УДК 517.988.8

Н. Ю. БАКАЕВ, канд. физ.-мат. наук (Москва)

Оценки устойчивости метода Рунге — Кутты для дифференциальных уравнений с переменным оператором

Исследованы вопросы устойчивости разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения со сменным оператором в банаховом пространстве и построенных по методу Рунге — Кутты.

Досліджені питання стійкості різницевих схем, апроксимуючих диференціальні рівняння зі змінним оператором у банаховому просторі і побудованих по методу Рунге — Кути.

1. Данная статья посвящена вопросам исследования устойчивости разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с переменным оператором в банаховом пространстве и построенных в рамках метода Рунге — Кутты. Аналогичный класс разностных схем, аппроксимирующих уравнения с постоянным оператором, изучен в [1]. Ранее схемы метода Рунге — Кутты для уравнения с переменным оператором, но лишь в случае гильбертова пространства, рассматривались в [2]. В работе [3] исследовались с позиций устойчивости и коэрцитивной устойчивости разностные схемы для уравнения с переменным оператором в банаховом случае, но построенные на основе другого подхода — метода усечения точных разностных схем.

2. В семействе банаховых пространств E_h (параметризованных при помощи некоторой скалярной или векторной величины h) рассмотрим задачу Коши (с параметром h)

$$\frac{dy}{dt} + A_h(t)\,y = F_h(t), \quad 0 < t \leqslant T, \qquad y(t=0) = y_{0h}, \tag{1}$$

где $y = y(t)$ — функция со значениями в E_h, являющаяся решением задачи, $A_h(t)$ — некоторый линейный ограниченный при любых фиксированных h и $t \in [0, T]$ в пространстве E_h оператор, $F_h(t)$ — заданная функция от $t \in [0, T]$ со значениями в E_h, определяющая неоднородность в уравнении, $y_{0h} \in E_h$ — начальное данное задачи. Задаче (1) поставим в соответствие разностную схему в семействе пространств E_h:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) - \tau \sum_{j=1}^{\nu} b_j\,[A_h(t_k + c_j\tau)\,Y_j - F_h(t_k + c_j\tau)], \qquad k = 0, 1, \ldots, T/\tau - 1, \qquad y(t_0) = \mathcal{R}_{\tau h} y_{0h}, \tag{2}$$

где $Y_j \in E_h$ определяются из системы уравнений

$$Y_j = y(t_k) - \tau \sum_{l=1}^{\nu} a_{jl}\,[A_h(t_k + c_l\tau)\,Y_l - F_h(t_k + c_l\tau)], \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{3}$$

причем $t_k = k\tau \in [0, T]$ — дискретный аргумент (τ — шаг дискретизации),

$y(t_k)$ — функция дискретного аргумента t_k со значениями в E_h, являющаяся решением разностной задачи, оператор $A_h(t)$ и функция $F_h(t)$ введены выше, $\mathcal{R}_{\tau h}$ — некоторый линейный ограниченный в E_h (для любого фиксированного допустимого набора (τ, h)) оператор, интерпретируемый в дальнейшем как оператор сглаживания по начальным данным, ν — целочисленный параметр схемы, b_j, c_j, a_{jl}, $j, l = 1, 2, \ldots, \nu$ — фиксированные комплекснозначные коэффициенты, задающие конкретный вид схемы. Таким образом, конструкция схемы (2), (3) строится на основе применения к задаче (1) метода Рунге — Кутты [4, 5].

Если разностная схема (2), (3), рассматриваемая как система уравнений для определения $y(t_{k+1})$, корректно разрешима относительно $y(t_{k+1})$ (исходными данными этой системы уравнений являются $y(t_k)$ и $F_h(t_k + c_j\tau)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$), то ее можно представить в каноническом виде

$$y(t_{k+1}) = [I - \tau\hat{\mathcal{A}}_{\tau h}(t_k)]\, y(t_k) + \tau \sum_{j=1}^{\nu} \Omega_{\tau h j}(t_k)\, F_h(t_k + c_j\tau),$$
$$k = 0, 1, \ldots, T/\tau - 1, \tag{4}$$
$$y(t_0) = \mathcal{R}_{\tau h} y_{0h},$$

где $\hat{\mathcal{A}}_{\tau h}(t_k)$ и $\Omega_{\tau h j}(t_k)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ — некоторые линейные ограниченные в E_h (для любого фиксированного допустимого набора (τ, h, t_k)) операторы.

