УДК 512.554.3

В. М. ФУТОРНЫЙ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Весовые $sl(3)$-модули, порожденные полупримитивными элементами

Изучаются обобщенные модули Верма над алгеброй Ли $sl(3, \mathbb{C})$, не содержащие старшего вектора. Такие модули порождены полупримитивными элементами. Исследовано композиционное строение этих модулей, приведен критерий неприводимости. Получены явные формулы для полупримитивных элементов.

Досліджуються узагальнені модулі Верма над алгеброю Лі $sl(3, \mathbb{C})$, які не мають старшого вектора. Такі модулі породжуються напівпримітивними елементами. Досліджено композиційну побудову цих модулів, наведено критерій незвідності. Отримано явні формули для напівпримітивних елементів.

1. Модули, порожденные полупримитивными элементами. Обозначим через $\mathfrak{G}$ алгебру $sl(3, \mathbb{C})$ — алгебру Ли комплексных матриц размера 3×3 со следом ноль. Выберем в $\mathfrak{G}$ стандартный базис, состоящий из матриц $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и матричных единиц e_{ij}, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, 3}$. Пусть $\Delta = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$ — система корней алгебры $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ — подалгебра Картана, порожденная H_1, H_2, B — подалгебра, порожденная H_1, e_{12}, e_{21}. Обозначим $e_\alpha = e_{12}$, $e_\beta = e_{23}$, $e_{-\alpha} = e_{21}$, $e_{-\beta} = e_{32}$, $e_{\alpha+\beta} = e_{13}$, $e_{-\alpha-\beta} = e_{31}$. Пусть π — некоторый базис системы корней Δ, $\varphi \in \pi$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{A}_{\pi,\varphi}$, порожденную элементами e_ψ, $\psi \in \langle\pi\rangle \setminus \varphi$. Здесь $\langle\pi\rangle$ обозначает замыкание множества π относительно суммы корней.

$\mathfrak{G}$-модуль V называется весовым, если $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{H}^*} V_\lambda$, где $V_\lambda = \{v \in V \mid Hv = \lambda(H)v$ для всех $H \in \mathfrak{H}\}$. Ненулевой элемент $v \in V_\lambda$ назовем полупримитивным элементом веса λ относительно пары (π, φ), если $\mathfrak{A}_{\pi,\varphi} v = 0$. Конструкция $\mathfrak{H}$-модулей, порожденных полупримитивными элементами, приведена в [1].

Рассмотрим квадратичный элемент Казимира из центра $Z(\mathfrak{G})$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$:

$$c = \frac{1}{18}(H_1^2 + H_2^2 + H_1H_2) + \frac{1}{6}(H_1 + H_2) + \frac{1}{6}(e_{-\alpha}e_\alpha + e_{-\beta}e_\beta + e_{-\alpha-\beta}e_{\alpha+\beta}).$$

Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$. Положим $U_\gamma = U(\mathfrak{G})/(c-\gamma)$ и построим $\mathfrak{G}$-модуль $M(\lambda, \gamma) = U_\gamma \otimes_{U(\mathfrak{A}_{\pi\varphi} \oplus \mathfrak{H})} \mathbb{C}$, ассоциированный с π, φ, λ, γ, где $\mathfrak{A}_{\pi,\varphi} + \otimes \mathfrak{H}$-модуль $\mathbb{C}$ определен формой λ. Заметим, что модуль $M(\lambda, \gamma)$ является обобщенным модулем Верма [2], т. е. модулем, индуцированным подалгеброй $B \simeq sl(2, \mathbb{C})$. Кроме того, он может быть описан как фактор-алгебра универсальной обертывающей алгебры. Действительно, обозначим через I идеал в $U(\mathfrak{H})$, порожденный $\mathfrak{A}_{\pi,\varphi}$, $c - \gamma$, $H_i - \lambda(H_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $M(\lambda, \gamma) = U(\mathfrak{G})/I$.

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что $\pi = \{\alpha, \beta\}$,

$\varphi = \alpha$, и обозначим $\mathfrak{A}_{\pi,\alpha} = \mathfrak{A}$. Полупримитивный элемент относительно (π, α) будем называть просто полупримитивным элементом.

