УДК 517.5,519.65

Н. П. КОРНЕЙЧУК, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О некоторых задачах кодирования и восстановления функций

Рассматриваются задачи кодирования и восстановления функциональной зависимости, когда значениями функционалов на функции φ кодируется функция $f = A\varphi$, где A — некоторый оператор. Рассмотрены конкретные случаи для операторов дифференцирования, свертки, а также для решения краевой задачи.

Розглядаються задачі кодування та відновлення функціональної залежності, коли значеннями функціоналів на функції φ кодується функція $f = A\varphi$, де A — деякий оператор. Розглянуті конкретні випадки для операторів диференціювання, згортки, а також для розв'язку крайової задачі.

Вопросы кодирования и последующего восстановления функциональной зависимости, рассматриваемые как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, в последнее время привлекают все большее внимание. Это объясняется, в частности, тем, что разработанные в теории приближения эффективные методы решения экстремальных задач позволили найти точное решение и в ряде задач оптимального кодирования и восстановления функций. Изложение связанных с этими задачами результатов можно найти, например, в монографиях [1—3], см. также [4, 5].

В известных нам публикациях по этой проблематике метод кодирования оценивается по погрешности восстановления самой закодированной функции. Здесь мы рассмотрим более общую задачу, когда по дискретной информации о функции φ восстанавливается функция $f = A\varphi$, в которую функция φ отображается некоторым оператором A. Сформулируем постановку этой задачи в самом общем случае.

Пусть X, Y — метрические пространства с расстояниями $\rho(x, y)_X$ и $\rho(x, y)_Y$ соответственно. С помощью набора

$$M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \tag{1}$$

заданных на X непрерывных функционалов μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, элементу $x \in X$ сопоставим числовой вектор

$$T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}, \tag{2}$$

который будем называть вектором информации. Можно считать, что элемент x закодирован точкой в R^N с помощью набора функционалов (1), определяющего метод кодирования. Если $Y = X$ и по вектору (2) восстанавливается элемент x из некоторого множества $\mathfrak{M} \subset X$, то мера информативности метода кодирования в определенной степени характеризуется диаметром прообраза отображения $x \to T(x, M_N)$, т. е. диаметром множества $\{y : y \in \mathfrak{M},\ T(y, M_N) = T(x, M_N)\}$: чем меньше этот диаметр, тем больше информативность метода M_N.

Рассмотрим случай, когда по вектору информации $T(x, M_N)$, $x \in \mathfrak{M} \subset X$ необходимо восстановить элемент $Ax \in Y$, где A — некоторый непрерывный оператор, отображающий $\mathfrak{M}$ в Y. В этом случае информативность метода кодирования надо оценивать по диаметру множества элементов Ay, $y \in \mathfrak{M} \subset X$, для которых вектор информации $T(y, M_N)$ один и тот же. Для корректности постановки задачи надо обеспечить конечность этого диаметра, налагая на элементы множества $\mathfrak{M}$ те или иные априорные условия. Величина

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} = \sup\{\rho(Ax, Ay)_Y : x, y \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = T(y, M_N)\} \tag{3}$$

характеризует информативность фиксированного метода кодирования M_N относительно оператора A и множества $\mathfrak{M}$. При этом естественно возникает задача о наилучшем методе кодирования для множества $\mathfrak{M}$ и оператора A, т. е. задача отыскания (при фиксированном N) точной нижней грани

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, A, X, Y) = \inf_{M_N} \mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} \tag{4}$$

и в указании метода M_N, реализующего эту нижнюю грань.

В случае, когда X и Y — линейные нормированные пространства, $A(\mathfrak{M} \to Y)$ — линейный оператор, $M_N = M'_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ — набор заданных на X линейных ограниченных функционалов, вместо (4) естественно рассматривать величину

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, A, X, Y) = \inf_{M'_N} \mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M'_N)_{X,Y}. \tag{5}$$

Если $Y = X$, то будем писать $\mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_X$, $\gamma^N(\mathfrak{M}, A, X)$ и т. д., а если, кроме того, A — единичный оператор, то в обозначениях букву A будем опускать.

Отдельная, имеющая, в первую очередь, практический смысл, задача состоит в эффективном восстановлении по вектору $T(x, M_N)$ элемента Ax с минимально возможной на всем множестве $\mathfrak{M}$ погрешностью, равной (при фиксированном N) величине (3). Речь идет о восстановлении в пространстве Y множества

$$\{Ay : y \in \mathfrak{M}, T(y, M_N) = T(x, M_N)\}. \tag{6}$$

Если Y — линейное нормированное пространство, то можно попытаться восстановить это множество с указанной выше погрешностью с помощью линейной комбинации

$$z_u = \sum_{k=1}^{N} \mu_k(u)\, y_k, \quad u \in X, \tag{7}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_N$ — некоторая система линейно независимых элементов в Y. Элемент z_x может не принадлежать множеству (6). Однако, если окажется, что

$$\rho(z_u, Au)_Y \leqslant \frac{1}{2} \mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} \quad \forall u \in \mathfrak{M},$$

то для элемента $u \in \mathfrak{M}$ такого, что $T(u, M_N) = T(x, M_N)$, будет $z_u = z_x$, и следовательно, множество (6) принадлежит шару с центром в z_x радиуса $\frac{1}{2}\mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y}$. Таким образом, любой элемент этого шара вида $v = Au$, где $u \in \mathfrak{M}$, восстанавливает Ax с минимально возможной на множестве $\mathfrak{M}$ погрешностью.

