УДК 517.5

Н. В. ЗОРИЙ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Оценки емкостей плоских конденсаторов

Получена точная нижняя оценка емкости плоского конденсатора через логарифмические емкости граничных множеств его пластин; исследован случай равенства.

Здобута точна нижня оцінка ємності плоского конденсатора через логарифмічні ємності крайових множин його пластин; досліджений випадок рівності.

1. Введение. Пусть $E^+, E^- \subset \mathbb{C}$ — непустые, непересекающиеся, замкнутые множества, первое из которых ограничено. Упорядоченную пару $E := (E^+, E^-)$ называют плоским конденсатором. Множества E^+ и E^- назовем пластинами конденсатора E (соответственно положительной и отрицательной), а $Z := \overline{\mathbb{C}} \setminus (E^+ \cup E^-)$ — зазором. Множество Z открыто, но необязательно связно. Емкость конденсатора E определяется равенством

$$\operatorname{cap} E := \inf_f \int_Z |\operatorname{grad} f|^2 \, dm,$$

где m — плоская мера Лебега, а f пробегает множество всех непрерывных функций $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, которые бесконечно дифференцируемы в зазоре Z и принимают значения 1 на E^+ и 0 на E^-.

Пусть $C(K)$ — логарифмическая емкость компакта $K \subset \mathbb{C}$ [1]. В предположении связности и ограниченности зазора Z в [2] получена точная оценка

$$\frac{2\pi}{\operatorname{cap} E} \leqslant \log \frac{C(\partial E^-)}{C(E^+)} \tag{1}$$

и исследован случай равенства. (Ранее оценка (1) была установлена в [3] при дополнительном условии двухсвязности Z.) В настоящей статье сняты требования связности и ограниченности множества Z. Предложен новый метод доказательства оценки (1) и соответствующего утверждения единственности, который, благодаря использованию методов и результатов логарифмической теории потенциала, по мнению автора, более компактен и ясен.

2. Основной результат. Приведем определение логарифмической емкости компакта $K \subset \mathbb{C}$. Обозначим

$$W(K) := \inf_{\mu} \iint\limits_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \log \frac{1}{|x-y|} d\mu(x)\, d\mu(y),$$

где inf берется по классу всех единичных мер μ, сосредоточенных на K [1]. Логарифмическая емкость компакта K определяется равенством $C(K) := e^{-W(K)}$, если $W(K) < +\infty$, и равенством $C(K) := 0$, если $W(K) = +\infty$.

Пусть $F \subset \mathbb{C}$ — замкнутое множество (необязательно компактное). Логарифмической емкостью множества F назовем величину $C(F) := \sup\limits_{K} C(K)$, где точная верхняя грань берется по совокупности всех компактов $K \subset F$. Через $\check{F}$ обозначим приведенное ядро множества F [1], т. е. совокупность всех тех $x \in F$, для каждой из которых всякая ее окрестность пересекается с F по множеству положительной логарифмической емкости. Если $C(F) > 0$, то $\check{F}$ — непустое замкнутое множество.

Пусть $E = (E^+, E^-)$ — конденсатор с $\operatorname{cap} E > 0$. Как известно [4], условие $\operatorname{cap} E > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда каждое из множеств E^+ и E^- имеет ненулевую логарифмическую емкость. Пусть G_∞ — неограниченная компонента связности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus E^+$, $g(x)$ — функция Грина для G_∞ с полюсом на бесконечности [1]. Через Z_+ обозначим объединение всех тех компонент связности (открытого) множества $\mathbb{C} \setminus (\check{E}^-)$, которые имеют непустые пересечения с $(\check{E}^+)$. Пусть выполнено условие

$$C(\overline{Z}_+) < +\infty \tag{2}$$

($\overline{Z}_+$ — замыкание Z_+ в $\mathbb{C}$). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\frac{2\pi}{\operatorname{cap} E} \leqslant \log \frac{C(\partial Z_+)}{C(E^+)} . \tag{3}$$

Знак равенства в (3) *верен в том и только в том случае, когда для некоторого* $s \in (0, +\infty)$

$$\partial Z_+ = \{x \in G_\infty : g(x) = s\}. \tag{4}$$

Если верно (4), *то*

$$s = \frac{2\pi}{\operatorname{cap} E} = \log \frac{C(\partial Z_+)}{C(E^+)} . \tag{5}$$

По поводу конденсаторов E, условию (2) не удовлетворяющих, см. замечание 1.

Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт ненулевой логарифмической емкости, $q \in (1, +\infty)$ — некоторое фиксированное число. В качестве следствия из теоремы 1 приведем решение следующей экстремальной задачи: среди совокупности $\mathfrak{C}(K, q)$ конденсаторов $E = (E^+, E^-)$, удовлетворяющих условию (2), с фиксированной положительной пластиной $E^+ = K$ и фиксированной емкостью $\operatorname{cap} E = \dfrac{2\pi}{\log q}$ найти конденсатор с минимальной характеристикой $C(\partial E^-)$.

Следствие. *Верно неравенство*

$$C(\partial E^-) \geqslant qC(K) \tag{6}$$

для всех $E \in \mathfrak{C}(K, q)$. *Знак равенства в* (6) *выполняется для тех конденсаторов* $E \in \mathfrak{C}(K, q)$ (*и только для них*), *у которых граничное множество* $\partial(\check{E}^-)$ *совпадает с линией уровня* $\{x : g(x) = \log q\}$.

Прежде чем доказать теорему 1, приведем некоторые факты и понятия логарифмической теории потенциала.

3. Вспомогательные утверждения. Будем рассматривать борелевские заряды ν в $\mathbb{C}$, которые предполагаются конечными, но не обязательно финитными. Для зарядов ν_1 и ν_2 положим

$$\mathcal{J}(\nu_1, \nu_2) := \iint\limits_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \log\frac{1}{|x-y|}\, d\nu_1(x)\, d\nu_2(y)$$

(если, конечно, этот интеграл существует как конечное число или одно из несобственных чисел $-\infty$, $+\infty$). Величина $\mathcal{J}(\nu_1, \nu_2)$ называется взаимной энергией зарядов ν_1, ν_2, а величина $\mathcal{J}(\nu) := \mathcal{J}(\nu, \nu)$ — энергией заряда ν.

Всюду далее F — замкнутое множество комплексной плоскости (вообще говоря, не компактное). Обозначим через $\mathfrak{M}_1(F)$ совокупность всех единичных мер μ в $\mathbb{C}$, сосредоточенных на F, для которых интеграл $\int\limits_{|x|>1} \log|x|\, d\mu(x)$ сходится (к конечному числу). Для меры $\mu\in\mathfrak{M}_1(F)$ потенциал

$$\mathcal{U}^{\mu}(x) := \int\limits_{\mathbb{C}} \log\frac{1}{|x-y|}\, d\mu(y)$$

определен всюду в $\mathbb{C}$, конечен почти всюду и не принимает значения $-\infty$. Справедливо и обратное: если единичная мера μ сосредоточена на F, а $\mathcal{U}^{\mu}(x)$ существует и конечен хотя бы в одной точке, то $\mu\in\mathfrak{M}_1(F)$. Для каждой меры $\mu\in\mathfrak{M}_1(F)$ определен интеграл энергии $\mathcal{J}(\mu)$, причем $\mathcal{J}(\mu)\in(-\infty, +\infty]$. Примем обозначение

$$W(F) := \inf_{\mu\in\mathfrak{M}_1(F)} \mathcal{J}(\mu).$$

Пусть $C(F)\in(0, +\infty)$. Как известно [5], существуют мера $\omega=\omega_F\in \in\mathfrak{M}_1(F)$ и число $a_F\in(-\infty, +\infty)$ такие, что

$$\mathcal{U}^{\omega}(x) = a_F \text{ квазивсюду на } F, \tag{7}$$

$$\mathcal{U}^{\omega}(x) \leqslant a_F \qquad \forall x\in\mathbb{C}. \tag{8}$$

(Термин «квазивсюду» означает «всюду, за исключением разве что множества логарифмической емкости нуль» [1].) Меру ω называют равновесной мерой (для F).

