УДК 517.927.4

Ю. В. ПОКОРНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (НИИ математики при Воронеж. ун-те),
И. Г. КАРЕЛИНА, ассист. (Воронеж. ун-т)

Нелинейные теоремы сравнения на графах

Пусть Γ — связный геометрический граф из $\mathbb{R}^n$. На Γ распространяется обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(p(x)u')' + f(x,u)u = 0 \quad (x \in \Gamma).$$

Решения его на Γ, понимаемые естественным образом на каждом ребре, в каждой из внутренних вершин a склеиваются непрерывно при выполнении следующего условия гладкости: $\alpha_1(a)u'(a) + \ldots + \alpha_m(a)u'_m(a) = 0$. Для таких уравнений доказываются точные аналоги линейных теорем Штурма о перемежаемости нулей решения.

Нехай Γ — зв'язний геометричний граф із $\mathbb{R}^n$. На Γ розповсюджується звичайне диференціальне рівняння

$$(p(x)u')' + f(x,u)u = 0 \quad (x \in \Gamma).$$

Розв'язки його на Γ, які розуміємо звичайним чином на кожному ребрі, в кожній з внутрішніх вершин a склеюються неперервно при виконанні такої умови гладкості: $\alpha_1(a)u'(a) + \ldots + \alpha_m(a)u'_m(a) = 0$. Для таких розв'язків доводяться точні аналоги лінійних теорем Штурма про перемежованість нулів розв'язків.

Появившийся в последние годы интерес [1—3] к задаче Штурма — Лиувилля на геометрических графах (топологических сетях) объясняется не только многочисленными приложениями в математической и прикладной физике, но и трудностями использования традиционных методов при исследовании подобных задач. В связи с этим в [4, 5] для уравнений второго порядка на графах развиты точные аналоги качественных методов типа теорем сравнения Штурма и теории осцилляции. Далее показывается, что основные результаты [4, 5] линейной теории могут быть перенесены на случай нелинейных уравнений вида

$$(p(x)u')' + f(x,u)u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

В настоящей статье будем следовать терминологии и концепции [4, 5].

1. Решение $u(x)$ уравнения (1) рассматриваем на геометрическом графе $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, который по определению обладает следующей структурой: Γ — связное множество, превращающееся после выбрасывания конечного числа точек (вершин) в объединение попарно непересекающихся линейных интервалов (ребер). При произвольной нумерации ребер $\{\gamma_i\}_1^m$ на каждом из них уравнение (1) обычное скалярное, причем ориентация каждого γ_i, требуемая для определения знака производной, безразлична в (1). Каждую вершину (конец одного из ребер), в которой смыкается несколько (не менее двух ребер), называют внутренней, их множество обозначают через $J(\Gamma)$. Остальные вершины Γ граничные, их множество — $\partial\Gamma$. Граф Γ предполагается открытым, т.е. $\Gamma \cap \partial\Gamma = \Phi$. Очевидно, $\Gamma = \{\gamma_i\}_1^m \cup J(\Gamma)$.

В каждой из внутренних вершин $a \in J(\Gamma)$ уравнение (1) дополняем следующими условиями гладкости:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(a)u'_i(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma), \tag{2}$$

где $\{\alpha_1(a), \ldots, \alpha_m(a)\} = B(a)$ — набор положительных чисел, свой для каждой $a \in J(\Gamma)$, через $u_i(x)$ обозначается сужение функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}^1$ на ребро γ_i, а производная $u'_i(a)$ вычислена вдоль ребра γ_i при его параметризации «от a». Тем самым под уравнением второго порядка на Γ понимаем сразу и (1), и (2). Функция $p(\cdot)$ в (1) предполагается для простоты дважды дифференцируемой на каждом γ_i, а $f(x,u) : \{\gamma_i\} \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ равностепенно непрерывной. Решение уравнения (1), (2) подразумевается в классе функций, непрерывных в целом на Γ. Множество решений уравнения (1), описанных выше, обозначим $D_B(\Gamma)$.