Для случая рассматриваемой в данной статье (более общей, чем в [1]) постановки задачи практически без изменений переносятся введенные в [1] понятия символа генератора схемы $\alpha(z)$, корректирующих символов схемы $\omega_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, а также разностных схем типов $RK(\varphi)$ и $RK^*(\varphi)$. Приведем в более общей формулировке лишь определение равномерно сильно полупозитивного оператора.

Определение. *Пусть заданы семейство банаховых пространств E_h и для каждого h линейный ограниченный оператор $B_h(t): E_h \to E_h$, зависящий от $t \in [0, T]$. Будем называть оператор $B_h(t)$ равномерно (по $t \in [0, T]$ и h) сильно полупозитивным с углом $\varphi \in (0, \pi/2)$, если*

$$\| R(\lambda, B_h(t)) \|_{E_h} \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda : |\arg \lambda| \geqslant \varphi, \ |\lambda| \geqslant \delta_0,$$

где константы C_0 и δ_0 не зависят от t и h.

3. Рассмотрим вначале схемы типа $RK(\varphi)$.

Лемма 1. *Пусть линейный ограниченный в E_h оператор $A_h(t)$, $t \in [0, T]$, в (2) является равномерно (по h и $t \in [0, T]$) сильно полупозитивным с углом $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ и удовлетворяет условию гладкости по t в форме*

$$|(\psi, [A_h^l(t) - A_h^l(s)]\, u)_h| \leqslant C_1 \| \{[A_h(s) + \mu_0 I]^*\}^{l-1} \psi \|_{E_h^*} \times$$
$$\times \{|t - s|^{\theta} \| [A_h(t) + \mu_0 I]\, u \|_{E_h} + \| [A_h(t) + \mu_0 I]\, u \|_{E_h}^{\theta_1} \| u \|_{E_h}^{1-\theta_1}\}, \tag{5}$$
$$l = 1, 2, \ldots, \{1 - \deg[\alpha(z)]\}, \ \forall h, \ \forall u \in E_h, \ \forall \psi \in E_h^*, \ \forall t, s \in [0, T],$$

с некоторыми неотрицательными константами C_1, μ_0, $\theta \in (0, 1]$, $\theta_1 \in [0, 1)$, не зависящими от h, t, s, u, ψ (здесь символом «» указан переход к сопряженному оператору и сопряженному пространству, $(\psi, u)_h$ обозначает значение функционала $\psi \in E_h^*$ на элементе $u \in E_h$ и $\deg[\rho(z)] = \overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}} \dfrac{\ln|\rho(z)|}{\ln|z|}$ для любой комплекснозначной мероморфной функции $\rho(z)$). Пусть также схема (2), (3) принадлежит типу $RK(\varphi_0)$. Тогда при достаточно малом фиксированном $\tau_0 > 0$ для любых $\tau \in (0, \tau_0]$, $t \in [0, T]$ и h операторы $\alpha(\tau A_h(t))$ и $\omega_j(\tau A_h(t))$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, определены и являются линейными равномерно по τ, t и h ограниченными в E_h операторами. Более того,* *выполняется соотношение*

$$\|[\hat{\mathcal{A}}_0(t)-\hat{\mathcal{A}}_0(s)]\,u\|_{E_h}\leqslant C_2\{|t-s|^{\theta}\,\|[\hat{\mathcal{A}}_0(t)+\bar{\mu}I]\,u\|_{E_h}+$$

$$+\|[\hat{\mathcal{A}}_0(t)+\bar{\mu}I]\,u\|^{\theta}_{E_h}\,\|u\|^{1-\theta}_{E_h}\},\ \forall h,\ \ \forall u\in E_h,\ \ \forall t,s\in[0,T],\ \forall\tau\in(0,\tau_0],$$

