УДК 517.5,519.65

Н. П. КОРНЕЙЧУК, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

# О получении точных оценок для производной погрешности сплайн-интерполирования

На основе новых фактов о поведении производных при интерполировании сплайнами дается доказательство точных оценок погрешности приближения первой производной.

На основі нових фактів поведінки при інтерполяції сплайнами дається доведення точних оцінок похибки наближення першої похідної.

Задача получения точных оценок погрешности одновременного приближения производных при интерполировании сплайнами является весьма тонкой; известные доказательства, уже для сплайнов невысокого порядка, отличаются большой сложностью ([1], § 5.1). Установленные автором в [2] новые факты о поведении производных погрешности сплайн-интерполирования позволяют существенно упростить рассуждения, связанные с доказательством результатов, сформулированных в [3].

Рассматриваются пространства $C$ и $L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ $2\pi$-периодических функций $f(t)$, соответственно непрерывных на всей оси и интегрируемых на $(0, 2\pi)$ в $p$-й степени с обычной нормой

$$\| f \|_C = \max_t | f(t) |, \quad \| f \|_p = \Big( \int_0^{2\pi} | f(t) |^p dt \Big)^{1/p}.$$

Априорная информация об интерполируемых функциях будет задаваться классом $W^r_\infty$, $r = 1, 2, \dots$, функций $f(t) \in C^{r-1}$, у которых производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна и $\operatorname{supvrai}_t | f^{(r)}(t) | \leqslant 1$.

Через $S_{2n,m}$, $n, m = 1, 2, \dots$, будем обозначать линейное многообразие $2\pi$-периодических сплайнов порядка $m$ дефекта 1 по равномерному разбиению $t_k = k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, 2n$. Известно (см., например, [1, с. 40]), что линейное многообразие $S_{2n,m}$ интерполирует в точках $\tau_k = \dfrac{k\pi}{n} - [1 + (-1)^m] \dfrac{\pi}{4n}$, $k = 1, 2, \dots, 2n$, т. е. в нулях совершенного сплайна $\varphi_{n,m+1}(t)$, определяемого равенствами

$$\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sgn} \sin nt, \quad \varphi_{n,\nu}(t) = \int_{\gamma_\nu}^t \varphi_{n,\nu-1}(u)\, du, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

где $\gamma_\nu = 0$, если $\nu$ четно и $\gamma_\nu = \pi/2n$, если $\nu$ нечетно. Таким образом, для любой функции $f(t) \in C$ существует, и притом единственный, сплайн $s(f, t) \in S_{2n,m}$, удовлетворяющий условиям

$$s(f, \tau_k) = f(\tau_k), \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \tag{1}$$

Известно [4; 5; 1, с. 194], что если $f(t) \in W^{m+1}_\infty$, то в каждой точке $t$ выполняется точное неравенство

$$| f(t) - s(f, t) | \leqslant | \varphi_{n,m+1}(t) |, \tag{2}$$

из которого для разности $\delta(f, t) = f(t) - s(f, t)$ сразу вытекают точные оценки

$$\begin{gathered} \| \delta(f) \|_C \leqslant \| \varphi_{n,m+1} \|_C, \\ \| \delta(t) \|_p \leqslant \| \varphi_{n,m+1} \|_p, \quad 1 \leqslant p < \infty. \end{gathered} \tag{3}$$

С функцией $f(t) \in C$ и точкой $\theta = \theta_j = j\pi/2n$, $j = 1, 2, \ldots, 4n$, будем связывать функцию $f_\theta(t)$, определяемую равенствами

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(t) + f(2\theta - t)], & \text{если } |\varphi_{n,m+1}(\theta)| = \|\varphi_{n,m+1}\|_C, \\ \frac{1}{2}[f(t) - f(2\theta - t)], & \text{если } \varphi_{n,m+1}(\theta) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, график $f_\theta(t)$, как и график сплайна $\varphi_{n,m+1}(t)$, симметричен относительно прямой $t = \theta$, если $\theta$ — точка экстремума $\varphi_{n,m+1}(t)$, и симметричен относительно точки $\theta$, если $\varphi_{n,m+1}(\theta) = 0$. Если $s(t) \in S_{2n,m}$, то и $s_\theta(t) \in S_{2n,m}$, ибо функция $s_\theta(t)$, как и $s(t)$, $m-1$ раз непрерывно дифференцируема, а $s_\theta^{(m)}(t)$ — кусочно постоянная функция с возможными разрывами в точках $t_k = k\pi/n$. Очевидно, из $f(t) \in W_\infty^r$ следует $f_\theta(t) \in W_\infty^r$, а для интерполяционного сплайна $s(f, t)$ имеет место соотношение $s_\theta(f, t) = s(f_\theta, t)$. Будем полагать $\delta_\theta(f, t) = f_\theta(t) - s_\theta(f, t)$.

