УДК 519.21

И. К. МАЦАК, канд. физ.-мат. наук (Киев ун-т)

Одна асимптотическая оценка для сумм независимых случайных величин в банаховом пространстве

Устанавливается ряд оценок для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин в банаховом пространстве. В одномерном случае неравенства такого типа восходят к известным неравенствам Нагаева и Фука.

Установлено ряд оцінок для імовірностей великих відхилень сум незалежних випадкових величин у банаховому просторі. В одновимірному випадку нерівності такого типу беруть свій початок від відомих нерівностей Нагаєва і Фука.

Известны трудности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин (н. с. в.) в бесконечномерном пространстве гауссовским распределением. В этом случае представляет интерес поиск простых асимптотических оценок. В настоящей статье реализован один из возможных подходов к этой задаче в банаховом пространстве. Полученные неравенства близки результатам работ [1—5].

Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $\|\cdot\|$ — норма в X, $(\xi_i)_1^\infty$ — последовательность н. с. в. со значениями в X, $S_n = \sum\limits_1^n \xi_i$. Полагаем

$$\|\xi\|_p = (M\|\xi\|^p)^{1/p}, \text{ с. в. } \xi \in X, \quad d_{i,p} = \|\xi_i\|_p, \quad d_{i,2} = \sigma_i,$$

$$B_n^2 = \sum_1^n \sigma_i^2, \quad L_n(p) = B_n^{-p} \sum_{i=1}^n d_{i,p}^p,$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2)\, dy.$$

Теорема. *Пусть $x > 0$, $\delta > 0$, $1 < p \leqslant 2$. Тогда*

$$P(\|S_n\| - M\|S_n\| \geqslant xB_n) \leqslant 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\delta}}\right)\right) + K_pL_n(2p)/\delta^p. \quad (1)$$

Если $L_n(2p) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} P(\|S_n\| - M\|S_n\| \geqslant xB_n) \leqslant 1 - \Phi(x). \quad (2)$$

Если $p > 2$, то

$$P(\|S_n\| - M\|S_n\| \geqslant xB_n) \leqslant 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\delta}}\right)\right) + $$
$$+ K_p[L_n(2p)/\delta^p + (L_n(4)/\delta^2)^{p-1}], \quad (3)$$

K_p — абсолютная константа.

Следствие. *Пусть $x > 0$, $\delta > 0$, $(\xi_i)_1^\infty$ — одинаково распределенные н. с. в., $d_{i,2p} = d_{2p} < \infty$, $\sigma_i = \sigma < \infty$. Тогда при $1 < p \leqslant 2$*

$$P(\|S_n\| - M\|S_n\| > x\sigma\sqrt{n}) \leqslant 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\delta}}\right)\right) + K_p(d_{2p}^2/\delta\sigma^2)^p/n^{p-1},$$

при $p > 2$

$$P(\|S_n\| - M\|S_n\| > x\sigma\sqrt{n}) \leqslant 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\delta}}\right)\right) + $$
$$+ K_p[(d_{2p}^2/\delta\sigma^2)^p + (d_4^4/\delta^2\sigma^4)^{p-1}]/n^{p-1}.$$

Доказательство теоремы основывается на методе вложения Скорохода [6] и во многом близко доказательству основной теоремы работы [5].

Пусть $F_i = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)$ — σ-алгебра, натянутая на с. в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$, F_0 — тривиальная σ-алгебра, $\zeta_i = M_i \| S_n \| - M_{i-1} \| S_n \|$, $i = \overline{1, n}$, где $M_i \eta = M(\eta / F_i)$. Следуя [3], представим с. в. $\| S_n \| - M \| S_n \|$ в виде

$$\| S_n \| - M \| S_n \| = \sum_1^n \zeta_i, \tag{4}$$

$(\zeta_i)_1^n$ — мартингал-разностная последовательность. Известно [3, 4], что почти наверное (п. н.)

