УДК 517.983:517.968

А. А. ПОГОРУЙ, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Предельно-некорректные уравнения в гильбертовом пространстве

Для интегральных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, исследовано поведение решения предельно-некорректной задачи на фиксированных компактах.

Для інтегральних операторів, що діють в гільбертовому просторі, досліджена поведінка рішення гранично-некоректної задачі на фіксованих компактах.

При исследовании вопроса времени достижения «удаляющейся» границы или области фазового пространства марковским процессом [1—2] часто появляются уравнения, которые названы в [3] предельно-некорректными. Там же описан метод исследования этих уравнений и произведен анализ предельно-некорректных уравнений для пространств, в которых рассматриваемые операторы допускают матричное представление. Ниже рассмотрены предельно-некорректные уравнения в общей постановке.

Рассмотрим на пространстве $L_2[0, \infty)$ ограниченный приводимо-обратимый оператор A_0 [3] вида

$$A_0 g = g(x) - \int_0^\infty k(x, y) g(y)\, dy.$$

Пусть $N(A_0)$ — ядро оператора и $\dim N(A_0) = r \geqslant 1$. Обозначим через $f_i(x)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, r}$, базисы соответственно в пространствах $N(A_0)$ и $N(A_0^*)$. Так как оператор A_0 приводимо-обратимый, то, не умаляя общности, можем считать, что

$$\int_0^\infty f_i(x) \varphi_j(x)\, dx = \delta_{ij}, \ i, j = \overline{1, r}.$$

Введем оператор

$$\Pi_T = \begin{cases} f(x), & x \in [0, T], \\ 0, \ x > T, & f(x) \in L_2[0, \infty). \end{cases}$$

Пусть $A_T = \Pi_T A_0 \Pi_T$, $\hat{A}_T$ — сужение оператора A_T на $L_2[0, T]$ и $\exists T_1 > 0$ такое, что для $\forall T \in (T_1, \infty)$ существует в пространстве $L_2[0, T]$ единственное решение уравнения

$$\hat{A}_T g(x) = h_T(x), \tag{1}$$

где $h_T(x) = h(x)$, $x \in [0, T]$.

Для этого, например, достаточно потребовать, чтобы для $\forall T$, $T \in (T_1, \infty)$, $\| k(x, y) \|_{L_2[0, T]} < 1$, хотя это условие и не является необходимым.

Рассмотрим $h(x) \in L_2[0, \infty)$, для которой $\exists\, i \in \{1, \ldots, r\}$ такое, что $(\varphi_i, h) \neq 0$. Тогда уравнение $A_0 g = h$ неразрешимо.

Используя метод, изложенный в [1—3], исследуем поведение решения уравнения (1) при $T \to \infty$.

Зафиксируем некоторое положительное $T_0 < T$. Тогда $L_2[0, \infty) = L_2[0, T_0[\oplus L_2(T_0, T] \oplus L_2(T, \infty)$.

Введем операторы

$$A_{00}: L_2[0, T_0] \to L_2[0, T_0],$$

$$A_{00} g = g(x) - \int_0^{T_0} k(x, y) g(y)\, dy, \quad x \in [0, T_0],$$

$$A_{01}: L_2(T_0, T] \to L_2[0, T_0],$$

$$A_{01} g = - \int_{T_0}^{T} k(x, y) g(y)\, dy, \quad x \in [0, T_0],$$

$$A_{10}: L_2[0, T_0] \to L_2(T_0 T],$$

$$A_{10} g = - \int_0^{T_0} k(x, y) g(y)\, dy, \quad x \in (T_0, T],$$

$$A_{11}: L_2(T_0, T] \to L_2(T_0, T].$$

$$A_{11} g = g(x) - \int_{T_0}^{T} k(x, y) g(y)\, dy, \quad x \in (T_0, T].$$

Полагаем $g_T^0(x) = g(x)$, $x \in [0, T_0]$, $h_T^0(x) = h(x)$, $x \in [0, T_0]$; $g_T^1(x) = g(x)$, $h_T^1(x) = h(x)$, $x \in (T_0, T]$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_T^0 \\ g_T^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_T^0 \\ h_T^1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что оператор A_{11} обратим для $\forall T \in (T_0, \infty)$, тогда из (2) имеем уравнение

$$(A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10})\, g_T^0 = z_T^0, \tag{3}$$

где $z_T^0 = h_T^0 - A_{01}A_{11}^{-1}h_T^1$.