Предложение 1. 1) $M(\lambda, \gamma) = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{H}^*} M(\lambda, \gamma)_\chi$. 2) *Весы модуля* $M(\lambda, \gamma)$ *имеют вид* $\lambda - n_\alpha \alpha - n_\beta \beta$, *где* n_α, n_β — *целые числа, причем* $n_\beta \geqslant 0$. 3) *Для любого* $\chi \in \mathfrak{H}^*$

$$M(\lambda, \gamma)_\chi = \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ n_3 n_4 = 0,\ \chi = \lambda - (n_1 + n_2)\beta - (n_2 + n_3 - n_4)\alpha}} e_{-\beta}^{n_1} e_{-\alpha-\beta}^{n_2} e_{-\alpha}^{n_3} e_{\alpha}^{n_4} \otimes \mathbb{C}.$$

$$4)\ \dim M(\lambda, \gamma)_\chi = \dim M(\lambda, \gamma)_{\chi + k\alpha},\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\dim M(\lambda, \gamma)_{\lambda - n\beta} = n + 1,\ n \geqslant 0.$$

$$5)\ M(\lambda, \gamma)_\lambda = 1 \otimes \mathbb{C},\ \mathfrak{A} M(\lambda, \gamma)_\lambda = 0.$$

Все пункты предложения 1 следуют непосредственно из определения модуля $M(\lambda, \gamma)$.

Предложение 2. *Пусть V-некоторый $\mathfrak{G}$-модуль, порожденный полупримитивным элементом v веса λ, причем $cv = \gamma v$. Тогда* 1) *существует единственный эпиморфизм* $\theta : M(\lambda, \gamma) \to V$ *такой, что* $\theta(1 \otimes 1) = v$; 2) $V = \bigotimes_{\chi \in \mathfrak{H}^*} V_\chi$, *причем* $\dim V_\chi < \infty$ *для всех* $\chi \in \mathfrak{H}^*$.

Доказательство следует из свойства универсальности тензорного произведения.

Предложение 3. 1) *В модуле $M(\lambda, \gamma)$ существует единственный максимальный $\mathfrak{G}$-подмодуль, отличный от $M(\lambda, \gamma)$.* 2) $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(M(\mu, \gamma), M(\lambda, \gamma)) \leqslant 2$.

Доказательство. Положим $M(\lambda, \gamma)_+ = \sum_{\chi \neq \lambda} M(\lambda, \gamma)_\chi$. Тогда, очевидно, любой $\mathfrak{G}$-подмодуль в $M(\lambda, \gamma)$ лежит в $M(\lambda, \gamma)_+$. Это доказывает первый пункт предложения. Второй пункт следует из п. 4 предложения 1.

Замечания. 1. Существуют примеры модулей, для которых $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(M(\mu, \gamma), M(\lambda, \gamma)) = 2$. Так будет, например, в случае, когда $\lambda(H_i) = 0$, $i = 1, 2$, $\mu(H_1) = 0$, $\mu(H_2) = -3$ и $\gamma = 0$.

2. В отличие от соответствующего результата для модулей Верма [3] не всякий ненулевой элемент пространства $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(M(\mu, \gamma), M(\lambda, \gamma))$ будет инъективным отображением. Например, если $\lambda(H_i) = h_i$, $i = 1, 2$, $\mu(H_1) = h_1 + 2$, $\mu(H_2) = h_2 - 1$ и $\gamma = \frac{1}{18}(h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2) + \frac{1}{6}(h_1 + h_2)$ то $\mathrm{Ker}\, \nu \neq 0$ для любого $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(M(\mu, \gamma), M(\lambda, \gamma))$.

Пусть $\mathfrak{M}$—максимальный подмодуль в $M(\lambda, \gamma)$, $L(\lambda, \gamma) = M(\lambda, \gamma)/\mathfrak{M}$. Из п. 1 предложения 2 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Рассмотрим неприводимый $\mathfrak{G}$-модуль V, содержащий полупримитивный элемент v веса λ, причем $cv = \gamma v$. Тогда* $V \simeq L(\lambda, \gamma)$.

Лемма 1. Модуль $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M(\lambda, \gamma)_{\lambda + k\alpha}$ *является неприводимым B-модулем тогда и только тогда, когда* $\gamma \neq \frac{1}{18}(h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2) + \frac{1}{6}(h_2 + (l + 1) h_1 + l(l + 1))$ *для всех* $l \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Поскольку $B \simeq \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, то утверждение леммы следует из известной классификации неприводимых $\mathrm{sl}(2)$-модулей [4].