2. Далее всюду предполагается, что $p(x) > 0$ на замыкании каждого ребра. Предполагаем также, что функция $f(x, u) \cdot u = F(x, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори [6] в его естественном толковании на случай графов. Традиционная для скалярного уравнения задача Коши в случае общего графа лишена смысла, поэтому вопрос о разрешимости уравнения

$$(p(x)\,u')' + F(x, u) = 0, \quad u(\cdot) \in D_B(\Gamma), \tag{3}$$

обсудим в форме разрешимости краевой задачи, т. е. в сочетании с условиями на $\partial\Gamma$ в виде условий Дирихле

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Простейшие условия такой разрешимости дает теорема 1.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, u)$ равномерно ограничена на $\Gamma \times \mathbb{R}^1$. Тогда любая задача Дирихле* (3), (4) *разрешима.*

Доказательство. Пусть $G(x, s)$ — функция Грина дифференциального оператора $Lu \equiv -(pu')'$ на $D_B(\Gamma)$ при краевых условиях (4), существующая согласно [7]. Тогда рассматриваемая краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \int_\Gamma G(x, s)\, F[s, u(s)]\, ds + z_0(x), \tag{5}$$

где $z_0(x)$ — решение однородного уравнения $Lz \equiv 0$ в $D_B(\Gamma)$, удовлетворяющее исходным краевым условиям. Это решение в силу невырожденности задачи $Lz \equiv 0$, $z|_{\partial\Gamma} = 0$ определяется однозначно для любых неоднородных краевых условий на $\partial\Gamma$. Если в исходной задаче Дирихле $z_0|_{\partial\Gamma} = 0$, то $z_0(x) \equiv 0$. Интегральный оператор

$$(Au)(\cdot) = \int_\Gamma G(\cdot, s)\, F[s, u(s)]\, ds$$

в силу непрерывности F действует в пространстве $\hat{C}(\Gamma)$ равномерно непрерывных на Γ функций. Если в этом пространстве ввести естественную норму $\| u(\cdot) \| = \sup_{x \in \Gamma} |u(x)|$, то оно превращается в банахово пространство, в котором в силу условия Каратеодори непрерывен оператор суперпозиции $(Fu)(t) \equiv F[t, u(t)]$, вполне непрерывен интегральный оператор с ядром $G(x, s)$, и следовательно, вполне непрерывна суперпозиция этих операторов, совпадающая с A. Значит, в этом пространстве $\hat{C}(\Gamma)$ вполне непрерывен и оператор $A_{z_0}u = Au + z_0$, порождаемый правой частью уравнения (5). Таким образом, вопрос о разрешимости исходной краевой задачи с неоднородными, вообще говоря, краевыми условиями сведен к вопросу о существовании неподвижной точки у вполне непрерывного оператора A_{z_0}. Для завершения доказательства теоремы в силу принципа Шаудера достаточно показать, что в $\hat{C}(\Gamma)$ существует инвариантный для A_{z_0} шар.

В самом деле, в силу равномерной ограниченности F существует число $M < \infty$ такое, что $|(Fu)(x)| \leqslant M$ при всех $x \in \Gamma$ и любой $u(\cdot) \in \hat{C}(\Gamma)$. Отсюда и из ограниченности $G(x, s)$ следует очевидным образом, что $\sup\{\|A_{z_0}u\| : u \in \hat{C}(\Gamma)\} < \infty$, т. е. при действии оператора A_{z_0} образ $A_{z_0}(\hat{C}(\Gamma))$ всего пространства $\hat{C}(\Gamma)$ принадлежит некоторому шару. Но тогда этот шар инвариантен для A_{z_0}. Теорема доказана.

Использованный в приведенном доказательстве переход к операторному уравнению $u = A_{z_0}u$ позволяет применять более тонкую топологическую технику теории степени отображений. При этом устанавливается, например, следующая теорема.

Рассмотрим уравнение

$$(p(x)\,u')' + \mu F(x, u) = 0. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество функций $u(\cdot) \in D_B(\Gamma)$, каждая из которых удовлетворяет условиям (4) и, главное, при некотором $\mu = \mu(u)$ из $(0, 1)$ удовлетворяет уравнению (6). Множество $\mathfrak{M}$ может быть и пустым.

Т е о р е м а 2. *Для разрешимости задачи* (3), (4) *достаточно, чтобы множество* $\mathfrak{M}$ *было ограничено.*

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы, отметим, что она содержит в себе теорему 1 в случае однородных краевых условий. Следует заметить также, что для ограниченности множества $\mathfrak{M}$ достаточно, например, чтобы функция $F(x, u)$ удовлетворяла неравенствам

$$|F(x, u)| \leqslant q(x) \cdot |u| + M, \quad x \in \Gamma, \tag{7}$$

где $q(\cdot) \in C(\Gamma)$ и $M = \mathrm{const} < \infty$, и спектр задачи

$$(pu')' + \mu q u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad u \in D_B(\Gamma), \tag{8}$$

не содержал интервала [0, 1].

