пространство непрерывных на I функций $f = f(x)$ с равномерной нормой $\|f\| := \max_{x \in I} |f(x)|$, $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$, C^r — множество функций $f \in C$, имеющих на интервале $(-1, 1)$ r-ю непрерывную производную $f^{(r)} = f^{(r)}(x)$; $\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени $\le n$;

$$E_n(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|$$

— величина наилучшего равномерного приближения функции $f \in C$ алгебраическими многочленами степени $\le n$;

$$E_n^{(1)}(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n, P' > 0} \|f - P\|$$

— величина наилучшего равномерного приближения функции $f \in C$ монотонными на I алгебраическими многочленами степени $\le n$; $h > 0$, $d := d(h, x) := h\sqrt{1 - x^2} + h^2$;

$$\Delta_h^k(f, x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f(x + ih), \quad x, (x + kh) \in I,$$

— k-я разность функции f в точке x с шагом h; φ — функция типа k-го модуля непрерывности, т. е. $\varphi(+0) = 0$, $\varphi(t)$ не убывает на $[0; +\infty[$, $t^{-k}\varphi(t)$ не возрастает.

Если $f \in C^r$ и для всех $x \in I$ и $h > 0$ таких, что $[x, x + kd] \subset (-1, 1)$ справедлива оценка

$$|(1 + x)^{r/2}(1 - x - kd)^{r/2} \Delta_d^k(f^{(r)}, x)| \le \varphi(h), \tag{1}$$

то [1, 2] при всех $n \ge m - 1$

$$E_n(f) \le c\, n^{-r} \varphi(1/n), \quad c = c(m) = \text{const}. \tag{2}$$

Справедливо и обратное утверждение (см. там же), а именно: если выполнено условие Бари – Стечкина [3, 4]

$$\int_0^t r\, u^{-1} \varphi(u)\, du + t^k \int_t^1 u^{-k-1} \varphi(u)\, du \le O(\varphi(t)), \quad t > 0,$$

и при всех $n \ge m - 1$ справедлива оценка

$$E_n(f) \le n^{-r} \varphi(1/n), \tag{2'}$$

то

$$|(1 + x)^{r/2}(1 - x - kd)^{r/2} \Delta_d^k(f^{(r)}, x)| \le \varphi(h). \tag{3}$$

В данной статье исследуется истинность следующего утверждения.

Утверждение 1. *Если функция $f = f(x)$ не убывает на I и $f \in C^r$, то из* (1) *вытекает*

$$E_n^{(1)}(f) \le c\, n^{-r} \varphi(1/n), \quad n = m-1, m, \dots . \tag{4}$$

Для $r = 0$, $k = 1, 2$ истинность утверждения доказана D. Leviatan [5] (а значит, и для $r = 1$, $k = 1$).

Для $r \in N$, $k = 1$, $\varphi(t) = t$, т. е. для случая, когда $f^{(r)}(x)$ локально абсолютно непрерывна на $(-1, 1)$ и $|(1-x^2)^{(r+1)/2} f^{(r+1)}(x)| \le 1$ почти везде на I, истинность утверждения 1, т. е. оценка

$$E_n^{(1)}(f) \le c\, n^{-r-1}, \tag{5}$$

получена в [6].

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для $r \ge 3$ и $k \in N$ утверждение* 1 *истинно.*

Теорема 2. *Если $r = 2$ и $k \in N$, то утверждение* 1 *истинно при дополнительном условии*

$$\int_0^{1/n} u^{-1} \varphi(u)\, du < \varphi(1/n). \tag{6}$$

Следствием теорем 1, 2, результатов D. Leviatan [5] и обратной теоремы (2′) – (3) является такая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \ne 2$, $\beta \in (0; 1]$, $(r+1) \in N$, $r + \beta = \alpha$. Условие*

$$|(1+x)^{r/2} (1 - x - 2d)^{r/2} \Delta_d^2 (f^{(r)}, x)| = O(h^{\beta}), \quad h \to 0, \tag{7}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $E_n^{(1)}(f) = O(n^{-\alpha})$, $n \to \infty$.