Модуль $M(\lambda, \gamma)$, в котором выполняется утверждение леммы 1, будем называть полосатым. Очевидно, если модуль $M(\lambda, \gamma)$ не является полосатым, то у него существует фактор-модуль, изоморфный некоторому модулю Верма. В этом случае все простые факторы $M(\lambda, \gamma)$ являются простыми факторами модулей Верма. Поэтому далее будем рассматривать только полосатые модули.

Свойства модулей $L(\lambda, \gamma)$ в этом случае описаны в следующем предложении.

Предложение 4. *Пусть* $\mu \in \mathfrak{H}^*$. *Тогда*

1) $\dim L(\lambda, \gamma)_{\mu-\beta} - \dim L(\lambda, \gamma)_{\mu} \leqslant 1$;

2) $\dim L(\lambda, \gamma)_{\mu} = \dim L(\lambda, \gamma)_{\mu+k\alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) *если* $d = \dim L(\lambda, \gamma)_{\mu} = \dim L(\lambda, \gamma)_{\mu-\beta}$, *то* $d = \dim L(\lambda, \gamma)_{\mu-k\beta}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство предложения следует из результатов работы [1].

Отсюда получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть* $M(\lambda, \gamma)$ — *полосатый* $\mathfrak{G}$-*модуль*, $\mu \in \mathfrak{H}^*$. *Тогда* $\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{G}}(M(\mu, \gamma), M(\lambda, \gamma)) \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть* $M(\lambda, \gamma)$ — *полосатый* $\mathfrak{G}$-*модуль*. 1) $M(\lambda, \gamma) \simeq M(\lambda', \gamma')$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma = \gamma'$ *и* $\frac{1}{2}(\lambda(H_1) - \lambda'(H_1)) = \lambda'(H_2) - \lambda(H_2) \in \mathbb{Z}$. 2) *Если* U — *некоторый подмодуль в* $M(\lambda, \gamma)$, *то* U *также является полосатым, причем* $U \simeq M(\mu, \gamma)$ *для некоторого* $\mu \in \mathfrak{H}^*$. 3) *Всякий простой фактор модуля* $M(\lambda, \gamma)$ *имеет вид* $L(\chi, \gamma)$ *для некоторого* $\chi \in \mathfrak{H}^*$.

Доказательство. Заметим, что $M(\lambda, \gamma) \simeq M(\lambda', \gamma')$ тогда и только тогда, когда $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M(\lambda, \gamma)_{\lambda+k\alpha} \simeq \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M(\lambda', \gamma')_{\lambda'+k\alpha}$ как B-модули. Отсюда следует п. 1 теоремы. Пусть $U \subset M(\lambda, \gamma)$. Тогда U содержит полупримитивный элемент, и п. 2 следует из предложения 4 и леммы 6 работы [1]. П. 3 является следствием п. 2. Теорема доказана.

2. Описание полупримитивных элементов в полосатом модуле $M(\lambda, \gamma)$. Рассмотрим элемент Казимира $\tilde{c} = H_1^2 - 2H_1 + 4e_{\alpha}e_{-\alpha}$ алгебры B. Далее будет удобно изменить параметризацию модуля $M(\lambda, \gamma)$, заменив γ на собственное значение ε элемента $\tilde{c}$ в неприводимом B-модуле $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M(\lambda, \gamma)_{\lambda+k\alpha}$. Если $\lambda(h_i) = h_i$, $i = 1, 2$, то $\varepsilon = 24\gamma - \frac{1}{3}(h_1 + 2h_2)^2 - 2(h_1 + 2h_2)$.

Пусть $M(\lambda, \varepsilon)$ — полосатый $\mathfrak{G}$-модуль. Обозначим $N^{\pm} = \frac{1}{2}(h_1 + 2h_2 + 3 \pm \sqrt{1+\varepsilon})$.