Задачу отыскания верхней грани (3) при выполнении определенных условий для X, Y, $\mathfrak{M}$, A и M_N удается существенно сузить, перейдя от всего множества $\mathfrak{M}$ к подмножеству только тех его элементов, на которых вектор информации обращается в нуль. В случае, когда $Y = X$ и A — единичный оператор, такой вопрос рассматривался в [4]; здесь мы покажем, что приведенное там по этому поводу утверждение остается в силе и в более общем случае.

Предложение 1. *Пусть X, Y — линейные метрические пространства с транзитивной метрикой (т. е. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$), $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричное множество в X, а непрерывный оператор $A(\mathfrak{M} \to Y)$ удовлетворяет условию $A(-x) = -Ax$. Тогда для любого набора $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ заданных на X непрерывных и нечетных функционалов μ_k справедлива оценка*

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M_N)_{X,Y} \geqslant \sup\{\rho(2Ax, 0)_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\}. \tag{8}$$

Если, кроме того, для любых $x, y \in \mathfrak{M}$ элемент $z = \frac{1}{2}(x - y)$ принадлежит $\mathfrak{M}$, выполняется равенство $Az = \frac{1}{2}(Ax - Ay)$ и из $\mu_k(x) =$

$= \mu_k(y)$ *следует* $\mu_k(z) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$, *то в* (8) *имеет место знак равенства.*

В самом деле, точная верхняя грань в (3) может лишь уменьшиться, если распространить ее только на пары элементов x и $-x$ из $\mathfrak{M}$ таких, что $T(x, M_N) = 0$, ибо тогда и $T(-x, M_N) = 0$. Так как в силу транзитивности метрики $\rho(Ax, -Ax)_Y = \rho(2Ax, 0)_Y$, то сразу получаем оценку (8).

При выполнении дополнительных условий второго утверждения в предложении 1 каждой паре элементов $x, y \in \mathfrak{M}$, для которых $T(x, M_N) = T(y, M_N)$, соответствует элемент $z = \frac{1}{2}(x - y)$, также принадлежащий $\mathfrak{M}$, причем $T(z, M_N) = 0$. Следовательно, правая часть в (3) не может уменьшиться, если верхнюю грань вычислять по всем $z \in \mathfrak{M}$, для которых $T(z, M_N) = 0$. А так как с учетом транзитивности метрики $\rho(Ax, Ay)_Y = \rho(Ax - Ay, 0)_Y = \rho(2Az, 0)_Y$, то справедливо неравенство, противоположное (8).

В качестве следствия получаем такое утверждение.

Предложение 2. *Если $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество в линейном нормированном пространстве X, M'_N — набор $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ линейных ограниченных функционалов, заданных на X, а A — линейный оператор, отображающий $\mathfrak{M}$ в линейное нормированное пространство Y, то*

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, A, M'_N)_{X,Y} = 2 \sup \{ \| Ax \|_Y : x \in \mathfrak{M}, T(x, M_N) = 0\}.$$

Перейдем к рассмотрению конкретных случаев.

1. Кодирование m-й производной. Пусть L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и C — пространства 2π-периодических функций $f(t)$ с обычной нормой:

$$\| f \|_p := \| f \|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} | f(t) |^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_t \operatorname{vrai} | f(t) |, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\| f \|_C = \max_t | f(t) |;$$

A — оператор d^m/dt^m m-го дифференцирования, т. е. $Af = f^{(m)}(t)$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^r$ — выпуклое центрально-симметричное множество функций $f \in C$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, то в силу предложения 2 для любого набора M'_N линейных ограниченных функционалов при $f^{(m)} \in L_p$

$$\mathcal{K}\left(\mathfrak{M}^r, \frac{d^m}{dt^m}, M'_N\right)_p := \mathcal{K}\left(\mathfrak{M}^r, \frac{d^m}{dt^m}, M'_N\right)_{C, L_p} = 2 \sup \{ \| f^{(m)} \|_p : f \in \mathfrak{M}^r,$$

