УДК 517.911

А. Е. ЗЕРНОВ, канд. физ.-мат. наук (Одес. политехн. ин-т)

Об асимптотике решений одной задачи Коши

Рассматривается задача Коши $(x')^n = at^r + bx + f(t, x, x')$, $x(0) = 0$. Доказано существование непрерывно дифферецируемых решений, исследовано их асимптотическое поведение при $t \to +0$.

Розглядається задача Коші $(x')^n = at^r + bx + f(t, x, x')$, $x(0) = 0$. Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків, досліджена їх асимптотична поведінка при $t \to +0$.

Рассмотрим задачу Коши

$$(x')^n = at^r + bx + f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $n \geqslant 2$ — целое, r, a, b — постоянные, $r > 0$, $f : D \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция; здесь

$$D = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau],\ |x| \leqslant \mu t,\ |y| \leqslant (s + 1)\mu t^s\},$$

где τ, μ — постоянные, $\tau > 0$, $\mu > 0$, а

$$s = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}, & \text{если } b \neq 0, \\[2mm] \dfrac{r}{n}, & \text{если } b = 0. \end{cases}$$

Пусть

$$|f(t, x, y)| \leqslant Kt^r\alpha(t),\ (t, x, y) \in D_1,$$

где $D_1 = \{(t, x, y)$: $(t, x, y) \in D$, $|x| \leqslant \mu t^{s+1}\}$, K — постоянная, $K > 0$, $\alpha : (0, \tau] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t \to +0} \alpha(t) = 0$.

Определение. *Пусть σ — постоянная $0 < \sigma \leqslant \tau$. Будем называть σ-решением задачи* (1), (2) *непрерывно дифференцируемую функцию $x : (0, \sigma] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую при $t \in (0, \sigma]$ уравнению* (1), *неравенствам*

$$|x(t)| < \mu t,\quad |x'(t)| < (s + 1)\mu t^s \tag{3}$$

и условию

$$\lim_{t \to +0} x(t) = 0. \tag{4}$$

Назовем *условиями А* совокупность следующих условий:

1) $b \neq 0$;
2) если n нечетно, то $b > 0$;
3) $|b|(s + 1)^n < \mu^{n-1}$;
4) $n > s + 1$;
5) если $n \geqslant 3$, то

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant Lt(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|),$$

$$(t, x_i, y_i) \in D, \ i \in \{1, 2\},$$

где L — постоянная, $0 < L < (n-2)|b|$;

6) если $n = 2$, то

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant Lt\beta(t)(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|),$$
$$(t, x_i, y_i) \in D, \ i \in \{1, 2\},$$

где L — постоянная, $L > 0$, $\beta : (0, \tau] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t \to +0} \beta(t) = 0$ и существует предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{\beta(t)}{t^{r-2}} = \beta_1, \ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant +\infty;$$

Если $\beta_1 > 0$, то β — непрерывно дифференцируемая функция, $\beta'(t) > 0$ при $t \in (0, \tau]$ и существует предел

$$\lim_{t \to +0} t \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \beta_2, \ 0 < \beta_2 \leqslant +\infty.$$

Обозначим через $\mathfrak{U}_1(\rho, M)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам

$$|x(t) - ct^{n/(n-1)}| \leqslant Mt^r, \quad \left| x'(t) - \frac{nc}{n-1} t^{1/(n-1)} \right| \leqslant qMt^{r-1};$$

где ρ, M — постоянные, $0 < \rho \leqslant \tau$, $M > 0$, $q = 2 - \operatorname{sign}(n-2)$, а c — любой из действительных ненулевых корней уравнения $(n/(n-1))^n c^n = bc$.

Теорема 1. *Если выполнены условия A, то существуют постоянные $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$ такие, что задача* (1), (2) *имеет ρ-решение, принадлежащее множеству $\mathcal{U}_1(\rho, M)$, притом единственное.*

Назовем *условиями B* совокупность следующих условий:

1) $b = 0$;

2) $a \neq 0$;

3) если n четно, то $a > 0$;

4) $|a| < (s+1)^n \mu^n$;

5) $|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant Lt^{\frac{n-1}{n}r} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$, $(t, x_i, y_i) \in D$, $i \in \{1, 2\}$, где L — постоянная, $0 < L < n|a|^{(n-1)/n}$;

6) α — непрерывно дифференцируемая функция, причем $\alpha'(t) \geqslant 0$ при $t \in (0, \tau]$.