с некоторыми неотрицательными константами C_2 *и* $\bar{\mu}$, *не зависящими от* h, τ, u, t, s, *где* $\hat{\mathcal{A}}_0(t)=\tau^{-1}\alpha(\tau A_h(t))$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того,*

$$\deg[g_{jl}(z)]\leqslant 0,\quad \deg\Big[\sum_{k=1}^{\nu}g_{jk}(z)\Big]\leqslant\deg[\alpha(z)]-1,\quad j,l=1,2,\ldots,\nu,$$

где $g_{jl}(z)$ — *элементы матрицы, обратной к матрице* $((|\delta_{jl}+za_{jl}|))$, δ_{jl} — *символ Кронекера и* $\mathcal{R}_{\tau h}=I$. *Тогда схема* (2), (3) *представима в каноническом виде* (4) (*с* $\mathcal{R}_{\tau h}=I$) *и для нее справедлива оценка устойчивости*

$$\|[\hat{\mathcal{A}}_{\tau h}(t_k)+\bar{\mu}I]^{\xi}y(t_k)\|_{E_h}+\|[\hat{\mathcal{A}}_0(t_k)+\bar{\mu}I]^{\xi}y(t_k)\|_{E_h}\leqslant$$

$$\leqslant C_3(\xi)[(k+1)\tau]^{-\xi}\|y_{0h}\|_{E_h}+C_4(\xi)\,\tau\sum_{l=1}^{k}[(k-l+1)\tau]^{-\xi}\times$$

$$\times\max_{j=1,2,\ldots,\nu}\|F_h(t_{l-1}+c_j\tau)\|_{E_h},\quad k=1,2,\ldots,T/\tau,\tag{6}$$

$$\forall\tau\in(0,\tau_0],\quad\forall h,\quad\forall\xi\in[0,1)$$

с некоторыми неотрицательными константами $C_3(\xi)$, $C_4(\xi)$, $\bar{\mu}$, *не зависящими от* t_k, τ, h ($C_3(\xi)$, $C_4(\xi)$ *может зависеть от* ξ).

Доказательство опирается на результаты теории работы [6] и некоторые оценки теории возмущений разностных схем [7] с учетом результата леммы 1.

4. Обратимся теперь к изучению разностных схем типа $RK^*(\varphi)$.

Лемма 2. *Пусть линейный ограниченный в* E_h *оператор* $A_h(t)$, $t\in[0,T]$, *в* (2) *является равномерно* (*по* h *и* $t\in[0,T]$) *сильно полупозитивным с углом* $\varphi_0\in(0,\pi/2)$ *и удовлетворяет условию гладкости по* t *вида* (5). *Пусть также схема* (2), (3) *принадлежит типу* $RK^*(\varphi_0)$ *и* $\deg[\zeta-\alpha(z)]=-1$, *где* $\zeta=\lim\limits_{|z|\to\infty}\alpha(z)$. *Тогда при достаточно малом фиксированном* $\tau_0>0$ *для любых* $\tau\in(0,\tau_0]$, $t\in[0,T]$, *и* h *операторы* $\alpha(\tau A_h(t))$ *и* $\omega_j(\tau A_h(t))$, $j=1,2,\ldots,\nu$, *определены и являются линейными равномерно по* τ, t *и* h *ограниченными в* E_h *операторами. Более того, справедливо соотношение*

$$\|[I-\zeta^{-1}\alpha(\tau A_h(q))]^{-1}\,[\hat{\mathcal{A}}_0(t)-\hat{\mathcal{A}}_0(s)]\,u\|_{E_h}\leqslant C_5\{|t-s|^{\theta}\times$$

$$\times\|[\hat{\mathcal{A}}_0(t)+\bar{\mu}I]\,u\|_{E_h}+\|[\hat{\mathcal{A}}_0(t)+\bar{\mu}I]\,u\|^{\theta}_{E_h}\,\|u\|^{1-\theta}_{E_h}\},$$

$$\forall h,\ \forall u\in E_h,\ \forall t,s,q\in[0,T],\ \forall\tau\in(0,\tau_0],$$