3. При изучении поведения решений на графе скалярное свойство перемежаемости нулей трансформируется в более общее, требующее для своего описания нового понятия зоны знакопостоянства. Открытый связный подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ называется пучностью [4] (S-зоной [5]) непрерывной функции $u(\cdot)$, если $u(x) \neq 0$ на Γ_0 и $u \,|\, \partial\Gamma_0 = 0$.

Рассмотрим наряду с (3) уравнение

$$u'' + F(x, u, u') = 0 \quad u(\cdot) \in D_B(\Gamma) \tag{9}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть функция* $F(x, u, u')$ *строго убывает по* u. *Тогда для любых двух решений* $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ *уравнения* (9) *их разность* $(u - v)$ *не имеет ни одной пучности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В предположении противного существуют два различных решения $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ уравнения (9) такие, что их разность имеет пучность $\Gamma_0 \neq \varnothing$. Предполагая для определенности, что $(u - v)(x) > 0$ на Γ_0, обозначим через ξ точку максимума $(u - v)$ на Γ_0. Такая точка наверняка существует в силу условия $(u - v)|_{\partial\Gamma_0} = 0$. Рассмотрим вначале случай, когда ξ не совпадает ни с одной из внутренних вершин Γ_0. Пусть γ_0 — ребро Γ_0, содержащее ξ. Ориентируя произвольным образом γ_0 (т. е. выбирая на γ_0 одно из двух возможных направлений), получаем в точке ξ максимума $(u - v)$ на γ_0, что $(u - v)'(\xi) = 0$ и $(u - v)''(\xi) \leqslant 0$. Поэтому $u(\xi) > v(\xi)$, $u'(\xi) = v'(\xi)$ и $u''(\xi) \leqslant v''(\xi)$. Отсюда в силу убывания F по u следует, что $F(\xi, u(\xi), u'(\xi)) < F(\xi, v(\xi), v'(\xi))$. А так как $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют (9), то последнее неравенство означает, что $u''(\xi) > v''(\xi)$. Но это противоречит полученному выше неравенству $u''(\xi) \leqslant v''(\xi)$.

Пусть теперь ξ совпадает с одной из внутренних вершин Γ_0. Обозначим $(u - v)$ через z. Параметризуя каждое ребро γ_i, примыкающее к ξ, в направлении «от ξ», в силу неравенства $z_i(\xi) \geqslant z_i(x)$ на γ_i (вблизи ξ) будем иметь $z_i'(\xi) \leqslant 0$. Из условия гладкости (2) следует, что $z_i'(\xi) = 0$. Но тогда (так как $\xi \to \max\limits_{\gamma_i} z_i$) должно быть $z_i''(\xi) \leqslant 0$. Значит, $u_i'(\xi) = v_i'(\xi)$ и $u_i''(z) \leqslant v_i''(\xi)$ при каждом i. Так как F убывает по u, то $F(\xi, u_i(\xi), u_i'(\xi)) < F(\xi, v_i(\xi), v_i'(\xi))$ вдоль каждого ребра γ_i, примыкающего к ξ. Отсюда и из (9) имеем $u_i''(\xi) > v_i''(\xi)$, что противоречит установленному ранее неравенству $u_i''(\xi) \leqslant v_i''(\xi)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Если в условиях теоремы 3 функция F не зависит от u', то предположение о строгом убывании F по u можно ослабить до нестрогого.

2. Теорема 3 без всяких изменений переносится на случай уравнения

$$(p(x)u')' + F(x, u, u') = 0, \quad u \in D_B(\Gamma),$$

при $p > 0$ на Γ. В самом деле, это уравнение может быть переписано в виде $pu'' + [F(x, u, u') + p'u'] = 0$, где второе слагаемое в новой нелинейности не влияет на условие монотонности по u.

3. Теорему 3 можно трактовать и как теорему единственности: если Γ_0 — некоторый непустой подграф из Γ и решения $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ принимают одинаковые значения в каждой из граничных вершин Γ_0, то $u(x) \equiv v(x)$

на Γ_0. Следует отметить, что в случае $\Gamma_0 \neq \Gamma$ даже для линейных уравнений равенство $u(x) = v(x)$, вообще говоря, не переносится на точки $x \in \Gamma \setminus \Gamma_0$.