Обозначим через $\mathfrak{U}_2(\rho, M)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенствам

$$|x(t) - ct^{1+r/n}| \leqslant Mt^{1+r/n}\alpha(t), \quad \left| x'(t) - \frac{n+r}{n} ct^{r/n} \right| \leqslant Mt^{r/n}\alpha(t);$$

где ρ, M — постоянные, $0 < \rho \leqslant \tau$, $M > 0$, а c — любой из действительных корней уравнения $((n+r)/n)^n c^n = a$.

Теорема 2. *Если выполнены условия B, то существуют постоянные $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$ такие, что задача* (1), (2) *имеет ρ-решение, принадлежащее множеству $\mathcal{U}_2(\rho, M)$, притом единственное.*

Доказательство теорем 1, 2. Прежде всего выбираем постоянные ρ, M. Условия, определяющие этот выбор, здесь не приводятся ввиду громоздкости; отметим только, что ρ достаточно мало, M достаточно велико и выбор ρ, M определяет справедливость всех последующих рассуждений.

Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [0, \rho]} (|x(t)| + |x'(t)|),$$

а U — подмножество $\mathfrak{B}$, каждый элемент $x:[0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет при $t \in (0, \rho]$ неравенствам

$$|x(t) - ct^{s+1}| \leqslant Mt^{s+1}\gamma(t), \tag{5}$$

$$|x'(t) - (s+1)ct^s| \leqslant pMt^s\gamma(t), \tag{6}$$

причем $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$; $\gamma:(0, \tau] \to (0, +\infty)$ — функция, определяемая равенством

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^{r-s-1}, & \text{если } b \neq 0, \\ \alpha(t), & \text{если } b = 0, \end{cases}$$

c — любой из действительных ненулевых корней уравнения

$$(s+1)^n c^n = bc + a(1 - \operatorname{sign}|b|),$$

а p — постоянная, определяемая следующим образом:

$$p = \begin{cases} q, & \text{если } b \neq 0, \\ 1, & \text{если } b = 0. \end{cases}$$

Можно считать, что при $t \in (0, \rho]$ все функции $x \in U$ удовлетворяют неравенствам (3).

Пусть

$$D_\rho = \{(t, x, y) : (t, x, y) \in D,\ t \leqslant \rho\}.$$

Преобразуем (1) к виду

$$x' = (s+1)ct^s + \frac{t^{-(n-1)s}}{n(s+1)^{n-1}c^{n-1}}(b(x - ct^{s+1}) + Q(t, x, x')),$$

где функция $Q: D_\rho \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$Q(t, x, y) = at^r \operatorname{sign}|b| + f(t, x, y) - \sum_{k=2}^{n} C_n^k((s+1)ct^s)^{n-k}(y - (s+1)ct^s)^k, \tag{7}$$

и рассмотрим уравнение

$$x' = (s+1)ct^s + \frac{t^{-(n-1)s}}{n(s+1)^{n-1}c^{n-1}}(b(x - ct^{s+1}) + Q(t, u(t), u'(t))), \tag{8}$$

где $u \in U$ — произвольная фиксированная функция.

Под σ-решением задачи Коши (8), (2) (где σ — постоянная, $0 < \sigma \leqslant \rho$) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $x:(0, \sigma] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую при $t \in (0, \sigma]$ уравнению (8), неравенствам (3) и условию (4).

Пусть

$$D_2 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x| < \mu t\}.$$

В каждой замкнутой подобласти D_2 для уравнения (8) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

Далее приводятся рассуждения качественного характера. Предварительно, следуя Ф. Хартману [1, с. 52], введем понятие точки строгого выхода.

Определение. *Пусть*

$$\Phi = \{(t, x) : t \in (0, \sigma],\ |x - g_1(t)| = g_2(t)\},$$

$$G = \{(t, x) : t \in (0, \sigma],\ |x - g_1(t)| < g_2(t)\},$$

где σ *— постоянная,* $\sigma > 0$, $g_i:(0, \sigma] \to \mathbb{R}$ *— непрерывные функции,* $i \in \{1, 2\}$. *Пусть* G_0 *— открытое* (t, x)*-множество,* $G \cup \Phi \subset G_0$, *а* $F: G_0 \to$

$\to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция. Тогда* $(t_0, x_0) \in \Phi$ *называется точкой строгого выхода для множества* G *по отношению к уравнению* $x' = F(t, x)$, *если для каждого решения* $x = x(t)$ *этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию* $x(t_0) = x_0$, *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