Дальнейшие рассуждения будут существенно базироваться на следующих фактах, доказанных в [2].

Предложение 1. *Если $f(t) \in W_\infty^{m+1}$, то в любой точке $\theta$, являющейся нулем сплайна $\varphi_{n,m-\nu}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-2$, выполняется неравенство*

$$|\delta^{(\nu)}(f, \theta)| \leqslant |\varphi_{n,m-\nu+1}(\theta)| = \|\varphi_{n,m-\nu+1}\|_C.$$

Предложение 2. *Пусть $f(t) \in W_\infty^{m+1}$, $\eta(f, t) = \varphi_{n,m+1}(t) - \delta(f, t)$. На интервале $(\alpha, \beta)$ между соседними нулями сплайна $\varphi_{n,m-\nu}(t)$ производная $\eta^{(\nu)}(f, t)$ меняет знак ровно один раз, причем с «—» на «+», если $\varphi_{n,m-\nu}(t) > 0$ на $(\alpha, \beta)$, и с «+» на «—», если $\varphi_{n,m-\nu}(t) < 0$ на $(\alpha, \beta)$.*

Вначале докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $f(t) \in W_\infty^{m+1}$, то*

$$\|\delta'(f)\|_C \leqslant \|\varphi'_{n,m+1}\|_C = \|\varphi_{n,m}\|_C, \tag{4}$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\delta'(f, t)|\, dt \leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\varphi_{n,m}(t)|\, dt = 4\|\varphi_{n,m+1}\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{5}$$

Доказательство проведем в несколько шагов.

1) Покажем, что если на интервале $(\tau_k, \tau_{k+1})$ производная $\delta'(f, t)$ меняет знак один раз, то

$$\max_{\tau_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}} |\delta'(f, t)| \leqslant \|\varphi_{n,m}\|_C. \tag{6}$$

Не умаляя общности, считаем, что $\varphi_{n,m}(t)$ возрастает на $(\tau_k, \tau_{k+1})$. Пусть $\theta = (\tau_k + \tau_{k+1})/2$, так что $\varphi_{n,m}(\theta) = 0$. Рассуждая от противного, предположим, что в некоторой точке $a$, например, $\theta < a < \tau_{k+1}$, выполняется неравенство

$$\delta'(f, a) > \|\varphi_{n,m}\|_C = \varphi_{n,m}(\tau_{k+1}). \tag{7}$$

Для дальнейшего существенно, что, как следует из (1) и (2),

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \delta'(f, t)\, dt = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \varphi_{n,m}(t)\, dt = 0, \tag{8}$$

$$|\delta'(\tau_k)| \leqslant \|\varphi_{n,m}\|_C, \quad |\delta'(\tau_{k+1})| \leqslant \|\varphi_{n,m}\|_C. \tag{9}$$

Если перейти к симметризованной функции $\delta_\theta(f, t)$, то в силу предложения 2 будет $\delta'_\theta(f, t) \leqslant \varphi_{n,m}(t)$, $\theta \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}$. Отсюда и из (8) следует, что, по крайней мере, $\tau_{k+1} - a < \pi/8n$.