$$T(f, M'_N) = 0\}, \quad m = 1, 2, \ldots, r - 1.$$

Будем кодировать производную $f^{(m)}(t)$ коэффициентами Фурье $a_k(f)$, $b_k(f)$ функции $f \in \mathfrak{M}^r$ по тригонометрической системе. Коэффициент $a_0(f)$ не несет информации о $f^{(m)}(t)$, и мы не будем его использовать, полагая, например, что $a_0(f) = 0$. В качестве $\mathfrak{M}^r$ возьмем класс W^r_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $r = 1, 2, \ldots$, функций $f \in C$, у которых $\| f^{(r)} \|_q \leqslant 1$. Пусть M^F_{2n} — набор из $2n$ коэффициентов Фурье $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, функции $f \in W^r_q$, $W^r_{q,n}$ — множество функций $f \in W^r_q$, у которых эти коэффициенты равны нулю, т. е. $T(f, M^F_{2n}) = 0$. Тогда

$$\mathcal{K}\left(W^r_q, \frac{d^m}{dt^m}, M^F_{2n}\right)_p = 2 \sup \{ \| f^{(m)} \|_p : f \in W^r_{q,n}\} = 2 \sup \{ \| f \|_p : f \in W^{r-m}_{q,n}\},$$

$$1 \leqslant p, q \leqslant \infty. \tag{9}$$

Известно (см., например, [6, с. 102], что при всех $r = 1, 2, \dots$

$$\sup \{\|f\|_\infty : f \in W^r_{q,n}\} = \frac{1}{\pi} E_{n+1}(B_r)_{q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

где $E_{n+1}(B_r)_p$ — наилучшее приближение ядра Бернулли

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r} \tag{10}$$

тригонометрическими полиномами порядка n в метрике L_p, и

$$\sup \{\|f\|_p : f \in W^r_{p,n}\} = K_r (n+1)^{-r}, \quad p = 1, \infty,$$

где K_r — константы Фавара. Это, в связи с (9), позволяет написать при $m = 1, 2, \dots, r-1$:

$$\begin{gathered} \mathcal{K}\left(W^r_q, \frac{d^m}{dt^m}, M^F_{2n}\right)_\infty = \frac{2}{\pi} E_{n+1}(B_{r-m})_{q'}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \\ \mathcal{K}\left(W^r_p, \frac{d^m}{dt^m}, M^F_{2n}\right)_p = 2K_{r-m}(n+1)^{-r+m}, \quad p = 1, \infty, \end{gathered} \tag{11}$$

Правая часть (11) совпадает [3, с. 384] с величиной $\lambda^{2n+1}(W^r_p, L_r)$. Если $f \in W^r_p$, то $f^{(m)} \in W^{r-m}_{p,0}$, но можно показать, что при $p = 1$ и ∞ $\lambda^N(W^r_p, L_p) = \lambda^N(W^r_{p,0}, L_p)$, так что в этих случаях метод M^F_{2n} является наилучшим методом кодирования m-й производной $f^{(m)}$ вектором $T(f, M'_{2n})$.

В этих же случаях мы можем решить и вторую из поставленных выше задач: об эффективном восстановлении m-й производной $f^{(m)}(t)$ по вектору информации $T(f, M^F_{2n})$ с минимально возможной на классе погрешностью. Будем исходить из сумм Фавара [3, с. 161] для $f^{(m)}(t)$, $f \in W^r_p$:

$$U_n(f^{(m)}, \lambda^*, t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^*_k [a_k(f^{(m)}) \cos kt + b_k(f^{(m)}) \sin kt], \tag{12}$$

где $\lambda^*_k = \lambda^*_k(r, m, n)$ — специально выбранные, эффективно вычисляемые и не зависящие от f коэффициенты, $a_k(g)$ и $b_k(g)$ — коэффициенты Фурье функции $g(t)$. Так как $f^{(m)} \in W^{r-m}_p$, то [3, с. 162]

$$\|f^{(m)} - U_n(f^{(m)}, \lambda^*)\|_p \leqslant K_{r-m}(n+1)^{-r+m}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Интегрируя по частям, нетрудно подсчитать, что

$$a_k(f^{(m)}) \cos kt + b_k(f^{(m)}) \sin kt =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{m/2} k^m [a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt], & \text{если } m \text{ четно;} \\ (-1)^{(m+1)/2} k^m [b_k(f) \cos kt - a_k(f) \sin kt], & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Подставив эти выражения в (12), получим полином

$$U_n(f^{(m)}, \lambda^*, t) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{m/2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^*_k k^m [a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt] \quad (m = 2j), \\ (-1)^{(m+1)/2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^*_k k^m [b_k(f) \cos kt - a_k(f) \sin kt] \quad (m = 2j - 1), \\ \hfill i = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

который эффективно строится по вектору $T(f, M_{2n}^F)$, т. е. по коэффициентам Фурье функции $f(t)$. При этом если $g \in W_p^r$, $p = 1, \infty$, и $T(g, M_{2n}^F) = T(f, M_{2n}^F)$, то производная $g^{(m)}(t)$ принадлежит шару в L_p с центром в $U_n(f^{(m)}, \lambda^*, t)$ радиуса $K_{r-m}(n+1)^{-r+m}$.