а) при $0 < t_0 < \sigma$ $(t, x(t)) \bar{\in} \bar{G}$ *для* $t_0 - \delta < t < t_0$ *и* $(t, x(t)) \in G$ *для* $t_0 < t < t_0 + \delta$;

б) при $t_0 = \sigma$ $(t, x(t)) \bar{\in} \bar{G}$ *для* $\sigma - \delta < t < \sigma$. Положим

$$\Phi_1 \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - ct^{s+1}| = Mt^{s+1}\gamma(t)\},$$

$$D_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - ct^{s+1}| < Mt^{s+1}\gamma(t)\},$$

$$H = \{(t, x) : t = \rho, \ |x - c\rho^{s+1}| < M\rho^{s+1}\gamma(\rho)\}.$$

Можно считать, что $\bar{D}_3 \setminus \{(0, 0\} \subset D_2$. Пусть вспомогательная функция $\mathcal{A}_1 : D_2 \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\mathcal{A}_1(t, x) = (x - ct^{s+1})^2 (t^{s+1}\gamma(t))^{-2}$$

и $a_1 : D_2 \to \mathbb{R}$ — производная этой функции в силу уравнения (8). Нетрудно убедиться в том, что $a_1(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$. Докажем, что все точки Φ_1 — точки строгого выхода для D_3 по отношению к (8). Действительно, пусть $J_p : (t, x_p(t))$ — интегральная кривая (8), проходящая через любую точку $P(t_0, x_0) \in \Phi_1$. Тогда

$$\mathcal{A}_1(t_0, x_P(t_0)) = M^2, \ \ a_1(t_0, x_P(t_0)) < 0.$$

Следовательно, если $0 < t_0 < \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\operatorname{sign}(\mathcal{A}_1(t, x_P(t)) - \mathcal{A}_1(t_0, x_P(t_0))) = -\operatorname{sign}(t - t_0), \ |t - t_0| < \delta,$$

тем самым

$$\operatorname{sign}(|x_P(t) - ct^{s+1}|(t^{s+1}\gamma(t))^{-1} - M) = -\operatorname{sign}(t - t_0), \ \ |t - t_0| < \delta.$$

Значит, $(t, x_P(t)) \bar{\in} \bar{D}_3$ при $t_0 - \delta < t < t_0$ и $(t, x_P(t)) \in D_3$ при $t_0 < t < t_0 + \delta$. Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\mathcal{A}_1(t, x_P(t)) > \mathcal{A}_1(\rho, x_P(\rho)), \ \ \rho - \delta < t < \rho,$$

или же

$$|x_P(t) - ct^{s+1}|(t^{s+1}\gamma(t))^{-1} > M, \ \rho - \delta < t < \rho.$$

Это означает, что $(t, x_P(t)) \bar{\in} \bar{D}_3$ при $\rho - \delta < t < \rho$.

Из доказанного утверждения следует, что хотя бы одна из интегральных кривых уравнения (8), пересекающих H, определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в D_3 при $t \in (0, \rho]$.

В самом деле, любая из интегральных кривых (8), пересекающих Φ_1, при возрастании t от $t = 0$ к $t = \rho$ не может иметь других общих точек с Φ_1 и потому при $t = \rho$ пересекает $\bar{H}$. Определим отображение $\psi : \Phi_1 \to \bar{H}$, ставя в соответствие каждой точке $P \in \Phi_1$ точку $\psi(P) \in \bar{H}$, принадлежащую той же интегральной кривой (8), что и P. Пусть $\psi(\Phi_1)$ — множество образов точек Φ_1 при отображении ψ. Множество $\bar{H} \setminus \psi(\Phi_1)$ непусто. Пусть $I_0 : (t, x_u(t))$ — такая интегральная кривая (8), что $(\rho, x_u \times (\rho)) \in \bar{H} \setminus \psi(\Phi_1)$. Она не может иметь общих точек с Φ_1. Значит, I_0 лежит в D_3 при $t \in (0, \rho]$, что и требовалось доказать. Следовательно, x_u при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенству (5) (где следует взять $x = x_u$). При $t \in (0, \rho]$ функция x_u обращает (8) в тождество, из которого нетрудно получить, что x_u' при $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет неравенству (6) (где следует взять $x' = x_u'$). Доопределим x_u, x_u' при $t = 0$ по непрерывности, полагая $x_u(0) = x_u'(0) = 0$. Тогда функция $x_u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ принадлежит U.