Всюду далее через c, c_i обозначены различные const, которые зависят только от m, $m := k + r$.

2. Вспомогательные утверждения. Будем писать $f \in B^r H\,[k, \varphi]$, если $f \in C^r$ и для f выполняется неравенство (1) (в [2] это обобщенные классы К. И. Бабенко).

Обозначим $\rho := \rho(x) := \rho_n(x) := d(1/n, x)$, $x_j := \cos(j\pi/n)$, $j = \overline{0, n}$; $\bar{x}_j := \cos(j\pi/n - \pi/2n)$, $I_j := [x_j, x_{j-1}]$, $h_j := x_{j-1} - x_j$, $j = \overline{1, n}$.

Справедливы неравенства [7, с. 15] $\rho < h_j \le 5\rho$, $x \in I_j$, $h_{j\pm1} < 3h_j$.

Для точки $x \in I$ и множества $G \subset I$ обозначим $\operatorname{dist}(x, G) := \inf_{y \in G} \| x - y \|$ расстояние от x до G.

Приведем ряд лемм, аналогичных утверждению 1 и леммам 1–8 из [8].

Лемма 1 [2]. *Пусть $F \subset I$, $\Phi \in B^r H\,[k, \varphi]$, $r \ne 0$. Если $\Phi'(x) = 0$ при $x \in F$, то при каждом $n \ge m - 1$ найдется многочлен $D_n := D_n(x, \Phi)$ степени $\le n$, который приближает функцию Φ и ее производную Φ' таким образом, что*

$$\| \Phi - D_n \| \le c_1 n^{-r} \varphi(1/n), \tag{8}$$

$$| \Phi'(x) - D_n^1(x, \Phi) | \le c_2 \rho^{-1} n^{-r} \varphi(1/n) \rho^{16k} (\operatorname{dist}(x, I \setminus F) + \rho)^{-16k}, \quad x \in I. \tag{9}$$

Лемма 2 [6]. *Для любого множества $E \subset I$ существует многочлен $Q_n(x, E)$, имеющий свойства:*

а) $| Q_n(x, E) | \le c_3 n^{-r}$, $x \in I$;

b) $Q_n'(x, E) \geq -c_4 \rho^{-1} n^{-r}, \quad x \in E;$

c) $Q_n'(x, E) \geq c_5 \rho^{-1} n^{-r} \rho^{16k} (\operatorname{dist}(x, E) + \rho)^{-16k}, \quad x \in I \setminus \dot{E}.$

Лемма 3. *Если* $g \in C^1$ *и* $0 \leq g'(x) \leq \rho^{-1}$, $x \in (-1, 1)$, *то существует многочлен* $R_n(x, g)$, *имеющий свойства*:

$$\| g - R_n \| \leq c_6, \tag{10}$$

$$R_n'(x, g) \geq 0, \; x \in (-1, 1). \tag{11}$$

Лемма 3 доказывается так же, как и лемма 7 из [7].

Лемма 4. *Пусть заданы функции* $g \in B^r H[k, \varphi]$, $r \neq 0$, и множество $J_j \subset \subset (-1, 1)$, состоящее из $2m-3$ соседних отрезков I_j, т. е. $J_j = I_j \cup I_{j+1} \cup \ldots \ldots \cup I_{j+2(m-2)}$. *Если при каждом* $i = 0, \ldots, 2(m-2)$ *найдется точка* $\tilde{x}_i \in I_{j+i}$, *в которой* $| g'(\tilde{x}_i) | \leq \rho^{-1}(\tilde{x}_i) n^{-r} \varphi(1/n)$, *то при всех* $x \in I_j$ *имеем* $| g'(x) | \leq \leq c_7 \rho^{-1} n^{-r} \varphi(1/n)$.