$$|\zeta_i| \leqslant \| \xi_i \| + M \| \xi_i \|, \tag{5}$$

$$M_{i-1} \zeta_i^2 \leqslant M \| \xi_i \|^2. \tag{6}$$

Пусть $\left(\sum_{i=1}^m \zeta_i \right)_{m=1}^n = \left(W \left(\sum_{i=1}^m \tau_i \right) \right)_{m=1}^n$ — вложение Скорохода мартингал-разностной последовательности $(\zeta_i)_1^n$ в процесс броуновского движения $W(t)$, и п. н. выполнены соотношения

$$M(\tau_i / G_{i-1}) = M(\zeta_i^2 / F_{i-1}), \tag{7}$$

$$M(\tau_i^s / G_{i-1}) \leqslant C_s M(\zeta_i^{2s} / F_{i-1}), \tag{8}$$

где G_i — σ-алгебра, порожденная величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ и $W(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant \sum_{k=1}^i \tau_k$ [6, 7]. Тогда при $x > 0$, $\delta > 0$

$$P(\| S_n \| - M \| S_n \| \geqslant x B_n) = P\left(W\left(\sum_{i=1}^n \tau_i \right) \geqslant x B_n \right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \sum_1^n \tau_i} W(t) \geqslant x B_n \right) \leqslant P_1 + P_2, \tag{9}$$

где

$$P_1 = P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant \sum_1^n \tau_i} W(t) \geqslant x B_n, \quad \sum_{i=1}^n (\tau_i - M_{i-1} \zeta_i^2) \leqslant \delta B_n^2 \right),$$

$$P_2 = P\left(\sum_{i=1}^n (\tau_i - M_{i-1} \zeta_i^2) > \delta B_n^2 \right).$$

Оценим величину P_1, использовав неравенство (6) и известные свойства броуновского движения;

$$P_1 \leqslant P\left(\sup_{t \in A_n} W(t) \geqslant x B_n \right) \leqslant P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant (1+\delta) B_n^2} W(t) \geqslant x B_n \right) =$$

$$= P\left(| W((1+\delta) B_n^2) | \geqslant x B_n \right) = 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\delta}} \right) \right), \tag{10}$$

$$A_n = \left\{ t \geqslant 0 : t \leqslant \sum_{i=1}^n M_{i-1} \zeta_i^2 + \delta B_n^2 \right\}.$$

В дальнейшем будут применяться следующие неравенства для мартингал-разностной последовательности $(z_i)_1^n$:

$$M \left| \sum_{i=1}^n z_i \right|^s \leqslant 2 \sum_{i=1}^n M |z_i|^s, \quad 1 \leqslant s \leqslant 2, \tag{11}$$

(см. [8]),

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} z_i > x\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(z_i > \frac{x}{s-1}\right) + \left[e(s-1)x^{-2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right]^{s-1}, \tag{12}$$

$$M(z_i^2/z_{i-1}, \ldots, z_1) \leqslant d_i^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad s > 1,$$

(см. [1, 4]).

Из равенства (7) следует, что $(\tau_i - M_{i-1}\zeta_i^2)_1^n$ — мартингал-разностная последовательность относительно потока σ-алгебр $(G_i)_1^n$. Поэтому при оценке величины P_2 можно воспользоваться неравенствами (11), (12).

Пусть $1 < \rho \leqslant 2$. Последовательно применяем оценки (11), (5), (8), получаем

$$P_2 \leqslant M\left|\sum_{i=1}^{n}(\tau_i - M_{i-1}\zeta_i^2)\right|^p/(\delta B_n^2)^p \leqslant 2(\delta B_n^2)^{-p}\sum_{i=1}^{n} M(\tau_i - M_{i-1}\zeta_i^2|^p \leqslant$$

$$\leqslant 2(\delta B_n^2)^{-p}\sum_{i=1}^{n}(M\tau_i^p + \sigma_i^{2p}) \leqslant 2(\delta B_n^2)^{-p}\sum_{i=1}^{n}(C_pM\zeta_i^{2p} + \sigma_i^{2p}) \leqslant$$

$$\leqslant 2(1 + C_p2^{2p})(\delta B_n^2)^{-p}\sum_{i=1}^{n} d_{i,2p}^{2p}. \tag{13}$$