Лемма 1. *Равновесная мера единственна. Величины a_F, $\mathcal{J}(\omega)$, $\log 1/C(F)$ и $W(F)$ равны между собой.*

Доказательство. В случае ограниченности F утверждение леммы хорошо известно [1]. Пусть F не ограничено. Существуют точка x_0 и число $r<1$ такие, что $\{x: |x-x_0|\leqslant r\}\subset\mathbb{C}\setminus F$. Пусть $I: x\to x'$ — преобразование инверсии относительно окружности $\{x: |x-x_0|=r\}$, $F' := I(F)$. Для $\mu\in\mathfrak{M}_1(F)$ обозначим через $\tilde{\mu}$ меру, определяемую равенством

$$\tilde{\mu}(dx') := \mu(dx),\ x\in F,\ x'\in F'. \tag{9}$$

Мера $\tilde{\mu}$ сосредоточена на (ограниченном) множестве F' и имеет полную массу $\tilde{\mu}(\mathbb{C})=1$. Из (9) и равенств

$$\frac{|x-x_0|}{|y'-x_0|} = \frac{|x-y|}{|x'-y'|},\ |x-x_0|\cdot|x'-x_0| = r^2,\ x, y\in F,$$

находим

$$\mathcal{U}^{\mu}(x) = \mathcal{U}^{\tilde{\mu}}(x') - \log\frac{1}{|x'-x_0|} - \mathcal{U}^{\tilde{\mu}}(x_0) - 2\log r,\ x\in F. \tag{10}$$

Число $\mathcal{U}^{\widetilde{\mu}}(x_0)$ конечно, что видно из условия $\mathcal{U}^{\widetilde{\mu}}(x) > -\infty \quad \forall x$. Интегрируя правую и левую части равенства (10) соответственно по $d\mu(x)$ и $d\widetilde{\mu}(x')$, получаем

$$\mathcal{I}(\mu) = \mathcal{I}(\widetilde{\mu}) - 2\mathcal{U}^{\widetilde{\mu}}(x_0) - 2\log r. \tag{11}$$

Пусть ω_1 и ω_2 — две равновесные меры для F. Из соотношений (8) и (11) следует, что меры $(\widetilde{\omega_1})$ и $(\widetilde{\omega_2})$ имеют конечные энергии и, значит [1], C-абсолютно непрерывны. (Напомним, что мера μ называется C-абсолютно непрерывной, если для всякого компакта K нулевой логарифмической емкости верно $\mu(K) = 0$.) Из равенств (7) и (10) находим

$$\mathcal{U}^{(\widetilde{\omega_1})}(x) - \mathcal{U}^{(\widetilde{\omega_2})}(x) = c \ (\equiv \text{const}) \text{ квазивсюду на } F'.$$

(Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что всякий компакт K с $C(K) = 0$, не содержащий x_0 переходит в результате преобразования I также в компакт нулевой емкости.) Отсюда получаем $\mathcal{I}((\widetilde{\omega_1}) - (\widetilde{\omega_2})) = 0$. Следовательно [1], $(\widetilde{\omega_1}) = (\widetilde{\omega_2})$ и $\omega_1 = \omega_2$.

Тем самым доказана единственность равновесной меры $\omega = \omega_F$. Из приведенных рассуждений следует также, что мера ω C-абсолютно непрерывна. А значит, верно $\mathcal{I}(\omega) = a_F$. Равенство $a_F = \log 1/C(F)$ вытекает из доказательства теоремы 5 [5] с учетом установленного факта единственности. Докажем равенство $W(F) = \log 1/C(F)$.

Пусть $\{F_k\}$ — последовательность компактов таких, что $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ и $F = \bigcup_k F_k$. Тогда $W(F_1) \geqslant W(F_2) \geqslant \ldots \geqslant W(F)$ и $\log 1/C(F) = \lim_{k\to\infty} W(F_k)$. Искомое равенство будет доказано, если установим соотношение

$$\lim_{k\to\infty} W(F_k) \leqslant W(F). \tag{12}$$

Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_1(F)$ — произвольная мера, μ_k — сужение μ на F_k, $k = 1, 2, \ldots$. Меры $(\widetilde{\mu_k})$ образуют возрастающую последовательность мер, слабо сходящуюся к $\widetilde{\mu}$ [1]. Следовательно [1],

$$\mathcal{U}^{\widetilde{\mu}}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{U}^{(\widetilde{\mu_k})}(x) \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{I}(\widetilde{\mu}) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}((\widetilde{\mu_k})).$$