Для исследования (3) рассмотрим функции

$$a_{0T}^{(i)}(x) = -\int_T^\infty k(x, y) f_i(y)\, dy, \quad x \in [0, T_0], \ i = \overline{1, r},$$

$$a_{1T}^{(i)}(x) = -\int_T^\infty k(x, y) f_i(y)\, dy, \ x \in (T_0, T], \quad i = \overline{1, r},$$

$$a_{T0}^{(i)}(y) = -\int_T^\infty k(x, y)\, \varphi_i(x)\, dx, \quad y \in [0, T_0], \quad i = \overline{1, r},$$

$$a_{T1}^{(i)}(y) = -\int_T^\infty k(x, y)\, \varphi_i(x)\, dx, \quad y \in (T_0, T], \quad i = \overline{1, r},$$

и величины

$$a_T^{(i,j)} = \int_T^\infty \varphi_i(x) f_j(x)\, dx - \int_T^\infty\int_T^\infty k(x, y)\, \varphi_i(x) f_j(y)\, dxdy.$$

Введем вектор-функции

$$a_{0T} = \{a_{0T}^{(i)}(x), \quad i = \overline{1, r}\}, \quad a_{1T} = \{a_{1T}^{(i)}(x), \quad i = \overline{1, r}\},$$

$$a_{T1} = \{a_{T1}^{(i)}(y), \ i = \overline{1, r}\}, \quad a_{T0} = \{a_{T0}^{(i)}(y), \ i = \overline{1, r}\}$$

и матрицу

$$a_T = \{a_T^{(i,j)}, \ i, j = \overline{1, r}\}.$$

Пусть g_i, $i = \overline{1, r}$, — решение уравнения $A_{11}g_i = a_{1T}^{(i)}$. Рассмотрим матрицу $a_T - a_{T1}A_{11}^{-1}a_{1T} = \{a_T^{(i,j)} - a_{T1}^{(i)} g_j, \ i, j = \overline{1, r}\}$,
где

$$a_{T1}^{(i)} g_j = \int_T^\infty \int_0^T k(x, y)\, g_j(y)\, \varphi_i(x)\, dxdy.$$

Предположим, что для $\forall T > 0$ существует $(a_T - a_{T1}A_{11}^{-1}a_{1T})^{-1}$, и рассмотрим оператор на $L_2[0, T_0]$

$$\mathfrak{U}_{00}^T = A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10} - (a_{0T} - A_{01}A_{11}^{-1}a_{1T}) \times$$
$$\times (a_T - a_{T1}A_{11}^{-1}a_{1T})^{-1} (a_{T0} - a_{T1}A_{11}^{-1}A_{10}).$$

При доказательстве того, что $f_i^0(x) = f_i(x)$, $x \in [0, T_0]$, $i = \overline{1, r}$, принадлежат пространству $N(\mathfrak{U}_{00}^T)$, будет показано, как действует оператор $\mathfrak{U}_{00}^T$.

Обозначим через $f_i^1(x) = f(x)$, $x \in (T_0, T]$. Так как $A_0 f_i = 0$, $i = \overline{1, r}$, то

$$A_{10}f_i^0 + A_{11}f_i^1 + a_{1T}^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, r}, \tag{4}$$

откуда следует

$$(A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10})\, f_i^0 = A_{00}f_i^0 + A_{01}f_i^1 + A_{01}A_{11}a_{1T}^{(i)}. \tag{5}$$

С учетом (4) имеем

$$(a_{T0} - a_{T1}A_{11}^{-1}A_{10})\, f_i^0 = a_{T0}f_i^0 + a_{T1}f_i^1 + a_{T1}A_{11}^{-1}a_{1T}^{(i)}. \tag{6}$$

Так как $a_{T0}f_i^0 + a_{T1}f_i^1 + a_T^{(i)} = 0$, где $a_T^{(i)}$ — i-й столбец матрицы a_T, то

$$(a_{T0} - a_{T1}A_{11}^{-1}A_{10})\, f_i^0 = -(a_T - a_{T1}A_{11}^{-1}a_{1T})\, \mathbf{1}_i, \tag{7}$$

где $\mathbf{1}_i$ — вектор-столбец размерности r, у которого i-я компонента 1, а все остальные — нули.