В этой же задаче кодирования m-й производной функции $f \in \mathfrak{M}^r$ рассмотрим другой метод, задаваемый набором $M_{2n}^s = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n}\}$ линейных функционалов, определяемых равенствами

$$\mu_k(f) = f\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right), \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

где α — любое фиксированное число. Таким образом, производная $f^{(m)}(t)$ кодируется значениями функции $f(t)$ в $2n$ равноотстоящих точках на периоде. В силу предложения 2 при всех $m = 1, 2, \dots, r-1$

$$\mathcal{K}\left(\mathfrak{M}^r, \frac{d^m}{dt^m}, M_{2n}^s\right)_p = 2\sup\left\{\| f^{(m)} \|_p : f \in \mathfrak{M}^r, f\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) = 0, \right.$$
$$\left. k = 1, 2, \dots, 2n\right\}. \qquad (13)$$

В случае $\mathfrak{M}^r = W_\infty^r$ верхняя грань в правой части (13) вычислена [3, с. 209]:

$$\sup\left\{\| f^{(m)} \|_p : f \in W_\infty^r, f\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n\right\} =$$
$$= \| \varphi_{n,r-m} \|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad m = 1, 2, \dots, r-1,$$

где $\varphi_{n,j}(t)$ — идеальный сплайн, определяемый равенствами

$$\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sgn}\sin nt, \quad \varphi_{n,\nu}(t) = \int_{\xi_\nu}^{t} \varphi_{n,\nu-1}(u)\, du,$$

причем ξ_ν выбраны из условия $\int_0^{2\pi} \varphi_{n,\nu}(t)\, dt = 0$. Заметим, что $\| \varphi_{n,\nu} \|_\infty = K_\nu n^{-\nu}$. Таким образом,

$$\mathcal{K}\left(W_\infty^r, \frac{d^m}{dt^m}, M_{2n}^s\right)_p = 2\| \varphi_{n,r-m} \|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad m = 1, 2, \dots, r-1. \quad (14)$$

Чтобы оценить этот результат с точки зрения оптимизационной задачи (5), заметим, что если $f \in W_\infty^r$, то $f^{(m)} \in W_{\infty,0}^{r-m}$, а известно, что [3, с. 382]

$$\lambda^{2n}(W_\infty^{r-m}, L_p) = 2\| \varphi_{n,r-m} \|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \qquad (15)$$

Относительно задачи об эффективном восстановлении m-й производной $f^{(m)}(t)$ по вектору $T(f, M_{2n}^s)$ можно сказать следующее. Существует и единствен сплайн $s(f^{(m)}, t)$ порядка $r-m$ дефекта 1, совпадающий с $f^{(m)}(t)$ в точках $\tau_k = k\pi/n$, $k = 1, 2, \dots, 2n$, если $m-r$ нечетно, и в точках $\tau_k = k\pi/n$, $k = 1, \dots, 2n$, если $m-r$ четно, причем [2, 3] для всех $t \in (-\infty, \infty)$ $|f^{(m)}(t) - s(f^{(m)}, t)| \leqslant |\varphi_{n,r-m}(t)|$, так что

$$\| f^{(m)} - s(f^{(m)}) \|_p \leqslant \| \varphi_{n,r-m} \|_p.$$

Сплайн $s(f^{(m)}, t)$ может быть представлен в виде

$$s(f^{(m)}, t) = \sum_{k=1}^{2n} f^{(m)}(\tau_k)\, s_k(t)$$

($s_k(t)$ — фундаментальные сплайны) и однозначно определяется, таким образом, значениями $f^{(m)}(t)$ в точках τ_k. В силу (14) и (15) можно предположить, что информация вида $\{f(k\pi/n+\alpha)\}_1^{2n}$ для $f\in W_\infty^{r-m}$ также позволяет восстановить $f^{(m)}(t)$ в метрике L_p с той же погрешностью, т. е. должен существовать базис $\varphi_k(t)$, $k=1,2,\ldots,2n$, такой, что для любой функции $f\in W_\infty^r$

$$\left\|\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k\pi}{n}+\alpha\right)\varphi_k(\cdot)-f^{(m)}(\cdot)\right\|_p\leqslant\|\varphi_{n,r-m}\|_p.$$

2. Кодирование решения краевой задачи. Ограничившись плоским случаем и обозначая через $P=P(x,y)$ точки в R^2, рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} L[u(P)]&=g(P), \quad P\in D;\\ u(P)&=\varphi(P), \quad P\in\Gamma, \end{aligned}\tag{16}$$

где L — заданный линейный дифференциальный оператор, D — замкнутая область в R^2, Γ — ее граница. Пусть X_1, X_2, Y — метрические пространства определенных в D функций двух переменных, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — классы функций соответственно из X_1 и X_2, удовлетворяющие условиям: а) для любой пары функций $g\in\mathfrak{M}_1$ и $\varphi\in\mathfrak{M}_2$ существует, и притом единственное, решение $u\in Y$ задачи (16); б) классы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ являются выпуклыми центрально-симметричными множествами соответственно в X_1 и X_2. Введя в пространстве $X=X_1\otimes X_2$ также некоторую метрику (например, с помощью метрик в X_1 и X_2), в силу условия а) можно считать, что существует оператор $A=A_B$, отображающий множество $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\otimes\mathfrak{M}_2$ в $Y: A_B(g,\varphi)=u$, где $u=u(P)$ — решение задачи (16), определяемое функциями $g(P)$ и $\varphi(P)$.