Из сравнения перестановок функций $\varphi_{n,m}(t)$ и $\delta'(f,t)$ на промежутке $(\theta, \tau_{k+1})$ с учетом неравенства

$$\int_{\theta}^{\tau_{k+1}} \delta'(f,t)\,dt \leqslant \int_{\theta}^{\tau_{k+1}} \varphi_{n,m}(t)\,dt,$$

предположения (7) и неравенства для производных перестановок простых функций [6, с. 135] вытекает, что существует содержащий точку $a$ отрезок $[t', t'') \subset (0, \tau_{k+1})$ такой, что

$$\left|\int_{t'}^{t''} \delta'''(f,t)\,dt\right| \geqslant 4\left|\int_{a}^{\tau_{k+1}} \varphi_{n,m-2}(t)\,dt\right|. \tag{10}$$

Для производной $\delta_0'''(f,t)$ функции $\delta_0(f,t)$ при всех $u$ выполняется равенство $\delta_0'''(f,\theta-u) = -\delta_0'''(f,0+u)$ $0 = (\tau_k+\tau_{k+1})/2$, а в силу предложения 1 $\delta'''(f,\tau_k) \leqslant \varphi_{n,m-2}(\tau_k)$ и $\delta'''(f,t)$ монотонна на промежутке $(\tau_k, t')$. С учетом этого факта из неравенства (10) заключаем, что в некоторой точке $t_*$ интервала $(t', t'')$ и в симметричной ей относительно 0 точке $2\theta - t_*$ имеют место соотношения

$$|\delta_0'''(f,t_*)| > |\varphi_{n,m-2}(t_*)|, \quad |\delta_0'''(f, 2\theta-t_*)| > |\varphi_{n,m-2}(2\theta-t_*)|,$$

которые находятся в противоречии с предложениями 1 и 2.

2) Докажем неравенство (5). Предположим, что

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\delta'(f,t)\,dt > \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\varphi_{n,m}(t)|\,dt, \tag{11}$$

и сразу заметим, что тогда в силу (2) производная $\delta'(f,t)$ должна на $(\tau_k, \tau_{k+1})$ изменить знак более одного раза. Достаточно рассмотреть случай, когда $\delta'(f,t)$ меняет знак на $(\tau_k, \tau_{k+1})$ два раза, при большем числе перемен знака рассуждения аналогичны. Пусть для определенности $\varphi_{n,m}(t)$ возрастает на $(\tau_k, \tau_{k+1})$ и

$$\delta'(f,z_1) = \delta'(f,z_2) = 0, \quad \tau_k < z_1 < z_2 < \tau_{k+1}; \tag{12}$$

$$\delta'(f,t) > 0, \quad t \in (z_1, z_2);$$

$$\delta'(f,t) < 0, \quad t \in (\tau_k, z_1) \cup (z_2, \tau_{k+1}). \tag{13}$$

На соседних промежутках $(\tau_{k-1}, \tau_k)$ и $(\tau_{k+1}, \tau_{k+2})$ $\delta'(f,t)$ по абсолютной величине не может превышать $\|\varphi_{n,m}\|_C$: если $\delta'(f,t)$ на $(\tau_{k-1}, \tau_k)$ меняет знак один раз, то это следует из 1), если же более одного раза, то в противном случае и при выполнении (11) разность $\varphi_{n,m-1}(t) - \delta''(f,t)$ будет иметь на периоде больше, чем $2n$, перемен знака, что невозможно.

Наряду со сплайном $\varphi_{n,m}(t)$ будем рассматривать функцию $\psi_m(t) = \varphi_{n,m}(2t)$ такую, что

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\psi_m(t)|\,dt = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\varphi_{n,m}(t)|\,dt, \quad \|\psi_m\|_C = \|\varphi_{n,m}\|_C,$$

$$\|\psi_m'\|_C = 2\|\varphi_{n,m-1}\|_C = \psi_m'(x_1) = -\psi_m'(x_2),$$

где $x_1 = \tau_k + \pi/4n$, $x_2 = \tau_{k+1} - \pi/4n$. Из сравнения убывающих перестановок функций $\delta'(f,t)$ и $\psi_m(t)$ на $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ заключаем, что при выполнении (11) существуют окрестности $(\alpha_1, \beta_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2)$ соответственно точек $z_1$ и $z_2$ такие, что

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta''(f,t)\,dt + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} |\delta''(f,t)|\,dt > 2\int_{x_1-\gamma}^{x_2+\gamma} \psi_m'(t)\,dt,$$