Из этих соотношений, равенств (11) и $\mathcal{I}(\mu_k) = \mathcal{I}((\widetilde{\mu_k})) - 2\mathcal{U}^{(\widetilde{\mu_k})}(x_0) - 2\log r$ находим

$$\mathcal{I}(\mu) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}(\mu_k). \tag{13}$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$ в соотношении

$$\mathcal{I}(\mu_k) \geqslant [\mu_k(\mathbb{C})]^2 W(F_k) \quad \forall k,$$

на основании (13) и равенства $\lim_{k\to\infty} \mu_k(\mathbb{C}) = 1$ получаем $\mathcal{I}(\mu) \geqslant \lim_{k\to\infty} W(F_k)$. Пользуясь произвольностью меры $\mu \in \mathfrak{M}_1(F)$, убеждаемся в справедливости (12). Лемма 1 доказана.

Заметим также, что

$$\operatorname{supp} \omega \subset \partial F. \tag{14}$$

Действительно, если ω_0 — сужение меры ω на открытый круг $B \subset F$ и $\omega_1 := \omega - \omega_0$, то

$$\mathcal{U}^{\omega_0}(x) = a_F - \mathcal{U}^{\omega_1}(x) \text{ квазивсюду на } B. \tag{15}$$

Поскольку функция, стоящая в правой части равенства (15), гармонична в B, то с помощью теоремы единственности для логарифмических потенциалов [1] из (15) находим $\omega_0 \equiv 0$.

Из (14) в силу единственности равновесной меры получаем

$$\omega_F = \omega_{\partial F}. \tag{16}$$

Нам понадобятся также следующие результаты о выметании мер. Пусть замкнутое множество F имеет положительную логарифмическую емкость. Для всякой меры $\mu \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{C})$ существуют [5, 6] мера $\mu' \in \mathfrak{M}_1(F)$ и число $\gamma_\mu \in [0, +\infty)$ такие, что

$$\mathcal{U}^{\mu'}(x) = \mathcal{U}^{\mu}(x) + \gamma_\mu \text{ квазивсюду на } F,$$

$$\mathcal{U}^{\mu'}(x) \leqslant \mathcal{U}^{\mu}(x) + \gamma_\mu \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Меру μ' называют выметанием меры μ на F, а число γ_μ — постоянной выметания.

Для поставленных целей достаточен частный случай этого результата, когда мера μ финитна в $\mathbb{C} \setminus F$. Тогда мера μ' имеет конечную энергию. Рассуждая аналогично тому, как это делалось выше для равновесных мер, можно видеть, что в этом случае выметание μ' единственно и C-абсолютно непрерывно, причем $\operatorname{supp} \mu' \subset \partial F$.

4. Доказательство теоремы 1. Для конденсатора E обозначим через $\mathfrak{N}_1(E)$ класс всех зарядов $\nu = \nu^+ - \nu^-$ таких, что $\nu^+ \in \mathfrak{M}_1(E^+)$, $\nu^- \in \mathfrak{M}_1(E^-)$. Пусть $V(E) := \inf\limits_{\nu \in \mathfrak{N}_1(E)} \mathcal{I}(\nu)$. Справедливо представление ([4]; см. также [7])

$$\frac{2\pi}{\operatorname{cap} E} = V(E), \tag{17}$$

а вариационная задача о минимизации энергии $\mathcal{I}(\nu)$ в классе зарядов $\nu \in \mathfrak{N}_1(E)$ имеет решение $\lambda_E \equiv \lambda$, притом единственное [4].