Проверим для этого оператора выполнение условий предложения 1. Очевидно, если $u(P)$ — решение задачи (16), то $-u(P)$ — решение этой задачи с правыми частями $-g(P)$ и $-\varphi(P)$, т. е. $A_B(-g,-\varphi)=-u=-A_B(g,\varphi)$. Далее, пусть $A_B(g_i,\varphi_i)=u_i$, $i=1,2$, т. е. u_1 и u_2 — решения задачи (16) при $(g,\varphi)=(g_1,\varphi_1)$ и $(g,\varphi)=(g_2,\varphi_2)$. Тогда

$$L\left[\frac{1}{2}(u_1(P)-u_2(P))\right]=\frac{1}{2}(g_1(P)-g_2(P)), \quad P\in D;$$

$$\frac{1}{2}(u_1(P)-u_2(P))=\frac{1}{2}(\varphi_1(P)-\varphi_2(P)), \quad P\in\Gamma,$$

т. е.

$$A_B\left(\frac{1}{2}(g_1-g_2), \frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)\right)=\frac{1}{2}(u_1-u_2)=\frac{1}{2}(A_B(g_1,\varphi_1)-A_B(g_2,\varphi_2)).$$

Пусть теперь $M_N=\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N\}$ — набор заданных на $X=X_1\otimes X_2$ непрерывных функционалов таких, что

$$\mu_k(-g,-\varphi)=-\mu_k(g,\varphi), \quad g\in\mathfrak{M}_1, \quad \varphi\in\mathfrak{M}_2,$$

$$\mu_k\left(\frac{1}{2}(g_1-g_2), \frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)\right)=\frac{1}{2}(\mu_k(g_1,\varphi_1)-\mu_k(g_2,\varphi_2)),$$

$$g_1,g_2\in\mathfrak{M}_1, \quad \varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{M}_2, \quad k=1,2,\ldots,N.$$

Тогда в силу предложения 1

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M},A_B,M_N)_{X,Y}=\sup\{\rho(2A_B(g,\varphi),0)_Y:(g,\varphi)\in\mathfrak{M}, T((g,\varphi),M_N)=0\}. \tag{17}$$

Смысл этого равенства в том, что при указанных выше условиях погрешность кодирования вектором $T((g,\varphi),M_N)$ решения $u(P)$ задачи (1) на всем классе $\mathfrak{M}$ можно точно оценить, рассматривая лишь те пары функций $(g, \varphi) \in \mathfrak{M}$, для которых вектор информации равен нулю.

3. Оператор свертки. Пусть $A = A_C$ — оператор, сопоставляющий 2π-периодической функции $\varphi(t) \in L_1$ функцию

$$f(t) = (A_C\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} K(t-u)\,\varphi(u)\,du =: K * \varphi, \tag{18}$$

где $K(t)$ — ядро свертки, $K(t) \in L_1$. Известно (см., например, [6, с. 71]), из $\varphi \in L_q$, $1 \leqslant q < \infty$, следует включение $f \in L_q$, а если $\varphi \in L_\infty$, то $f(t)$ непрерывна на всей оси: $f \in C$.

Рассмотрим задачу кодирования функции (18) вектором $T(\varphi, M'_N) = \{\mu_1(\varphi), \mu_2(\varphi), \ldots, \mu_N(\varphi)\}$, где $M'_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ — набор линейных функционалов, заданных на L_q. Если $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество, то в силу предложения 2

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, A_C, M'_N)_p = 2 \sup \left\{ \left\| \int_0^{2\pi} K(\cdot - u)\,\varphi(u)\,du \right\|_p : \varphi \in \mathfrak{M}, T(\varphi, M'_N) = 0 \right\}. \tag{19}$$

В некоторых конкретных случаях, определяемых видом ядра $K(t)$ и заданием класса $\mathfrak{M}$, удается получить явные выражения величины (19).

Будем рассматривать свертки с четными или нечетными ядрами вида

$$K(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

или

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kt, \quad \beta_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Класс косинус-ядер (20) обозначим через K_c, класс синус-ядер (21) — через K_s. Относительно функции $\varphi(t)$ в (18) предполагаем, что она также является сверткой некоторого, вообще говоря, другого ядра вида (20) или (21) с функцией $\psi(t)$. Итак, пусть

$$f(t) = (A_C\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} K_1(t-u)\,\varphi(u)\,du, \tag{22}$$

где

$$\varphi(u) = \int_0^{2\pi} K_2(u-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau, \tag{23}$$

причем $K_1, K_2 \in K_c \cup K_s$, т. е. при $i = 1, 2$

$$K_i(t) = \frac{\alpha_0^i}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^i \cos kt \ \text{ или } \ K_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^i \sin kt. \tag{24}$$