Доказательство. Обозначим через $l(x)$, $L(x)$ многочлены Лагранжа степени $\leq m-2$, интерполирующие функцию g' соответственно в точках $\tilde{x}_{2p}$, $p = \overline{0, m-2}$, и в равноотстоящих $(m-1)$ точках x_p, $p = \overline{0, m-2}$, отрезка I_j, включая его концы. Производную g' представим в виде $g'(x) = (g'(x) - L(x)) + (L(x) - l(x)) + l(x)$. Неравенство

$$| g'(x) - L(x) | \leq c_8 n^{-r} \varphi(1/n)/\rho \tag{12}$$

доказано в [2] (см. следствие 1 леммы 18.4). Оценим последнее слагаемое:

$$| l(x) | = \left| \sum_{i=0}^{m-2} g'(\tilde{x}_{2p}) \prod_{i=0, i \neq p}^{m-2} (x - \tilde{x}_{2i})(\tilde{x}_{2p} - \tilde{x}_{2i})^{-1} \right| \leq$$

$$\leq c_9 n^{-r} \varphi(1/n) \sum_{p=0}^{m-2} \rho^{-1}(\tilde{x}_{2p}) = c_{10} \rho^{-1} n^{-r} \varphi(n^{-1}).$$

Аналогично для второго слагаемого получаем

$$|L(x) - l(x)| = \left| \sum_{p=0}^{m-2} (g'(\tilde{x}_{2p}) - L(\tilde{x}_{2p})) \prod_{i=0, i \neq p}^{m-2} (x - \tilde{x}_{2i})(\tilde{x}_{2p} - \tilde{x}_{2i})^{-1} \right| \leq$$

$$\leq c_8 c_{10} n^{-r} \varphi(1/n)/\rho = c_{11} \rho^{-1} n^{-r} \varphi(1/n).$$

Лемма доказана.

***Замечание* 1.** При $r \geq 3$ оценка (12) справедлива не только для $I_j \subset \subset (-1, 1)$, но и для $I_j \subset I$, поэтому при $r \geq 3$ условие $I_j \subset (-1, 1)$ леммы 4 можно заменить условием $I_j \subset I$.

При $r = 2$ оценка (12) для случая $\pm 1 \in I_j$, вообще говоря, неверна. Поэтому этот случай рассмотрим отдельно.

Лемма 4′. *Пусть заданы функции* $g \in B^2 H[k, \varphi]$, $h > 0$ *и множество* $J_1 = = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{1+2k}$ $(J_n = I_n \cup I_{n-1} \cup \ldots \cup I_{n-2k})$. *Если при каждом* $i = 0, 2k$ *найдется точка* $\tilde{x}_i \in I_{1+i}$ $(\tilde{x}_i \in I_{n-i})$, *в которой*

$$g'(\tilde{x}_i) \leq \varphi(h) \;\; и \;\; \int_0^h u^{-1} \varphi(u)\, du < M \varphi(h),$$

то при всех $x \in J_1$ $(x \in J_n)$ *имеем*

$$|g'(x)| \le c_{12} M \varphi(h).$$

Доказательство. Приведем доказательство для множества J_n (для J_1 рассуждения аналогичны).

Обозначим через $l(x), L(x)$ многочлены Лагранжа степени $\le k$, которые интерполируют функцию g' соответственно в точках $\tilde{x}_{2p}$, $p = \overline{0, k}$, и в равноотстоящих $k+1$ точках x_p, $p = \overline{0, k}$, отрезка $[-1+h^2, 1-h^2]$. Далее для простоты доказательство проведем при $k = 1$.

Пусть $x \in J_n$, $-1 < x \le -1 + h^2$, $0 < \delta \le h$, $\rho^* := d(\delta, x)$.