Докажем теперь, что $J_0 : (t, x(t))$ — единственная интегральная кривая (8), лежащая в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$. Пусть сначала $b \neq 0$. Рассматривается однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_u(t)| = \nu t^{\lambda+1}\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0; 0{,}5\mu]$, $\lambda = 0{,}5(1 - \operatorname{sign}(n-2))$. Пусть

$$D_4(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_u(t)| < \nu t^{\lambda+1}\}.$$

По предположению, ρ столь мало, что

$$\bar{D}_3 \setminus \{(0, 0)\} \subset D_4(0{,}5\mu), \ \overline{D_4(0{,}5\mu)} \setminus \{(0, 0)\} \subset D_2.$$

Пусть вспомагательная функция $\mathcal{A}_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\mathcal{A}_2(t, x) = (x - x_u(t))^2 t^{-2(\lambda+1)}$$

и $a_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ — производная функции $\mathcal{A}_2$ в силу уравнения (8). Нетрудно убедиться в том, что $a_2(t, x) < 0$ при $(t, x) \in D_2$, $x \neq x_u(t)$. В частности, $a_2(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_2(\nu)$ для любого $\nu \in (0; 0{,}5\mu]$. Поэтому для любого $\nu \in (0; 0{,}5\mu]$ все точки $\Phi_2(\nu)$ — точки строгого выхода для $D_4(\nu)$ по отношению к (8). Это доказывается тем же путем, что и доказанное выше аналогичное утверждение относительно Φ_1. Рассмотрим любую точку $P(t_0, x_0) \in \bar{D}_3 \setminus \{(0, 0)\}$, удовлетворяющую условию $x_0 \neq x_u(t_0)$. Существует $\nu_0 \in (0; 0{,}5\mu]$ такое, что $P \in \Phi_2(\nu_0)$. Интегральная кривая I_P: $(t, x_0(t))$ уравнения (8), проходящая через точку P, лежит вне $D_4(\nu_0)$ при всех допустимых $t < t_0$. С другой стороны, существует $t_1 \in (0, \rho)$ такое, что все точки $(t, x) \in \bar{D}_3$, удовлетворяющие условию $t \in (0, t_1)$, принадлежат множеству $D_4(\nu_0)$. Пусть $t_p = \min\{t_0, t_1\}$. На основании изложенного выше J_p лежит вне $\overline{D_3}$ при $t \in (0, t)$. Таким образом, при $t \to +0$ множеству $\bar{D}_3 \setminus \{(0, 0)\}$ не принадлежат все интегральные кривые (8), кроме интегральной кривой $J_0 : (t, x_u(t))$, что и требовалось доказать. Пусть теперь $b = 0$. Тогда если $J_1 : (t, x_1(t))$ — любая интегральная кривая (8), удовлетворяющая условию $(t, x_1(t)) \in D_3$ при $t \in (0, \rho]$, то $x_u'(t) = x_1'(t)$, $t \in (0, \rho]$, откуда $x_1(t) = x_u(t) + C$ при $t \in (0, \rho]$, где C — постоянная. Так как

$$\lim_{t \to +0} x_1(t) = \lim_{t \to +0} x_u(t) = 0,$$

то, очевидно, $C = 0$, т. е., $x_1(t) = x_u(t)$, $t \in (0, \rho]$, что и требовалось доказать.

Определим оператор $T : U \to U$, положив $(Tu)(t) = x_u(t)$. Докажем, что T — оператор сжатия. Рассмотрим любые фиксированные функции $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Обозначим $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть $\|u_1 - u_2\| = h$, $h > 0$. Рассмотрим уравнения

$$x' = (s+1)ct^s + \frac{t^{-(n-1)s}}{n(s+1)^{n-1}c^{n-1}}(b(x - ct^{s+1}) + Q(t, u_i(t), u_i'(t))), \ i \in \{1, 2\}, \tag{9$_i$}$$

где Q — функция, определенная равенством (7). Положим

$$\Phi_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_2(t)| = \omega h \varphi(t)\},$$
$$D_5 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_2(t)| < \omega h \varphi(t)\},$$

где $\varphi : (0, \tau] \to \mathbb{R}$ — функция, которая определяется так:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, \text{ если } b = 0, \text{ или } b \neq 0, \ n \geqslant 3, \\ t\beta(t), \text{ если } b \neq 0, \ n = 2, \ \beta_1 > 0, \\ t^{r-1}, \text{ если } b \neq 0, \ n = 2, \ \beta_1 = 0, \end{cases}$$