Подставив (23) в (24), в предположении, что хотя бы одно из ядер K_1 или K_2 имеет ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$, с помощью обобщенного равенства Парсеваля находим

$$f(t) = \int_0^{2\pi} K_*(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau, \tag{25}$$

где

$$K_*(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_0^1\alpha_0^2}{4}\pi + \pi \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^1\alpha_k^2 \cos kt, & \text{если } K_1, K_2 \in K_c; \\ \pi \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^1\beta_k^2 \sin kt, & \text{если } K_1 \in K_c,\ K_2 \in K_s; \\ \pi \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2\beta_k^1 \sin kt, & \text{если } K_1 \in K_s,\ K_2 \in K_c; \end{cases} \tag{26}$$

и

$$f(t)=\int_0^{2\pi} K_*(t-\tau)(-\psi(\tau))\,d\tau,$$

где

$$K_*(t)=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^1\beta_k^2\cos kt,\ \text{если}\ K_1,\ K_2\in K_s. \tag{27}$$

С учетом единственности ряда Фурье нетрудно убедиться, что коэффициенты Фурье $a_k(\varphi)$, $b_k(\varphi)$ функции φ и $a_k(\psi)$, $b_k(\psi)$ функции ψ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} a_k(\varphi)&=\pi\alpha_k^2a_k(\psi), \quad b_k(\varphi)=\pi\alpha_k^2b_k(\psi),\ \text{если}\ K_2\in K_c,\\ a_k(\varphi)&=-\pi\beta_k^2b_k(\psi), \quad b_k(\varphi)=\pi\beta_k^2a_k(\psi),\ \text{если}\ K_2\in K_s. \end{aligned} \tag{28}$$

Пусть M_{2n-1}^F — метод кодирования, задаваемый первыми $2n-1$ коэффициентами Фурье $a_k(\varphi)$, $k=0,1,\dots,n-1$, $b_k(\varphi)$, $k=1,2,\dots,n-1$. Равенство $T(\varphi, M_{2n-1}^F)=0$ означает, что функция $\varphi(t)$ ортогональна подпространству F_{2n-1}^T тригонометрических полиномов порядка $n-1$: $\varphi\perp F_{2n-1}^T$. Если в свертке $\varphi=K_2*\psi$ ядро $K_2\in K_c\cup K_s$, то с учетом (28) заключаем, что $\varphi\perp F_{2n-1}^T$ тогда и только тогда, когда $\psi\perp F_{2n-1}^T$. Заметим далее, что класс $\mathfrak{M}$ сверток (23) определяется заданием ядра $K_2(t)$ и ограничениями на функцию $\psi(t)$. Если $\psi(t)\in\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное множество, то класс $\mathfrak{M}$ сверток (23) также является выпуклым центрально-симметричным множеством. Тогда

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, A_C, M_{2n-1}^F)_p=2\sup\left\{\left\|\int_0^{2\pi}K_*(\cdot-\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right\|_p:\psi\in\mathfrak{N},\ \psi\perp F_{2n-1}^T\right\}, \tag{29}$$

где $K_*(t)$ определяется равенствами (26) и (27).

Говорят, что ядро $K(t)$ из K_c или K_s удовлетворяет условию Надя ([7], см. также [8]), если в случае (20) коэффициенты α_k образуют трижды монотонно убывающую к нулю последовательность, т. е. $\alpha_k\to 0$ и

$$\Delta_k(\alpha)=\alpha_k-\alpha_{k+1}\geqslant 0,\quad \Delta_k^2(\alpha):=\Delta_k(\alpha)-\Delta_{k+1}(\alpha)\geqslant 0,$$

$$\Delta_k^3(\alpha):=\Delta_k^2(\alpha)-\Delta_{k+1}^2(\alpha)\geqslant 0,\quad k=0,1,\dots,$$

а в случае (21) коэффициенты β_k образуют дважды монотонно убывающую к нулю последовательность, т. е. $\beta_k\to 0$, $\Delta_k(\beta)\geqslant 0$, $\Delta_k^2(\beta)\geqslant 0$, $k=1,2,\dots$. Справедлива следующая теорема.

Теорема A ([7, 8]). *Если $f=K*g$, где ядро $K(t)$ вида* (20) *или* (21) *удовлетворяет условию Надя, а $g\in L_p$, то при $p=1,\infty$*

$$\sup_{\|g\|_p\leqslant 1}\ \inf_{\tau\in F_{2n-1}^T}\|f-\tau\|_p=\sup\{\|K*g\|_p:\|g\|_p\leqslant 1,\ g\perp F_{2n-1}^T\}=$$

$$=\inf_{\tau\in F_{2n-1}^T}\|K-\tau\|_1=:E_n(K)_1=\begin{cases}4\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^\nu\alpha_{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} & (K\in K_c),\\[2ex] 4\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{\beta_{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} & (K\in K_s).\end{cases} \tag{30}$$

Существует тригонометрический полином вида

$$\tau_{n-1}(g,t)=\lambda_0\frac{a_0(g)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k[a_k(g)\cos kt+b_k(g)\sin kt], \tag{31}$$

где множители $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ эффективно выражаются через коэффициенты Фурье ядра $K(t)$, такой, что

$$\| f - \tau_{n-1}(g) \|_1 \leqslant E_n(K)_1. \tag{32}$$

Формулы, выражающие λ_k через α_k или β_k, можно найти в [7, 8].