Теорема 2. *Элементы* $u_{N,k} = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j(k)\, e^j_{-\beta} e^{N-j}_{-\alpha-\beta} e^{N-j+k}_{\alpha} \otimes 1$, $v_{N,m} = \sum_{j=0}^{N} \beta_j(m)\, e^j_{-\beta} e^{N-j}_{-\alpha-\beta} e^{|N-j-m|}_{\operatorname{sign}(N-j-m)\alpha} \otimes 1$, *где* k, m — *целые*, $k \geqslant 0$, $m > 0$,

$$\alpha_j(k) = \begin{cases} (-1)^j C_N^j \prod_{i=0}^{j-1} (h_1 + h_2 + 1 + k - i), & j \geqslant 1, \\ 1, & j = 0, \end{cases}$$

$$\beta_j(m) = \alpha_j(-m) \prod_{i=\max(0,\, m-N+j)}^{m-1} \left(\frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}h_1^2 + \frac{1}{2}(2i+1)h_1 - i(i+1)\right),$$

$N \in (\{N^{\pm}\} \cap \mathbb{N}) \cup \{0\}$, *образуют базис подпространства полупримитивных элементов в модуле* $M(\lambda, \varepsilon)$.

Обозначим через $l(\lambda, \varepsilon)$ длину модуля $M(\lambda, \varepsilon)$.

Следствие 3. $l(\lambda, \varepsilon) = |\{N^{\pm}\} \cap \mathbb{N}| + 1$.

Следствие 4. *Модуль* $M(\lambda, \varepsilon)$ *неприводим тогда и только тогда, когда* $\{N^{\pm}\} \cap \mathbb{N} = \varnothing$.

В частности, отсюда получаем следствие 5.

Следствие 5. *Если* $\lambda(H_2) \in \mathbb{Z}$ *или* $\lambda(H_1 + H_2) \in \mathbb{Z}$, *то модуль* $M(\lambda, \varepsilon)$ *неприводим.*

Теперь можем полностью описать композиционное строение модуля $M(\lambda, \varepsilon)$.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda(H_i) = h_i$, $i = 1, 2$. 1) *Если* $l(\lambda, \varepsilon) = 1$, *то модуль* $M(\lambda, \varepsilon)$ *неприводим.* 2) *Если* $l(\lambda, \varepsilon) = 2$, *то* $\mathbb{N} \cap \{N^{\pm}\} = \{\bar{N}\}$ *и* $M(\lambda, \varepsilon)$ *имеет композиционный ряд длины* 2: $M(\lambda, \varepsilon) \supset M(\lambda', \varepsilon') \supset 0$, *где* $\lambda'(H_1) = h_1 + \bar{N}$, $\lambda'(H_2) = h_2 - 2\bar{N}$, $\varepsilon' = \varepsilon + 2\bar{N}(h_1 + 3 + 2h_2) - 3\bar{N}^2$. *При этом*

$$\dim L(\lambda, \varepsilon)_{\lambda - k\beta} = \begin{cases} k + 1, & 0 \leqslant k \leqslant \bar{N} - 1, \\ \bar{N}, & k > \bar{N} - 1. \end{cases}$$

3) *Пусть* $l(\lambda, \varepsilon) = 3$, $N^- = N_1$, $N^+ = N_2$. *Тогда* $M(\lambda, \varepsilon)$ *имеет композиционный ряд длины* 3: $M(\lambda, \varepsilon) \supset M(\lambda_1, \varepsilon_1) \supset M(\lambda_2, \varepsilon_2) \supset 0$, *где* $\lambda_i(H_1) = h_1 + N_i$, $\lambda_i(H_2) = h_2 - 2N_i$, $\varepsilon_i = \varepsilon + 2N_i(h_1 + 2h_2 + 3) - 3N_i^2$. *При этом*

$$\dim L(\lambda, \varepsilon)_{\lambda - k\beta} = \begin{cases} k + 1, & 0 \leqslant k \leqslant N_1 - 1, \\ N_1, & k \geqslant N_1, \end{cases}$$

$$\dim L(\lambda_1, \varepsilon_1)_{\lambda_1 - k\beta} \begin{cases} k + 1, & 0 \leqslant k \leqslant N_2 - N_1 - 1, \\ N_2 - N_1, & k \geqslant N_2 - N_1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 3 следует из следствия 3, предложения 4 и п. 2 теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим модуль $M(\lambda, \varepsilon)$, $h_i = \lambda(H_i)$, $i = 1, 2$. Ясно, что все элементы вида $e_\alpha^k \otimes 1$, $e_{-\alpha}^k \otimes 1$, $k \geqslant 0$, являются полупримитивными. Пусть в $M(\lambda, \varepsilon)$ существует полупримитивный элемент веса μ, отличный от названных, и $\mu = \lambda + k\alpha - N\beta$, $k, N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$. Сначала будем считать, что $k = 0$ и $\mu = \lambda - N\beta$. Тогда произвольный элемент $u \in M(\lambda, \varepsilon)_\mu$ можно записать в следующем виде:

$$u = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i e_{-\beta}^i e_{-\alpha-\beta}^{N-i} e_\alpha^{N-i} \otimes 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Он является полупримитивным элементом, если $e_\beta u = e_{\alpha+\beta} u = 0$. Решая эту систему, придем к следующей системе линейных уравнений с неизвестными α_i:

$$(N - i)(h_1 + h_2 + 1 - i)\alpha_i + (1 + i)\alpha_{i+1} = 0,$$

$$(N - i)\left(\frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}h_1^2 + \frac{1}{2}h_1 - h_1(N - i) - (N - i)(N - i - 1)\right)\alpha_i +$$

$$+ (i + 1)(h_2 - 2N + i + 2)\alpha_{i+1}, \quad i = \overline{0, N - 1}. \tag{1}$$

Критерием совместности систем (1) является условие

$$\varepsilon = (-2N + h_1 + 2h_2 + 3)^2 - 1. \tag{2}$$

Таким образом, полупримитивный элемент веса μ существует тогда и только тогда, когда выполняется условие (2). В этом случае коэффициенты α_i легко находятся из системы (1):

$$\alpha_i = \begin{cases} (-1)^i z C_N^i \prod_{j=0}^{i-1} (h_1 + h_2 + 1 - j), & i \geqslant 1, \\ z, & i = 0, \end{cases}$$

z — произвольное ненулевое комплексное число.

Пусть теперь $k \neq 0$. Поскольку модуль $M(\lambda, \varepsilon)$ полосатый, то $M(\lambda, \varepsilon) \simeq M(\lambda + k\alpha, \varepsilon)$. Поэтому аналогичные рассуждения можно применить к весу $\lambda + k\alpha$. Получим полупримитивные элементы $u_{N,k} = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j(k)\, e_{-\beta}^{j} e_{-\alpha-\beta}^{N-j} e_{\alpha}^{N-j+k} \otimes 1$, $k > 0$, и $v_{N,|k|} = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j(k)\, e_{-\beta}^{j} e_{-\alpha-\beta}^{N-j} e_{\alpha}^{N-j} \times \times e_{-\alpha}^{|k|} \otimes 1$, $k < 0$, где

$$\alpha_j(k) = \begin{cases} (-1)^j z C_N^j \prod_{i=0}^{j-1} (h_1 + h_2 + 1 + k - i), & j \geqslant 1, \\ z, & j = 0. \end{cases}$$

Преобразовав элементы $v_{N,|k|}$, легко получить утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $u = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j e_{-\beta}^{j} e_{-\alpha-\beta}^{N-j} e_{\alpha}^{N-j} \otimes 1$ — полупримитивный элемент веса $\lambda - N\beta$, $k > 0$. Тогда

$$e_{\alpha}^{k} u = \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{\min(N-j,k)} (-1)^i C_k^i A_{N-j}^i \alpha_j e_{-\beta}^{i+j} e_{-\alpha-\beta}^{N-(i+j)} e_{\alpha}^{N+k-(i+j)} \otimes 1$$

является полупримитивным элементом веса $\lambda + k\alpha - n\beta$. Сравнивая коэффициенты при e_{α}^{N+k}, имеем $e_{\alpha}^{k} u = u_{N,k}$. Отсюда получаем следующее числовое тождество:

$$\prod_{j=0}^{n-1} (p + k - j) = \frac{k!}{(k-n)!} + \sum_{j=1}^{n} C_k^{n-j} A_n^{n-j} \prod_{i=0}^{j-1} (p - i),$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$, $p \in \mathbb{C}$, $C_s^t = \dfrac{s!}{(s-t)!\,t!}$, $A_s^t = \dfrac{s!}{(s-t)!}$.

1. *Футорный В. М.* Некоторое обобщение модулей Верма и неприводимые представления алгебры Ли sl (3) // Укр. мат. журн.— 1986.—38, № 4.— С. 492—497.
2. *Lepowsky J.* A generalization of the Bernstein-Gelfand-Gelfand-resolution // J. Algebra.— 1977.— 49.— P. 496—511.
3. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.— М. : Мир, 1978.— 407 с.
4. *Дрозд Ю. А.* Про зображення алгебри Лі sl (2) // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. математики і механіки.— 1983.— № 25.— С. 70—77.

Получено 02.08.90