1) Если $1 + x \ge \rho^*$, то, используя (1), получаем

$$|\Delta^2_{\rho*}(g', x)| = \left| \int\limits_x^{x+\rho*} \Delta^1_{\rho*}(g'', u)\, du \right| \le c_{13} \int\limits_x^{x+\rho*} \frac{\varphi(\delta)}{1+u}\, du \le$$

$$\le c_{13} \int\limits_x^{1+2x} (1+u)^{-1} \varphi(\delta)\, du \le c_{13} \varphi(h).$$

2) Если $1 + x < \rho^*$, то выберем число $l \in N$ из условия $2^{l+1}(x+1) - 1 = x + \rho^*$ (т. е. $l = [\ln(1 + \rho^*(1+x)^{-1}) / \ln 2] - 1$). Используя (1), очевидное неравенство $\rho < 2h^2$, а также условие леммы, получаем

$$|\Delta^2_{\rho*}(g', x)| = \left| \int\limits_x^{x+\rho*} \Delta^1_{\rho*}(g'', v)\, dv \right| \le \int\limits_x^{x+\rho*} |g''(v) - g''(v+\rho^*)|\, dv \le$$

$$\le \int\limits_x^{x+\rho*} |g''(v) - g''(2v+1)| + |g''(2v+1) - g''(4v+3)| + \ldots$$

$$\ldots + |g''(2^l(v+1)-1) - g''(v+\rho^*)|\, dv \le$$

$$\le c_{14} \int\limits_{1+x}^{1+x+\rho*} \left(\int\limits_t^{2t} \frac{\varphi(\sqrt{z})}{z^2} dz + \int\limits_{2t}^{4t} \frac{\varphi(\sqrt{z})}{z^2} dz + \ldots + \int\limits_{2^l t}^{2^{l+1}t} \frac{\varphi(\sqrt{z})}{z^2} dz \right) dt =$$

$$= c_{14} \int\limits_{1+x}^{1+x+\rho*} \int\limits_t^{2^{l+1}t} \frac{\varphi(\sqrt{z})}{z^2} dz\, dt \le c_{14} \int\limits_0^{4h^2} \int\limits_t^{4h^2} z^{-2} \varphi(\sqrt{z})\, dz \le$$

$$\le c_{14} \int\limits_0^{4h^2} t^{-1} \varphi(\sqrt{t})\, dt \le c_{15} \int\limits_0^h u^{-1} \varphi(u)\, du < c_{15} M \varphi(h).$$

Отсюда и из неравенства Уитни ([2], (18.11)) имеем

$$|g'(x) - L(x)| \le c_{16} M \varphi(h). \tag{13}$$

Теперь лемма 4′ доказывается точно так же, как и лемма 4, с применением неравенства (13).

Пусть функция $f = f(x)$ не убывает на I и $f \in B^r H[k, \varphi]$. Далее будем считать $r \ge 3$ (случай $r = 2$ рассматривается аналогично с учетом леммы 4′).

***Определение* 1.** *Отрезок* I_j *назовем: отрезком первого типа, если* $f'(x) \le c_7(c_4 + c_5)\rho^{-1} n^{-r} \varphi(1/n)$ *при* $x \in I_j$; *отрезком второго типа, если он* *не является отрезком первого типа и* $f'(x) \geq (c_4 + c_5)\,\rho^{-1} n^{-r} \varphi(1/n)$ *при* $x \in I_j$. *Остальные отрезки* I_j *назовем отрезками третьего типа. Объединение всех отрезков первого типа обозначим* E_1, *второго —* E_2 *и третьего —* E_3.

Лемма 5. *Соседних отрезков третьего типа не может быть больше, чем* $2m-4$, *т. е. каждое из множеств* J_j, $j = \overline{1, n-2m+4}$, *содержит по крайней мере один отрезок* I_j *не третьего типа.*

Лемма 5 следует из леммы 4.