Чтобы применить сформулированную теорему в случае (22), (23), следует учесть такое предложение.

Предложение 3. *Пусть ядра K_1 и K_2 имеют вид (24), где α_k^i и β_k^i — монотонно убывающие к нулю положительные коэффициенты, причем одно из ядер имеет ограниченное на $[0, 2\pi]$ изменение. Тогда ядро $K_*(t)$, задаваемое равенствами (26), (27), удовлетворяет условию Надя, если в случаях $K_1, K_2 \in K_c$ и $K_1, K_2 \in K_s$ последовательности $\{\alpha_k^i\}$. $i = 1, 2$, и соответственно, $\{\beta_k^i\}$, $i = 1, 2$, трижды монотонны, а в случае $K_1 \in K_c$, $K_2 \in K_s$ и $K_1 \in K_s$, $K_2 \in K_c$ последовательности $\{\alpha_k^1\}$, $\{\beta_k^2\}$ и, соответственно, $\{\beta_k^1\}$, $\{\alpha_k^2\}$ дважды монотонны.*

Действительно, все следует из определения условий Надя, вида ядра $K_*(t)$ и того факта, что если числовые последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ являются s раз монотонными, то s раз монотонной является и последовательность $\{a_k b_k\}$. Для $s = 1$ последнее утверждение очевидно, для $s \geqslant 2$ оно доказывается по индукции.

Вернемся теперь к задаче кодирования свертки (22) первыми $2n - 1$ коэффициентами Фурье функции $\varphi(t)$. Учитывая теорему А, а также равенства (22)—(29), приходим к следующим утверждениям.

Теорема 1. *Пусть функции*

$$f(t) = (A_C\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} K_1(t-u)\,\varphi(u)\,du$$

кодируются вектором $T(\varphi, M_{2n-1}^F)$ и $\mathfrak{M}_p$ — класс функций

$$\varphi(u) = \int_0^{2\pi} K_2(u-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau, \quad \|\psi\|_p \leqslant 1,$$

причем ядра $K_1(t)$ и $K_2(t)$ имеют вид (24), где $\alpha_k^i > 0$, $\beta_k^i > 0$, $\lim \alpha_k^i = \lim \beta_k^i = 0$, $i = 1, 2$. Если оба ядра K_1 и K_2 являются косинус- или синус-ядрами, а соответствующие последовательности $\{\alpha_k^i\}$ и $\{\beta_k^i\}$ трижды монотонны, то при $p = 1$ и ∞

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}_p, A_C, M_{2n-1}^F)_p = \begin{cases} 8\pi \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \alpha_{(2\nu+1)n}^1 \alpha_{(2\nu+1)n}^2}{2\nu+1} & (K_1, K_2 \in K_c), \\ 8\pi \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \beta_{(2\nu+1)n}^1 \beta_{(2\nu+1)n}^2}{2\nu+1} & (K_1, K_2 \in K_s). \end{cases} \tag{33}$$

Если же K_1 и K_2 принадлежат разным классам K_c и K_s, а соответствующие последовательности $\{\alpha_k^i\}$ и $\{\beta_k^i\}$ дважды монотонны, то

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}_p, A_C, M_{2n-1}^F)_p = \begin{cases} 8\pi \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_{(2\nu+1)n}^1 \beta_{(2\nu+1)n}^2}{2\nu+1} & (K_1 \in K_c,\ K_2 \in K_s), \\ 8\pi \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_{(2\nu+1)n}^2 \beta_{(2\nu+1)n}^1}{2\nu+1} & (K_1 \in K_s,\ K_2 \in K_c). \end{cases}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 существует тригонометрический полином*

$$\tau_{n-1}(\varphi, t) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda_0}{2}\dfrac{a_0(\varphi)}{\pi\alpha_0^2} + \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\lambda_k}{\alpha_k^2}[a_k(\varphi)\cos kt + b_k(\varphi)\sin kt] & (K_2 \in K_c), \\ \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\lambda_k}{\beta_k^2}[b_k(\varphi)\cos kt - a_k(\varphi)\sin kt] & (K_2 \in K_s), \end{cases} \quad (34)$$

где $a_k(\varphi)$, $b_k(\varphi)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$, а множители λ_k эффективно выражаются через α_k^i и (или) β_k^i, такой, что

$$\| f - \tau_{n-1}(\varphi) \|_p \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{K}(\mathfrak{M}_p, A_C, M_{2n-1}^F)_p, \quad p = 1, \infty. \quad (35)$$