Пусть ω_+ и ω_- — соответственно равновесные меры множеств E^+ и $\partial Z_+ (\subset E^-)$, а ω'_+ — выметание ω_+ на замкнутое множество $\Omega := \mathbb{C} \setminus Z_+$. Заряды $\omega_+ - \omega'_+$ и $\omega_+ - \omega_-$ принадлежат классу $\mathfrak{N}_1(E)$ и верны соотношения

$$V(E) \leqslant \mathcal{I}(\omega_+ - \omega'_+) \leqslant \mathcal{I}(\omega_+ - \omega_-) = W(E^+) - W(\partial Z_+). \tag{18}$$

Первое неравенство очевидно. Докажем остальные соотношения. В силу условия (2) множество Ω не разрежено на бесконечности [5]. Применяя следствие из [5, с. 212] к мере ω_+ и множеству Ω, находим, что $\gamma_{\omega_+} = 0$ и, следовательно,

$$\mathcal{U}^{\omega'_+}(x) = \mathcal{U}^{\omega_+}(x) \text{ квазивсюду на } \Omega. \tag{19}$$

Отсюда ввиду C-абсолютной непрерывности меры ω'_+ получаем $\mathcal{I}(\omega'_+) = \mathcal{I}(\omega_+, \omega'_+)$ и

$$\mathcal{I}(\omega_+ - \omega'_+) = \mathcal{I}(\omega_+) - \mathcal{I}(\omega'_+). \tag{20}$$

Далее, используя утверждение (16), видим, что

$$\mathcal{U}^{\omega_-}(x) = W(\partial Z_+) \text{ квазивсюду на } E^+. \tag{21}$$

Следовательно, $\mathcal{I}(\omega_+, \omega_-) = \mathcal{I}(\omega_-)$ $(= W(\partial Z_+))$ и

$$\mathcal{I}(\omega_+ - \omega_-) = \mathcal{I}(\omega_+) - \mathcal{I}(\omega_-). \tag{22}$$

Из соотношений (20), (22) и леммы 1 следуют искомые утверждения в (18).

Но в силу леммы 1

$$W(E^{+}) - W(\partial Z_{+}) = \log \frac{C(\partial Z_{+})}{C(E^{+})}.$$

Из соотношений (17), (18) и отмеченного свойства единственности заряда $\lambda = \lambda^{+} - \lambda^{-}$ находим оценку (3) и следующее утверждение: равенство в (3) верно в том и только в том случае, когда

$$\omega_{+} - \omega'_{+} = \omega_{+} - \omega_{-} = \lambda^{+} - \lambda^{-}. \tag{23}$$

Покажем, что утверждения (4) и (23) равносильны.

Пусть верно (23). Пользуясь отделимостью E^{+} и E^{-}, имеем $\omega'_{+} = \omega_{-} = \lambda^{-}$. Из первого равенства находим

$$\mathcal{U}^{\omega'_{+}}(x) = c\,(= W(\partial Z_{+})) \text{ квазивсюду на } \partial Z_{+}.$$

Тогда в силу равенства (19) и непрерывности потенциала $\mathcal{U}^{\omega_{+}}(x)$ в $\mathbb{C} \setminus E^{+}$ имеем

$$\mathcal{U}^{\omega_{+}}(x) = \lim_{y \to x} \mathcal{U}^{\omega_{+}}(y) = c \qquad \forall x \in \partial Z_{+}. \tag{24}$$

Поскольку верно предельное равенство [1]

$$\lim_{y \to \infty} \mathcal{U}^{\omega_{+}}(y) = -\infty, \tag{25}$$

из (2) и (24) вытекает ограниченность множества Z_{+}. Функция $\mathcal{U}^{\omega_{+}}(x)$ супергармонична в Z_{+} и (в силу определения Z_{+}) ни в одной из связных компонент $Z_i \subset Z_{+}$ не сводится к постоянной. Пользуясь принципом минимума для супергармонических функций, из (24) получаем $\mathcal{U}^{\omega_{+}}(x) > c$ $\forall x \in Z_{+}$. Далее, из равенства $\omega_{-} = \lambda^{-}$ и описания носителей мер ω_{-} и λ^{-} [1, 4] вытекает, что множество $\mathbb{C} \setminus \bar{Z}_{+} =: D$ — (неограниченная) область. Применяя принцип максимума к области D и гармонической в D функции $\mathcal{U}^{\omega_{+}}$, из (24) и (25) получаем $\mathcal{U}^{\omega_{+}}(x) < c$ $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \bar{Z}_{+}$. Значит,

$$\partial Z_{+} = \{x \in \mathbb{C} : \mathcal{U}^{\omega_{+}}(x) = W(\partial Z_{+})\}.$$

А поскольку $g(x) = W(E^{+}) - \mathcal{U}^{\omega_{+}}(x)$ [1], то верно (4) с $s = W(E^{+}) - W(\partial Z_{+})$.