где $\gamma = [(\beta_1 - \alpha_1) + (\beta_2 - \alpha_2)]/4$. Пусть, например,

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta''(f, t)\, dt > \int\limits_{x_1-\gamma}^{x_2+\gamma} \psi'_m(t)\, dt = 2 \int\limits_{b-2\gamma}^{b} \varphi_{n,m-1}(t)\, dt, \tag{14}$$

$$b = \tau_k + \pi/2n.$$

Если $z'$ — ближайший слева от $z_1$ нуль функции $\delta'(f, t)$, то из приведенных выше соображений о поведении $\delta'(f, t)$ на $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ и предложения 2 вытекает, что $\tau_k - z' < 5\pi/8n$. Таким образом,

$$\int\limits_{z'}^{z_1} \delta''(f, t)\, dt = 0,$$

$\delta''(f, t)$ возрастает на промежутке $(z', \tau_k)$ и в силу предложения 1 $\delta''(\tau_k - \pi/2n) \geqslant \varphi_{n,m-1}(\tau_k - \pi/2n)$. С учетом этих фактов из (14) следует, что для кососимметричной относительно $\theta = \tau_k$ функции $\delta''_0(f, t)$ в некоторой точке $\xi \in (\alpha_1, \beta_1)$ будет выполняться неравенство $\delta''_0(f, \xi) > \varphi_{n,m-1}(\xi)$, что невозможно в силу предложений 1 и 2.

3) Докажем, что неравенство (6) имеет место и в том случае, когда $\delta'(f, t)$ меняет знак на $(\tau_k, \tau_{k+1})$ более одного раза. И здесь достаточно рассмотреть случай с двумя переменами знака, причем будем считать, что выполнены соотношения (12) и (13).

Предположение о том, что неравенство (6) не выполняется, означает, что в некоторой точке $a \in (z_1, z_2)$ будет

$$\delta'(f, a) > \|\varphi_{n,m}\|_C - \|\psi_m\|_C. \tag{15}$$

Если $z_1 - z_2 < \pi/2n$, то можно прийти к противоречию, сравнивая перестановки функций $\delta'(f, t)$ и $\psi_m(t)$ соответственно на промежутках $[z_1, z_2]$ и $[x_1, x_2]$. В силу (15) найдутся точки $t'$ и $t''$, $z_1 < t' < t'' < z_2$ такие, что

$$\int\limits_{z_1}^{t'} \delta''(f, t)\, dt + \int\limits_{t''}^{z_2} |\delta''(f, t)|\, dt > \int\limits_{x_1-\gamma}^{x_1+\gamma} \psi'_m(t)\, dt,$$

где $\gamma = [(t' - z_1) + (z_2 - t'')]/2$. Предположив, что, например,

$$\int\limits_{z_1}^{t'} \delta''(f, t)\, dt > \int\limits_{x_1-\gamma}^{x_1} \psi'_m(t)\, dt = \int\limits_{b-2\gamma}^{b} \varphi_{n,m-1}(t)\, dt > 2 \int\limits_{b-2\gamma}^{b-\gamma} \varphi_{n,m-1}(t)\, dt,$$

$$b = (\tau_k + \tau_{k+1})/2,$$

к противоречию придем, рассуждая по аналогии с п. 2 после (14).

Пусть теперь $|z_1 - z_2| \geqslant \pi/2n$. Опять сравниваем перестановки функций $\delta'(f, t)$ на $[z_1, z_2]$ и $\psi_m(t)$ на $[x_1, x_2]$. Так как (5) доказано, то ввиду (15) найдется окрестность $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ точки $a$ такая, что

$$\int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |\delta'''(f, t)|\, dt > \int\limits_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} |\psi''_m(t)|\, dt, \quad b = [\tau_k + \tau_{k+1}]/2; \tag{16}$$

при этом

$$|\psi''_m(b)| = 4\|\varphi_{n,m-2}\| = 4\varphi_{n,m-2}(b). \tag{17}$$

Впишем в $\delta'(f, t)$ на $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ четырехзвенную ломаную $l(t)$, совпадающую с $\delta'(f, t)$ на концах промежутка, а также в точках $z_1$, $a$ и $z_2$, являющихся ее вершинами. Положим $\Delta(t) = \delta'(f, t) - l(t)$. В силу (8), (15) и неравенства $|z_1 - z_2| \geqslant \pi/2n$ должно быть

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \Delta(t)\, dt < 0. \tag{18}$$