Таким образом, максимальный диаметр в L_p множества Q_φ сверток $K_1 * g$, $g \in \mathfrak{M}_p$, для которых $T(g, M_{2n-1}^F) = T(\varphi, M_{2n-1}^F)$, равен при $p = 1$ и ∞ правой части равенств (33). Заметим, что в случае $p = \infty$ этот диаметр реализуется в случае $\psi(t) = \operatorname{sgn}\sin nt$; в случае же $p = 1$ обычным образом строится последовательность функций $\psi_m(t)$ периода $2\pi/n$, $\|\psi_m\|_1 = 1$, на которой в пределе для диаметров множеств Q_{φ_m} ($\varphi_m = K_2 * \psi_m$) реализуется то же значение. Из теорем 1 и 2 следует также, что эффективно восстановить множество Q_φ по вектору $T(\varphi, M_{2n-1}^F)$ с минимально возможной погрешностью можно с помощью тригонометрического полинома (34), который строится по коэффициентам Фурье ядра $K_2(t)$ и функции $\varphi(t)$. Действительно, если

$$f_1 = K_1 * \varphi_1, \quad f_2 = K_1 * \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}_p,$$

то из равенства $T(\varphi_1, M_{2n-1}^F) = T(\varphi_2, M_{2n-1}^F)$ следует, что $\tau_{n-1}(\varphi_1, t) \equiv \tau_{n-1}(\varphi_2, t)$, и при $p = 1, \infty$ в силу (35) справедливо соотношение

$$\| f_1 - f_2 \|_p \leqslant \mathcal{K}(\mathfrak{M}_p, A_C, M_{2n-1}^F).$$

4. Интеграл Пуассона. Частным случаем задач, рассмотренных в пп. 2, 3, является задача кодирования решения задачи Дирихле для круга

$$\begin{aligned} (\Delta f)(P) &= 0, \quad P \in D, \\ f(P) &= \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \end{aligned} \quad (36)$$

где D — единичный круг, Γ — его граница. В полярных координатах (ρ, t) краевое условие записывается в виде $f(1, t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — 2π-периодическая функция. Оператор $A = A_P$ ставит в соответствие непрерывной периода 2π функции $\varphi(t)$ решение $(A_P\varphi)(\rho, t)$ задачи (36), которое можно записать в виде интеграла Пуассона

$$f(\rho, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\chi(\rho, t - u)\,\varphi(u)\,du, \quad 0 \leqslant \rho < 1,$$

где

$$\chi(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt.$$

Будем считать, что $\varphi \in W_p^r$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (класс W_p^r введен в п. 1); тогда

$$\varphi(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}B_r(u - \tau)\,\varphi^{(r)}(\tau)\,d\tau,$$

где $B_r(t)$ — ядро Бернулли (10). Таким образом, задача кодирования функции $f(\rho, t)$ при каждом ρ первыми $2n-1$ коэффициентами Фурье функции $\varphi(u)$, т. е. вектором $T(\varphi, M_{2n-1}^F)$, укладывается в общую схему п. 3 при $\mathfrak{M} = W_p^r$ и

$$K_1(t) = \frac{1}{\pi}\chi(\rho, t), \quad K_2(t) = \frac{1}{\pi} B_r(t).$$

Легко проверяется, что числовые последовательности $\{\rho^k\}$ $(0 < \rho < 1)$ и $\{K^{-r}\}$ монотонно убывают к нулю с любой кратностью, так что все условия теоремы 1 выполнены, и мы можем сформулировать для оператора A такое утверждение.

Теорема 3. *Справедливы равенства при $p = 1$ и ∞:*

$$\mathcal{K}(W_p^r, A_P, M_{2n-1}^F)_p = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi n^r}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+1}}, & r = 2j, \quad j = 1, 2, \ldots; \\ \dfrac{8}{\pi n^r}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+1}}, & r = 2j-1, \quad j = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Существует тригонометрический полином

$$\tau_{n-1}(\varphi, t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0 a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k k^r (a_k \cos kt + b_k \sin kt), & r = 2j; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k k^r (b_k \cos kt - a_k \sin kt), & r = 2j-1, \end{cases}$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$, а λ_k эффективно выражаются через ρ^k и k^{-r}, такой, что при $p = 1$ и ∞

$$\| f(\rho, \cdot) - \tau_{n-1}(\varphi, \cdot) \|_p \leqslant \frac{1}{2} \mathcal{K}(W_p^r, A_P, M_{2n-1}^F)_p.$$

Результаты, связанные с кодированием интеграла Пуассона значениями функции $\varphi(t)$ в равноотстоящих точках, будут опубликованы отдельно.

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 342 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании элементов метрического пространства // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 2.— С. 158—173.
5. *Корнейчук Н. П.* Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Там же.— 1989.— 41, № 4.— С. 492—499.
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
7. *Nagy B.* Uber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. 1. Periodischer Fall // Ber. math.-phys. Acad. d Wiss.— 1938.— 80.— S. 103—134.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— 10, № 3.— С. 207—256.

Получено 26.11.90