Из неравенств $M((\tau_i - M_{i-1}\zeta_i^2)^2/G_{i-1}) \leqslant M(\tau_i^2/G_{i-1})$, (12), (6), (8) при $p >$ > 2 имеем

$$P_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(\tau_i - M_{i-1}\xi_i^2 > \delta B_n^2/(p-1)) + \Big[e(p-1)\,\delta^{-2}B_n^{-4}\sum_{i=1}^{n}|M((\tau_i -$$

$$- M_{i-1}\zeta_i^2)^2/G_{i-1})|\,\infty\Big]^{p-1} \leqslant ((p-1)\,\delta^{-1}B_n^{-2})^p\sum_{i=1}^{n} M\tau_i^p +$$

$$+\Big[e(p-1)\,\delta^{-2}B_n^{-4}\sum_{i=1}^{n}|M(\tau_i^2/G_{i-1})|_\infty\Big]^{p-1} \leqslant C_p((p-1)\,\delta^{-1}B_n^{-2})^p\sum_{i=1}^{n} M\zeta_i^{2p} +$$

$$+\Big[C_2e(p-1)\,\delta^{-2}B_n^{-4}\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}\zeta_i^4|_\infty\Big]^{p-1} \leqslant C_p(4(p-1)\,\delta^{-1}B_n^{-2})^p\sum_{i=1}^{n} d_{i,2p}^{2p} +$$

$$+\Big[C_2e(p-1)\,2^4\delta^{-2}B_n^{-4}\sum_{i=1}^{n} d_{i,4}^4\Big]^{p-1}, \tag{14}$$

$$|\eta(\omega)|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}|\eta(\omega)|.$$

Полагая $K_p = 2(1 + C_p2^{2p})$ при $1 < p \leqslant 2$ и $K_p = \max[C_p2^{2p}(p -$ $-1)^p, (C_22^4e(p-1))^{p-1}]$ при $p > 2$ из (9), (10), (13) получаем оценку (1), а из (9), (10), (14) — оценку (3).

Доказательство неравенства (2) не вытекает непосредственно из (1) (см. [5], неравенство (23)).

З а м е ч а н и я. 1. Для величины $P(|\|S_n\| - M\|S_n\|| \geqslant xB_n)$ имеют место оценки, аналогичные (1) — (3). При этом константы перед величинами $1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\delta}}\right)$, $1 - \Phi(x)$ в правой части неравенств (1) — (3) следует умножить на 2.

2. В банаховых пространствах типа 2 или котипа 2 величину $M\|S_n\|$ можно эффективно оценить. Так, если $(\xi_i)_1^\infty$ одинаково распределены, $M\xi_1 = 0$, то

$$M\|S_n\| \leqslant C(X)(M\|\xi_1\|^2 n)^{1/2} \text{ при } X \text{ типа } 2,$$

$$M\|S_n\| \leqslant C(X)(M\|\Gamma(\xi_1)\|^2 n)^{1/2} \text{ при } X \text{ котипа } 2,$$

где $\Gamma(\xi_1)$ — центрированная гауссовская с. в. в X, имеющая одинаковый корреляционный оператор с ξ_1.

3. Левую часть в неравенствах (1)—(3) при $X = R^1$ можно заменить на $P(S_n \geqslant xB_n)$.

4. Представляет интерес нахождение точных значений констант K_p в (1), (3) (в оценке (1) $K_2 \leqslant 40/3$, а при $X = R^1$ $K_2 \leqslant 5/3$).

1. *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.— 1971.— **16**, № 4.— С. 660—675.
2. *Эбралидзе Ш. С.* Неравенства для вероятностей больших уклонений в многомерном случае // Там же.— С. 755—759.
3. *Юринский В. В.* Показательные оценки для больших уклонений // Там же.— 1974.— **19**, № 1.— С. 152—153.
4. *Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.* Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Там же.— 1985.— **30**, № 1.— С. 127—131.
5. *Мацак И. К.* Вероятностные оценки больших уклонений сумм независимых случайных величин и мартингалов // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1990.— **42**, № 1.— С. 88—95.
6. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1961.— 216 с.
7. *Stassen V.* Almost sure behaviour of sums of independent random variables and martingales // Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probability.— Berkeley: Univ. Calif. Press., 1967.— V. 2.— P. 315—343.
8. *Bahr B., Essen C. G.* Inequalities for the r-th absolute moment of a sum of random variablees, $1 \leqslant r \leqslant 2$ // Ann. Math. Statist.— 1965.— **36**, N 1.— P. 299—303.

Получено 20.02.89