Множество $E_1 \cup E_2$ представим в виде объединения (разумеется, конечного) непересекающихся отрезков $G_1 = [x_{j_1}, x_{j_0}] \cup [x_{j_3}, x_{j_2}] \cup \ldots$, $0 \leq j_\nu < j_{\nu+1} \leq n$. Пусть $j_\nu := j_\nu + (1 + (-1)^\nu)/2$. Если $|x_{j_\nu}| = 1$, то положим $S_\nu(x) := 1$, если же $|x| \neq 1$, то обозначим

$$S_\nu(x) := \int\limits_x^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{\bar{j}_\nu})^k (x_{j_\nu} - y)^k \, dy \left(\int\limits_{\bar{x}_{j_\nu}}^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{j_\nu})^k (x_{j_\nu} - y)^k \, dy \right)^{-1}.$$

Определение 2. Положим $g_1(x) := 0$ при $x \notin G_1$; $g_1(x) := f'(x) S_\nu(x)$ при $x \in [\bar{x}_{\bar{j}_\nu}, x_{j_\nu}]$; $g_1(x) := f'(x)$ в остальных случаях; $g_2(x) := f'(x) - g_1(x)$. Обозначим

$$f_1(x) := f(-1) + \int\limits_{-1}^{x} g_1(y)\, dy, \quad f_2(x) := \int\limits_{-1}^{x} g_2(y)\, dy.$$

Очевидно, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Лемма 6. *Для* $r \geq 3$ *справедливы неравенства*

$$0 \leq g_1(x) \leq c_{17} n^{-r} \varphi(1/n)/\rho, \; x \in G_1.$$

Доказательство. Неотрицательность функции $g_1(x)$ очевидна, а второе неравенство с учетом того, что $|S_\nu(x)| \leq 1$, следует из неравенства $|f'(x)| \leq c_{18} n^{-r} \varphi(n^{-1}) \rho^{-1}$, $x \in G_1$, которое доказывается аналогично лемме 4 с учетом леммы 5.

Лемма 7. *Для всех* $r \in N$ *функция* g_2 *неотрицательна и* $g_2 \in B^{r-1} H[k, c_{19}\varphi]$.

Доказательство. Неотрицательность функции g_2 очевидна, а неравенство

$$|(1+x)^{(r-1)/2} (1 - x - kd)^{(r-1)/2} \Delta_d^k (g_2^{(r-1)}, x)| \leq c_{19} \varphi(h) \tag{14}$$

очевидно, если $g_2 = 0$ или $g_2 = f'(x)$. Остается доказать (14) для $x \in [\bar{x}_{\bar{j}_\nu}, x_{j_\nu}] =: I_\nu^*$. Используя неравенство для производных, имеем $|f^{(j+1)}(x)| \leq c_{20} h^r d^{-(j+1)} \varphi(h)$, $j = \overline{0, r-1}$. Тогда

$$|g_1^{(r-1)}(x)| = \left| \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} f^{(j+1)}(x)\, S_\nu^{(r-1-j)}(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r-1} c_{20} h^r d^{-(j+1)} \varphi(h) \leq c_{21} (\sqrt{1-x^2} + h)\, \varphi(h),$$

а значит,

$$|g_1^{(r-1)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \leq c_{22} \varphi(h). \tag{15}$$

Учитывая (15), получаем

$$|(1+x)^{(r-1)/2}(1-x-kd)^{(r-1)/2}\Delta_d^k(g_1^{(r-1)},x)| \le$$
$$\le |(1+x)^{(r-1)/2}(1-x-kd)^{(r-1)/2}2^k g_1^{(r-1)}(\theta)| \le c_{22}\varphi(h), \quad \theta \in [x, x+kd]. \quad (16)$$

Наконец, (14) следует из (16) и определения 2. Лемма доказана.