С другой стороны, если $B(\alpha, \beta; t)$ — квадратичный трехчлен, однозначно определяемый на отрезке $[\alpha, \beta]$ равенствами $B(\alpha, \beta; \alpha) = B(\alpha, \beta; \beta) = 0$, $B''(\alpha, \beta; t) = 1$, то интегрирование по частям на каждом промежутке линейности $l(t)$ приводит к равенству:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \Delta(t)\,dt = \int_{\tau_k}^{z_1} B(\tau_k, z_1; t)\,\delta'''(f, t)\,dt + \int_{z_1}^{a} B(z_1, a; t)\,\delta'''(f, t)\,dt +$$

$$+ \int_{a}^{z_2} B(a, z_2; t)\,\delta'''(f, t)\,dt + \int_{z_2}^{\tau_{k+1}} B(z_2, \tau_{k+1}; t)\,\delta'''(f, t)\,dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Так как $\delta'''(f, \tau_k) \leqslant \|\varphi_{n,m-2}\|_C$, $\delta'''(f, \tau_{k+1}) \leqslant \|\varphi_{n,m-2}\|_C$, причем $\delta'''(f, t)$ убывает на $(\tau_k, z_1)$ и возрастает на $(z_2, \tau_{k+1})$, то вместе с (16) и (17) это приводит к неравенству $I_1 + I_1 < -I_2 + I_3$ — противоречие с (18). Теорема 1 доказана.

Получить нужную оценку в метрике $L_p$, $1 < p < \infty$, можно с помощью следующего утверждения, имеющего и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть $r(g, t)$ — убывающая перестановка функции $|g(t)|$ на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. Если $f(t) \in W_\infty^{m+1}$, то*

$$\int_0^t r(\delta'_\pm(f), u)\,du \leqslant \int_0^t r((\varphi_{n,m})_\pm, u)\,du, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/n, \tag{19}$$

*где $g_\pm(t)$ — положительная или отрицательная часть функции $g(t)$ на $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.*

Доказательство. В случае, когда $\delta'(f, t)$ меняет знак на $(\tau_k, \tau_{k+1})$ один раз, соотношение (19) очевидным образом вытекает из предложения 2 и теоремы 1.

В общем случае неравенство (19) надо доказывать лишь для тех точек $t = \xi$, в которых $r(\delta'_\pm(f), \xi) = r((\varphi_{n,m})_\pm, \xi)$, и в некоторой левой окрестности $(\xi - \varepsilon, \xi)$ этой точки $r(\delta'_\pm(f), t) > r((\varphi_{n,m})_\pm, t)$. Из (4), (5) следует $r(\delta'_\pm(f), 0) \leqslant r((\varphi_{n,m})_\pm, 0)$ и неравенство (19) справедливо при $t = \pi/n$. Очевидно, $r((\psi_m)_\pm, t) \equiv r((\varphi_{n,m})_\pm, t)$. С учетом этих фактов легко понять, что если $\delta'(f, t)$ меняет знак на $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ два раза, то выполняются условия, аналогичные рассмотренным в пп. 2 и 3 доказательства теоремы 1. Рассуждая от противного и сравнивая перестановки функций $\delta'_\pm(f)$ и $(\psi_m)_\pm$, придем к нужному результату, используя предложения 1 и 2. Случай большего числа перемен знака у $\delta'(f, t)$ рассматривается аналогично.

Неравенство (19) с учетом леммы 2.4.13 из [1] приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Если $f(t) \in W_\infty^{m+1}$, то при всех $p \geqslant 1$*

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\delta'(f, t)|^p dt \leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |\varphi_{n,m}(t)|^p dt, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

*так что $\|\delta'(f)\|_p \leqslant \|\varphi_{n,m}\|_p$.*


1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
2. *Корнейчук Н. П.* О поведении производных погрешности сплайн-интерполирования // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 1.— С. 67—72.
3. *Корнейчук Н. П.* О приближении интерполяционными сплайнами функций и их производных // Докл. АН СССР. — 1982.— **264**, № 5.— С. 1063—1066.
4. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$ // Мат. сб.— 1969.— **80**, № 2.— С. 290—304.
5. *Женсыкбаев А. А.* Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению // Мат. заметки.— 1973.— **13**, № 6.— С. 807—816.
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи в теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.


Получено 02.08.90