Учитывая (4) — (7), имеем $\mathfrak{U}_{00}^T f_i^0 = 0$, $i = \overline{1, r}$. Аналогично проверяется, что $\mathfrak{U}_{00}^{T*} \varphi_i^0 = 0$, $i = \overline{1, r}$.

Прибавляя и вычитая в выражении в скобках (3) оператор $\mathfrak{U}_{00}^T$, получаем уравнение

$$(\mathfrak{U}_{00}^T - B_T)\, g_T^0 = z_T^0, \tag{8}$$

где

$$B_T = -(a_{0T} - A_{01}A_{11}^{-1}a_{1T})(a_T - a_{T1}A_{11}^{-1}a_{1T})^{-1}(a_{T0} - a_{T1}A_{11}^{-1}A_{10}). \tag{9}$$

Собственный проектор P_0 оператора $\mathfrak{U}_{00}$ имеет вид

$$P_0 = \sum_{k=1}^{r} c_k f_k^0 \otimes \varphi_k^0,$$

где $c_k = (\varphi_k^0, f_k^0)^{-1}$, откуда

$$P_0 B_T P_0 = \sum_{k,l=1}^{r} c_l \gamma_{kl}^T f_k^0 \otimes \varphi_l^0,$$

где $\gamma_{kl}^T = c_k\,(a_T^{(k,l)} - a_{T1}^{(k)} A_{11}^{-1} a_{1T}^{(l)})$, $k, l = \overline{1, r}$.

Известно, что операторы A_{01}, A_{11}, A_{10} зависят от T. В дальнейшем пусть выполняется условие

A_1) *существует* $\lim\limits_{T\to\infty} A_{01}A_{11}^{-1}A_{10} = \overline{A}_{01}\overline{A}_{11}^{-1}\overline{A}_{10}$, *где* $\overline{A}_{01}$, $\overline{A}_{11}$, $\overline{A}_{10}$ — *это* A_{01}, A_{11}, A_{10} *при* $T = \infty$.

Теорема 1. *Пусть кроме условия A_1 выполняются условия*

A_2) $\sup\limits_{T>T_0} \| A_{11}^{-1} \|_{L_2(T_0, T)} < \infty$;

A_3) *существуют* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *такие, что* $\varepsilon_{ij}(T) = \left(\int_T^\infty f_i^2(x)\, dx \times \int_T^\infty \varphi_j^2(x)\, dx\right)^{1/2} > 0$ *для* $\forall T > 0$;

A_4) *существует предел* $c_{kl}^{(i,j)} = \lim\limits_{T\to\infty} \varepsilon_{ij}^{-1}(T)\,\gamma_{kl}^T$, $k, l = \overline{1, r}$, *и матрица* $c^{(i,j)} = (c_{kl}^{(i,j)}, k, l = \overline{1, r})$ *имеет обратную* $(c^{(i,j)-1} = (c_{kl}^{(i,j)(-1)}, k, l = \overline{1, r})$. *Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} \varepsilon_{ij}(T) g_T^0(x) = \sum_{k,l=1}^{r} c_l c_{kl}^{(i,j)(-1)} (\varphi_l, h)\, f_k^0(x), \quad x \in [0, T_0].$$

Доказательство. Из условий A_2, A_4 следует

$$\sup_{T>T_0} \varepsilon_{ij}^{-1}(T) \| B_T \| = S_1^{(i,j)} < \infty \tag{10}$$

и, значит, $\| B_T \| \to 0$ при $T \to \infty$. Используя этот факт и условие A_1, имеем $\mathfrak{U}_{00}^T \to \mathfrak{U}_{00} = A_{00} - \overline{A}_{01}\overline{A}_{11}^{-1}\overline{A}_{10}$ при $T \to \infty$.

Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{U}_{00} f_i^0 = 0$, $\mathfrak{U}_{00}^* \varphi_i^0 = 0$, $i = \overline{1, r}$, причем f_i^0 и φ_i^0, $i = \overline{1, r}$, образуют базисы в $N(\mathfrak{U}_{00})$ и $N(\mathfrak{U}_{00}^*)$ соответственно, т. е. ρ_0 является собственным проектором оператора $\mathfrak{U}_{00}$: отсюда следует существование $R = (\mathfrak{U}_{00} + P_0)^{-1}$. Так как для $\forall T \in (T_0, \infty)$ существует $R^T = (\mathfrak{U}_{00}^T + P_0)^{-1}$, то, учитывая известный результат из функционального анализа [4], заключаем, что $\exists\, T_1 > T_0$:

$$\sup_{T>T_1} \| R^T \| < \infty, \tag{11}$$

откуда

$$\sup_{T>T_1} \| R_0^T \| < \infty, \tag{12}$$

где $R_0^T = (\mathfrak{U}_{00}^T + P_0)^{-1} - P_0$.

Пусть $\widetilde{B}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{-1}(T) B_T$, $\Pi_{\widetilde{B}_{ij}}$ — обобщенный обратный оператор к оператору $P_0 \widetilde{B}_{ij} P_0$ [3],

$$T_H^{(i,j)} = (I - \Pi_{\widetilde{B}_{ij}} \widetilde{B}_{ij}) R_0^T (I - \widetilde{B}_{ij} \Pi_{\widetilde{B}_{ij}}).$$

Покажем, что

$$\sup_{T>T_1} \| T_H^{(i,j)} \| = S_2^{(i,j)} < \infty. \tag{13}$$

С учетом (12), (13) для этого достаточно показать, что $\sup\limits_{T>T_1} \| \Pi_{\widetilde{B}_{ij}} \| < \infty$, но это следует из условия A_1. Значит, $\exists T_2 > T_1$: для $\forall T > T_2$, $\varepsilon_{ij}(T) < (S_1^{(i,j)} S_2^{(i,j)})^{-1}$. Применяя лемму 3.1 [3], $T > T_2$ можем записать

$$(\mathfrak{U}_{00}^T - \varepsilon_{ij}(T) \widetilde{B}_{ij}) = - \varepsilon_{ij}^{-1}(T) \Pi_{\widetilde{B}_{ij}} + T_H (I - \varepsilon_{ij}(T) B_{ij} T_H)^{-1}.$$

Отсюда с учетом (12), (13) имеем

$$(\mathfrak{U}_{00}^T - \varepsilon_{ij}(T) \widetilde{B}_{ij})^{-1} = - \varepsilon_{ij}^{-1}(T) \Pi_{\widetilde{B}_{ij}} + o(\varepsilon_{ij}^{-1}(T)). \tag{14}$$

Учитывая (14), из (8) получаем

$$g_T^0(x) = \sum c_l \gamma_{kl}^{(-1),T} (\varphi_l^0, z_T^0) f_k^0(x) + o(\varepsilon_{ij}^{-1}(T)), \quad x \in [0, T_0]. \tag{15}$$

Так как $A_{01}^* \varphi_l^0 = - A_{11}^* \varphi_l^1 - a_T^{(l)}$, $l = \overline{1, r}$, то

$$(\varphi_l^0, z_T^0) = (\varphi_l^0, h_T^0) + (\varphi_l^1, h_T^1) + a_T^{(l)} \Lambda_{11}^{-1} h_T^1.$$