Пусть выполняется (4) с некоторым $s \in (0, +\infty)$. Тогда (см. (19))

$$\mathcal{U}^{\omega'_{+}}(x) = \mathcal{U}^{\omega_{+}}(x) = W(E^{+}) - s \text{ квазивсюду на } \partial Z_{+}.$$

В силу единственности равновесных мер отсюда находим $\omega'_{+} = \omega_{-}$, $s = W(E^{+}) - W(\partial Z_{+})$. Тогда $\omega_{+} - \omega'_{+} = \omega_{+} - \omega_{-} =: \nu \in \mathfrak{N}_1(E)$ и (см. (7), (19), (21))

$$\mathcal{U}^{\nu}(x) = \begin{cases} s \text{ квазивсюду на } E^{+}, \\ 0 \text{ квазивсюду на } E^{-}. \end{cases}$$

Поскольку из всех зарядов класса $\mathfrak{M}_1(E)$ λ является единственным зарядом, потенциал которого постоянен квазивсюду на E^{+} и постоянен квазивсюду на E^{-} [4], то, значит, $\nu = \lambda$. Равенства (23) доказаны. Попутно установлена справедливость утверждения (5). Теорема 1 доказана.

5. Замечания. 1. Пусть конденсатор E условию (2) не удовлетворяет. Оценка (3), очевидно, остается в силе в случае $C(\partial Z_{+}) = +\infty$. Если $C(\partial Z_{+}) < +\infty$, то, вообще говоря, утверждение (3) не верно.

(В этом нас убеждает пример конденсатора E, пластины которого суть замкнутые круги одного радиуса. Более того, справедливо следующее утверждение. Каковы бы ни были числа q_1 и q_2, $q_1 \geqslant q_2 > 0$, найдется конденсатор E с $C(E^+) = q_2$, $C(\partial E^-) = C(E^-) = q_1$ такой, что $\frac{2\pi}{\operatorname{cap} E} > \log \frac{q_1}{q_2}$.)

Можно видеть, что в этом случае справедливо равенство

$$\frac{2\pi}{\operatorname{cap} E} = W(E^+) + W(E^-) - \mathcal{J}(\lambda^+, \omega_{E^-}) - \mathcal{J}(\lambda^-, \omega_{E^+}). \tag{26}$$

Равенство (26) дает возможность получать верхние и нижние оценки емкости конденсатора через его метрические характеристики и логарифмические емкости пластин. Полученные таким путем оценки не будут, однако, точными.

2. Комбинируя теорему 1 с теоремой 1 из [2], видим, что справедливость теоремы 5 из [2] не нарушится, если фигурирующее в ее формулировке условие ограниченности зазора заменить на более слабое условие конечности его логарифмической емкости.

3. Предложенное доказательство теоремы 1 допускает обобщение на случай пространственных конденсаторов (расположенных в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, либо более общо, в области $G \subset \mathbb{R}^n$) [8]. При этом 2-емкость конденсатора оценивается через ньютоновы (либо гриновы) емкости соответствующих множеств, и дается утверждение о знаке равенства.

1. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
2. *Kloke H.* Some inequalities for the capacity of plane condensers // Results Math.— 1986.— **9**, № 1.— 2.— P. 82–94.
3. *Hubner O.* Faktorisierung konformer Abbildungen und Anwendungen // Math. Z.— 1966. **92**.— P. 95–109.
4. *Тамразов П. М.* О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала.— Киев, 1980.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.25).
5. *Ninomiya N.* On the balayage constant for logarithmic potentials // Osaka J. Math.— 1983.— **20**, № 1.— P. 205—216.
6. *Ninomiya N.* On the balayage for logarithmic potentials // Nagoya Math. J.— 1967.— **29**.— P. 229—241.
7. *Bagby T.* The modulus of a plane condenser // J. Math. and Mech.— 1967.— **17**, № 4.— P. 315—329.
8. *Зорий Н. В.* Одна точная оценка 2-емкости конденсатора // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 2.— С. 253—257.

Получено 30.12.88