4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Пусть Γ_0 — нетривиальная пучность некоторого решения $u(\cdot)$. Тогда любое другое решение $v(\cdot)$, пересекающееся на Γ_0 с $u(\cdot)$ и ненулевое в одной из точек $\partial\Gamma_0$, точно меняет знак в Γ_0. Для случая линейного однородного уравнения на отрезке последнее означает перемежаемость нулей у неколлинеарных решений.

Вернемся к уравнению

$$(p(x)u')' + f(x, u)u = 0, \quad u \in D_B(\Gamma). \tag{1}$$

Другой вариант теорем Штурма о разделении нулей дает теорема 4.

Теорема 4. *Пусть f не убывает по u при $u \geqslant 0$ и каждом $x \in \Gamma$. Пусть $u(\cdot)$ — некоторое решение* (1) *и Γ_0 — какая-то его $(+)$-пучность. Тогда любое неколлинеарное с $u(\cdot)$ решение* (1), *непересекающееся с $u(\cdot)$ в Γ_0, не может иметь в Γ_0 положительных значений.*

Доказательство. Предполагая противное, имеем решение $v(\cdot)$ уравнения (1), положительное хотя бы в одной из точек Γ_0, причем $u(x) - v(x) \neq 0$ при всех $x \in \Gamma_0$. Предположим вначале, что $u(x) - v(x) < 0$ на Γ_0. Тогда вследствие неравенства $u(x) > 0$ на Γ_0 имеем $0 < u(x) < v(x)$ на Γ_0 и, по условию теоремы, $f(x, u(x)) \leqslant f(x, v(x))$ на Γ_0. Подставляя функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ в уравнение (1) и полагая $q_1(x) \equiv f(x, u(x))$ и $q_2(x) = f(x, v(x))$, будем иметь $q_1(x) \leqslant q_2(x)$ на Γ_0 причем $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$(pu')' + q_1 u = 0, \quad u \in D_B(\Gamma), \tag{10}$$

$$(pv')' + q_2 v = 0, \quad v \in D_B(\Gamma). \tag{11}$$

Согласно аналогу теорем Штурма для линейных уравнений на графах [5] из неравенства $q_1(x) \leqslant q_2(x)$ на Γ_0 следует, что для любого решения $\varphi(\cdot)$ уравнения (10) на каждой его пучности $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$ любое решение $\psi(\cdot)$ уравнения (11), неколлинеарное $\varphi(\cdot)$ на Γ_1, должно менять знак в Γ_1. В силу этого результата при $\Gamma_1 = \Gamma_0$ функция $v(\cdot)$, удовлетворяющая (11), должна менять знак в Γ_0, что противоречит неравенству $v(x) > 0$ на Γ_0. Таким образом, неравенство $u(x) - v(x) < 0$ невозможно на Γ_0.

Предположим теперь, что $u(x) - v(x) > 0$ всюду на Γ_0. Обозначая через Γ^0 любую компоненту связности множества решений неравенства $v(x) > 0$ (по предположению оно непусто), имеем из включения $\Gamma^0 \subset \Gamma_0$ и неравенства $u(x) > v(x)$ на Γ_0, что Γ^0 является $(+)$-пучностью для $v(\cdot)$. Сводя теперь рассуждения к множеству Γ^0, имеем на нем $v(x) < u(x)$, т. е. $q_1(x) \equiv f(x, u(x)) \geqslant q_2(x) \equiv f(x, v(x))$. Но тогда по описанному выше аналогу теоремы Штурма функция $u(\cdot)$ должна менять знак на $(+)$-пучности Γ^0 функции $v(x)$, что невозможно. Теорема доказана.

4. Изложенные выше методы позволяют изучать нелинейную спектральную задачу

$$(p(x)u')' + \lambda F(x, u) = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad u \in D_B(\Gamma), \tag{12}$$

при $\lambda > 0$. Обозначим через Λ множество значений $\lambda > 0$, при каждом из которых задача (12) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 5. *Пусть $F(x, u)$ положительна и строго убывает по u при всех x, u. Тогда при каждом $\lambda \in \Lambda$ существует единственное решение $u_\lambda(\cdot)$ задачи* (12). *Это решение строго положительно на Γ, и при каждом $x \in \Gamma$ функция $u_\lambda(x)$ не убывает по λ.*