Из условия A_2 и того, что $a_T^{(l)} \to 0$, $l = \overline{1, r}$, при $T \to \infty$ имеем

$$\lim_{T\to\infty} (\varphi_l^0, z_T^0) = (\varphi, h). \tag{16}$$

Умножая обе части (15) на $\varepsilon_{ij}(T)$ и переходя к пределу при $T \to \infty$, с учетом A_1 и (16) получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим некоторое обобщение приведенного выше результата. Пусть $A_{T,\alpha} g = A_T g - \alpha H_T g$, где $A_T = \Pi_T A_0 \Pi_T$, $T > 0$, A_0 — ограниченный приводимо-обратимый оператор на $L_2[0, \infty)$: $A_0 g = g(x) - \int\limits_0^\infty k(x, y) g(y) \times \times dy$, $\dim N(A_0) = r \geqslant 1$, f_i φ_i, $i = \overline{1, r}$, — базисы в $N(A_0)$, $N(A_0^*)$ соответственно и $(f_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, r}$, $h = L_2[0, \infty)$, $H_T = \Pi_T H_0 \Pi_T$, $T > 0$, где H_0 — ограниченный оператор на $L_2[0, \infty)$, $H_0 g = g(x) - \int\limits_0^\infty h(x, y) g(y)\, dy$, α — малый параметр, $\exists\, i \in \{1, \ldots, r\}$:$(\varphi_i, h) \neq 0$.

Пусть $\hat{A}_{T,\alpha}$ — сужение оператора $A_{T,\alpha}$ на $L_2[0, T]$. Предположим, что существует T_1 такое, что для $\forall T \in (T_1, \infty)$ уравнение

$$\hat{A}_{T,\alpha} g = h_T, \quad h_T(x) = h(x), \quad x \in [0, T] \tag{17}$$

имеет единственное решение в $L_2[0, T]$.

Аналогично переходу от (1) к (3) перейдем от (17) к (18)

$$(A_{00}^{(\alpha)} - A_{01}^{(\alpha)} A_{11}^{(\alpha)-1} A_{10}^{(\alpha)})\, g_T^0 = \tilde{z}_T^0, \tag{18}$$

где $\tilde{z}_T^0 = h_T^0 - A_{10}^{(\alpha)} A_{11}^{(\alpha)-1} h_T^1$, $A_{ij}^{(\alpha)} = A_{ij} - \alpha H_{ij}$, $i, j = \overline{0, 1}$.

Прибавим и вычтем в выражении в скобках (18) оператор $A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10}$, полученный из A_0; имеем

$$(A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10} - L_{T,\alpha}) = \tilde{z}_T^0, \tag{19}$$

где $L_{T,\alpha} = A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10} - (A_{00}^{(\alpha)} - A_{01}^{(\alpha)}A_{11}^{(\alpha)-1}A_{10}^{(\alpha)})$. Пусть $\mathfrak{U}_{00}^T$, B_T, γ_{kl}^T, $k, l = \overline{1, r}$, так же, как и раньше (см. (9)), определяются из оператора A_0.

Прибавляя и вычитая в выражении в скобках (19) оператор $\mathfrak{U}_{00}^T$, получаем

$$(\mathfrak{U}_{00}^T - (B_T + L_{T,\alpha}))\, g_T^0 = \tilde{z}_T^0. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $A_1 - A_3$ теоремы 1 и условие A_4'; $T \to \infty$, $\alpha \to 0$ таким образом, что существуют пределы*

$$l_{ij} = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \alpha\to 0}} \varepsilon_{ij}^{-1}(T)\,\alpha, \quad c_{kl}^{(i,j)} = \lim_{T\to\infty} \varepsilon_{ij}^{-1}(T)\,\gamma_{kl}^T, \quad k, l = \overline{1, r},$$

и матрица $\tilde{C}^{(i,j)} = (\tilde{c}_{kl}^{(i,j)} + l_{ij}(\varphi_k, H_0 f_l),\ k, l = \overline{1, r})$ имеет обратную $\tilde{C}^{(i,j)-1} = (\tilde{c}_{kl}^{(i,j)(-1)},\ k, l = \overline{1, r})$. Тогда