а постоянная ω выбирается следующим образом:

1) если $b = 0$, то $\omega = 1$;

2) если $b \neq 0$, $n \geqslant 3$, то $\dfrac{L}{(n-2)|b|} < \omega < n - 1 - \dfrac{L}{|b|}$;

3) если $b \neq 0$, $n = 2$, $\beta_1 > 0$, то $\omega > \dfrac{L + 4M/\beta_1}{|b|\beta_2}$;

4) если $b \neq 0$, $n = 2$, $\beta_1 = 0$, то $\omega > \dfrac{4M + 1}{(r-2)|b|}$.

По предположению ρ столь мало, что $\overline{D}_5 \setminus \{(0, 0)\} \subset D_2$. Пусть вспомогательная функция $\mathcal{A}_3 : D_2 \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\mathcal{A}_3(t, x) = (x - x_2(t))^2 (\varphi(t))^{-2}$$

и $a_3 : D_2 \to \mathbb{R}$ — производная функции $\mathcal{A}_3$ в силу уравнения $(9)_1$. Легко видеть, что $a_3(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_3$. Отсюда следует, что все точки Φ_3 — точки строгого выхода для D_5 по отношению к $(9)_1$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно Φ_1, доказанное выше. Так как $x_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant 2Mt^{s+1}\gamma(t) < \omega h \varphi(t)$$

при $t \in (0, t(h)]$, где $t(h)$ достаточно мало, $t(h) \in (0, \rho]$. Следовательно, интегральная кривая $l : (t, x_1(t))$ уравнения $(9)_1$ лежит в D_5 при $t \in (0, t(h)]$. На основании сказанного выше при возрастании t от $t = t(h)$ к $t = \rho$ интегральная кривая l не может иметь общих точек с Φ_3 и потому остается в D_5 при $t \in (0, \rho]$. Это означает, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| < \omega h \varphi(t), \quad t \in (0, \rho]. \tag{10}$$

При $t \in (0, \rho]$ ρ-решения x_i обращают соответствующие уравнения $(9)_i$ в тождества, из которых ввиду (10) следует

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| < (c_0 + \xi(t))h, \quad t \in (0, \rho], \tag{11}$$

где $\xi : (0, \rho] \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t \to +0} \xi(t) = 0$, а постоянная c_0 определяется следующим образом:

$$c_0 = \begin{cases} \dfrac{L}{n}\left(\dfrac{n + r}{n}|c|\right)^{1-n}, & \text{если } b = 0, \\ \dfrac{|b|\omega + L}{(n-1)|b|}, & \text{если } b \neq 0,\ n \geqslant 3, \\ 0, & \text{если } b \neq 0,\ n = 2. \end{cases}$$

Из (10), (11) имеем ввиду достаточной малости ρ

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \theta h, \quad t \in [0, \rho],$$

где $\theta = \dfrac{1}{2}(c_0 + 1)$; очевидно, $0 < \theta < 1$. Отсюда следует $\|x_1 - x_2\| \leqslant \theta h$, т. е. $\|Tu_1 - Tu_2\| \leqslant \theta \|u_1 - u_2\|$, $0 < \theta < 1$.

Приведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Итак, T — оператор сжатия, что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства теорем 1, 2 остается применить к оператору $T : U \to U$ принцип Банаха сжатых отображений.

Вопросы существования решений дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, рассмотрены, например, в [2; 3; с. 95; 4, с. 54; 5—7]. О разрешимости задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений и о поведении решений вблизи начальной точки см. [1, с. 11, 19, 52, 246; 3, с. 114, 168, 403; 4, с. 17, 128; 6, с. 5] и др. Применение теорем о неподвижной точке изучено, например, в [1, с. 475; 8, с. 371].

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
2. *Вітюк О. Н.* Про двосторонні наближення до розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, нерозв'язних відносно похідних // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1965.— № 3.— С. 284—287.
3. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск : Наука и техника, 1972.— 664 с.
4. *Курс* обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.— Киев : Вища шк., 1974.— 472 с.
5. *Зернов А. Е.* О решении одной системы сингулярных дифференциальных уравнений, частично разрешенной относительно производных // Мат. заметки.— 1978.— **24**, № 3.— С. 349—357.
6. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.— 352 с.
7. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика.— 1971.— № 9.— С. 79—84.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 496 с.

Получено 30.01.90