Обозначим $G_2 := \{x, \operatorname{dist}(x,E) \le 20\ k^2\ \rho\}$. Из леммы 5 и определения 2 вытекает $g_2(x) = 0$ при $x \in I \setminus G_2$. Заметим, что при $n_1 \ge n$ справедливо неравенство

$$\rho_{n_1}(x)(\operatorname{dist}(x,G_2)+\rho_{n_1}(x))^{-1} \le c_{23}\rho(\operatorname{dist}(x,E_2)+\rho)^{-1}.$$

Отсюда и из лемм 1, 7 и определений 1, 2 вытекает следующая лемма.

Лемма 8. *При каждом натуральном* $n_1 \ge n$ *многочлен* $D_{n_1}(x, f_2)$ *степени* $< 17\ kn_1$ *имеет свойства*

$$|f_2(x) - D_{n_1}(x,f_2)| \le c_{24}n^{-r}\varphi(1/n), \quad x \in I,$$

$$D_n'(x,f_2) \ge -c_{25}n_1^{-r}\varphi(1/n_1)\rho_{n_1}^{-1}(x)\,\rho^{16k}(\operatorname{dist}(x,E_2)+\rho)^{-16k}, \quad x \in I \setminus E_2,$$

$$D_n'(x,f_2) \ge (c_4 + c_5)\,\rho^{-1}n^{-r}\varphi(1/n) - c_{25}n_1^{-r}\varphi(1/n_1)\rho_{n_1}^{-1}(x), \quad x \in E_2,$$

где $c_{24} := c_1c_{19}$, $c_{25} := c_1c_{19}c_{23}^{16k}$.

3. Доказательство теоремы 1 для случая $r \ge 3$. Пусть $n_1 \in N$ и $n_1 \ge n$. Обозначим $P_{n_1}(x) := \varphi(1/n)Q_n(x,f_2) + D_{n_1}(x,f_2) + R_n(x,f_1)$ многочлен степени $< 17k\,n_1$. Из лемм 8, 2, 6 и 3 вытекает

$$|f(x) - P_{n_1}(x)| \le (c_{24} + c_3 + c_6\,c_{17})\,n^{-r}\varphi(n^{-1}) = c_{26}\,n^{-r}\varphi(1/n)$$

и

$$P_{n_1}'(x) \ge (c_5\ n^{-r}\varphi(1/n)\rho^{-1} - c_{25}\ n_1^{-r}\rho_{n_1}^{-1}\varphi(n_1^{-1}))\rho^{16k}(\operatorname{dist}(x,E_2)+\rho)^{-16k}, x \in I.$$

Таким образом, осталось выбрать число n_1 таким, чтобы выполнялось неравенство

$$c_5\,n^{-r}\varphi(n^{-1})/\rho \ge c_{25}\,n_1^{-r}\varphi(1/n_1)/\rho_{n_1} \quad (\text{т. е. } n_1 = [(c_5^{-1}c_{25})^{1/(r-2)} + 1]\,n + 1).$$

Итак, для $n > c_{27}$ теорема 1 доказана. Для $n \le c_{27}$ искомый в теореме многочлен можно взять в виде $P_n(x) := L(x,f,I) + c_{28}x\,\varphi(1/n)$, где $c_{28} = \text{const}$ из неравенства Уитни ([2], (18.11)).

1. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness // Springer Ser. Computational Math. – 1987. – **9**. – P. 300–315.
2. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
3. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219–242.
4. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483–522.
5. *Leviatan D.* Monotone and Comonotone Polynomial Approximation Revisited // J. Approx. Theory. – 1988. – **53**. – P. 1–16.
6. *Дзюбенко Г. А., Листопад В. В., Шевчук И. А.* Равномерные оценки для монотонной многочленной аппроксимации // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 38–44.
7. *Шевчук И. А.* Комонотонное приближение и многочленные ядра Дзядыка. – Киев, 1989. – 27 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.10).
8. *Шевчук И. А.* О коприближении монотонных функций // Докл. АН СССР. – 1989. – **308**, № 3. – С. 537–541.

Получено 01. 04. 92