Доказательство. Единственность решения задачи (12) при $\lambda \in \Lambda$ следует из теоремы 3. Строгая положительность его в Γ следует из строгой положительности функции Грина задачи $-(pu')' = f$, $u|_{\partial\Gamma} = 0$ и положительности $F(x, u(x))$ на Γ. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $\lambda_1 < \lambda_2$; положим $u_{\lambda_1}(\cdot) = u_1(\cdot)$ и $u_{\lambda_2}(\cdot) = u_2(\cdot)$. Если бы при некотором $\xi \in \Gamma$ $u_1(\xi) > u_2(\xi)$, то функция $\varphi(x) \equiv u_1(x) - u_2(x)$, равная нулю на $\partial\Gamma$, имела бы некоторую непустую $(+)$-пучность $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Тогда на Γ_0 должно быть $u_1(x) > u_2(x)$ и $\lambda_1 F(x, u_1(x)) < \lambda_2 F(x, u_2(x))$, откуда в силу строгой положительности функции Грина $G_0(x, s)$ задачи $-(pu')' = f$, $u|_{\partial\Gamma_0} = 0$ должно следовать

$$u_1(x) = \lambda_1 \int_{\Gamma_0} G_0(x, s) F(s, u_1(s))\, ds < u_2(x) =$$

$$= \lambda_2 \int_{\Gamma_0} G_0(x, s) F(s, u_2(s))\, ds, \quad x \in \Gamma_0,$$

что противоречит предположенному неравенству $u_1(x) > u_2(x)$ на Γ_0. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда в задаче (12) функция $F(x, u)$ возрастает по U и, что особенно важно для приложений, $F(x, 0) \equiv 0$. В этом случае, очевидно, задача (12) точно имеет при любом λ тривиальное решение. Будем считать $\lambda \in \mathbb{R}$ собственным значением (12), если при этом v задача (12) имеет нетривиальное решение.

Теорема 6. *Пусть $F(x, u)$ непрерывна и $F(x, 0) \equiv 0$; $F(x, u)$ строго возрастает по u при $u > 0$ и каждом $x \in \Gamma$. Пусть далее $F(x, u)$ допускает представление $F(x, u) = u \cdot f(x, u)$, где $f(x, u)$ не возрастает по u. Тогда множество Λ собственных значений задачи* (12), *отвечающих неотрицательным на Γ собственным функциям, обладает следующими свойствами:*

а) *Λ связано, т. е. его внутренность совпадает с некоторым интервалом $(\lambda_0, \lambda_\infty)$;*

б) *при каждом $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$ задача* (12) *имеет единственное неотрицательное на Γ решение $u_\lambda(\cdot)$; при этом $u_\lambda(\cdot)$ строго положительна на Γ;*

в) *зависимость $u_\lambda(\cdot)$ от параметра λ строго возрастает по λ;*

г) *при каждом $\lambda^* \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$ соответствующее решение $u_{\lambda^*}(\cdot)$ задачи* (12) *является равномерным пределом последовательности $u^k(\cdot)$, определяемой итерационными равенствами*

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du^k}{dx}\right) = -\lambda^* F(u, u^{k-1}), \quad u^k|_{\partial\Gamma} = 0, \quad u^k \in D_B(\Gamma),$$

при $k = 1, 2, \ldots$ и любом начальном приближении $u^0(x)$, непрерывно и неотрицательно на Γ.

Доказательство основано на привлечении теории u_0-вогнутых операторов [8].

Монотонный интегральный оператор, ядром которого является функция Грина $G(x, s)$, обладает свойством u_0-положительности [7]. Поэтому и в силу убывания $f(x, u)$ по u интегральный оператор

$$(Au)(\cdot) = \int_\Gamma G(\cdot, s) F[s, u(s)]\, ds$$

является вогнутым. Строгая монотонность A, т. е. u_0-монотонность A, следует теперь из строгого возрастания $F(x, u)$ по u.

1. *Павлов Б. С., Фаддеев М. Д.* Модель свободных электронов и задача рассеяния // Теорет. и мат. физика.— 1983.— 55, № 2.— С. 257—269.
2. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н.* Об одной векторной краевой задаче // Краевые задачи.— Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1983.— С. 64—70.
3. *Nicaise S.* Estimées du spectre du laplasien sur un résequ topologieque fini // C. r. Acad. Sci.— 1986.— 303, N 8.— P. 343—346.
4. *Покорный Ю. В.* О неосцилляции на графах // Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И. Н. Векуа.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1988.— 3, № 3.— С. 139—142.
5. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц. уравнения.— 1989.— 25, № 7.— С. 1141—1150.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М., Мир, 1970.— 720 с.
7. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О краевой задаче на графе // Дифференц. уравнения.— 1988.— 24, № 4.— С. 701—703.
8. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.— М. : Физматгиз, 1962.— 395 с.

Получено 29.12.89