с некоторыми неотрицательными константами C_5 *и* $\bar{\mu}$, *не зависящими от* h, τ, u, t, s, q (*оператор* $\hat{\mathcal{A}}_0(t)$ *определен выше*).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2 и*

$$\deg[g_{jl}(z)]\leqslant 0,\quad\deg\Big[\sum_{k=1}^{\nu}g_{jk}(z)\Big]\leqslant-1,\ \ j,l=1,2,\ldots,\nu$$

(*функции* $g_{jl}(z)$, $j,l=1,2,\ldots,\nu$, *введены выше*) *Кроме того, предположим, что символы* $\omega_j(z)$, $j=1,2,\ldots,\nu$, *допускают представления*

$$\omega_j(z)=[1-\zeta^{-1}\alpha(z)]\,\bar{\omega}_j(z),\ \ j=1,2,\ldots,\nu,$$

где $\bar{\omega}_j(z)$, $j=1,2,\ldots,\nu$, — *рациональные функции такие, что* $\deg[\bar{\omega}_j(z)]\leqslant$

$\leqslant 0$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, *и полюсы этих функций расположены вне замкнутого сектора* $\{z; |\arg z| \leqslant \varphi_0\}$. *Тогда если в схеме* (2), (3) *принять*

$$\mathcal{R}_{1h} = I - \bar{\zeta}^{-1}\alpha(\tau A_h(t_0)),$$

то схема (2), (3) *представима в каноническом виде* (4) *и для нее справедлива оценка устойчивости вида* (6).

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству теоремы 1, но при этом учитываются результаты работы [8] об устойчивости разностных схем с операторами сглаживания.

5. Полученные в рамках данной статьи утверждения позволяют строить оценки устойчивости в нормах банаховых пространств L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (разностных аналогов пространств Лебега) в широком классе разностных схем, аппроксимирующих первую или третью начально-краевую задачи для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольной области. Для этих целей следует использовать резольвентные оценки разностных операторов в L_{ph}, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ [9, 10].

1. *Бакаев Н. Ю.* Об устойчивости метода Рунге — Кутты для абстрактных линейных уравнений // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 5.— С. 689—694.
2. *Karakashian O.* On Runge-Kutta methods for parabolic problems with time-dependent coefficients // Math. Comput. — 1986.— **47**, N 175.— P. 77—101.
3. *Аширалієв А., Соболевський П. Є.* Різниці схеми високого порядку точності для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1988.— № 6. — С. 3—7.
4. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1978.— 461 с.
5. *Современные* численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. — М. : Мир, 1979.— 252 с.
6. *Бакаев Н. Ю.* Теория устойчивости разностных схем в произвольных нормах // Докл. АН СССР. — 1987.— **297**, № 2.— С. 275—279.
7. *Бакаев Н. Ю.* Теория устойчивости аддитивных разностных схем в банаховых нормах.— М., 1988.— 32 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 6044-В88.
8. *Бакаев Н. Ю.* Устойчивость разностных схем для параболических уравнений в произвольных нормах. Часть 2 // ВАНТ. Сер. методики и программы числ. решений задач мат. физики.— 1987.— Вып. 2. — С. 29—34.
9. *Алибеков Х. А., Соболевский П. Е.* Об устойчивости и сходимости разностных схем высокого порядка аппроксимации для параболических уравнений.— М., 1976.— 51 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 3645-76.
10. *Бакаев Н. Ю.* Об устойчивости весовых разностных схем // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 9.— С. 1251—1258.

Получено 22.05.90