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ \alpha\to 0}} \varepsilon_{ij}(T)\, g_T^0(x) = \sum_{k,l=1}^{r} c_l \tilde{c}_{kl}^{(i,j)(-1)} (\varphi_k, h)\, f_l^0(x), \quad x \in [0, T_0].$$

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0 \\ T\to\infty}} \alpha^{-1} (\varphi_k^0, L_{T,\alpha} f_l^0) = (\varphi_k, H_0 f_l), \quad k, l = \overline{1, r}. \tag{21}$$

Действительно,

$$(\varphi_k^0, L_{T,\alpha} f_l^0) = (\varphi_k^0, (A_{00} - A_{00}^{(\alpha)}) f_l^0) + (\varphi_k^0, (A_{01}^{(\alpha)} - A_{01}) A_{11}^{(\alpha)-1} A_{10} f_l^0) +$$
$$+ (\varphi_k^0, A_{01} A_{11}^{(\alpha)-1} (A_{10}^{(\alpha)} - A_{10}) f_l^0) + (\varphi_k^0, A_{01} (A_{11}^{(\alpha)-1} - A_{11}^{-1}) A_{10} f_l^0).$$

Учитывая ограниченность оператора H_0 и условие A_2, имеем

$$A_{11}^{(\alpha)-1} - A_{11}^{-1} = (A_{11} - \alpha H_{11})^{-1} - A_{11}^{-1} = \alpha A_{11}^{-1} H_{11} A_{11}^{-1} + o(\alpha).$$

Отсюда получаем

$$(\varphi_k^0, L_{T,\alpha} f_l^0) = \alpha\, [(\varphi_k^0, H_{00} f_l^0) - (\varphi_k^0, H_{01} A_{11}^{-1} A_{10} f_l^0 - (\varphi_k^0, A_{01} A_{11}^{-1} H_{10} f_l^0) +$$
$$+ (\varphi_k^0, A_{01} A_{11}^{-1} H_{11} A_{11}^{-1} A_{10} f_l^0)] + o(\alpha). \tag{22}$$

Из (22) с учетом условия A_2 и того, что $f_l \in N(A_0)$, $\varphi_l \in N(A_0^*)$, $l = \overline{1, r}$, следует (21).

Продолжение доказательства теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Пример. Пусть

$$A_0 g = g(x) - \int_0^\infty e^{-(x+y)/2}\, g(y)\, dy,$$

$$H_0 g = \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)-1}\, d(y)\, dy.$$

Положим $\alpha = e^{-T}$. Нетрудно проверить, что $\exists T_1 > 0$: уравнение

$$g(x) - \int_0^T e^{-(x+y)/2} g(y)\, dy - e^{-T} \int_0^T e^{-(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)-4} g(y)\, dy = h_T \quad (23)$$

имеет единственное решение для $\forall T \in (T_1, \infty)$, $h(x) \in L_2[0, \infty)$. Непосредственно можно убедиться, что $f(x) = e^{-x/2} \in N(A_0)$, и $\dim N(A_0) = 1$. Так как A_0 самосопряжен, то $\varphi(x) = e^{-x/2} \in N(A_0^*)$.

Чтобы применить теорему 2, вычислим

$$(\varphi, H_0 f) = e^{-4} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \frac{\pi}{4e^4},$$

$$\varepsilon(T) = \int_T^\infty f^2(x)\, dx = \int_T^\infty e^{-x} dx = e^{-T},$$

$$c = \lim_{T\to\infty} \varepsilon^{-1}(T)\, \gamma_{11}^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{1 - e^{-T_0}} \left(1 - \frac{e^{-T}}{1 - e^{-T_0} + e^{-T}}\right) = \frac{1}{1 - e^{-T_0}}.$$

Отсюда, применяя теорему 2, получаем, что решение уравнения (23), рассматриваемое на отрезке $[0, T_0]$ — $g_T^0(x)$ при $T \to \infty$ ведет себя следующим образом:

$$\lim_{T\to\infty} e^{-T} g_T^0(x) = \frac{4e^{-x/2+4}}{(4e^4 + \pi)} \int_0^\infty e^{-y/2} h(y)\, dy, \quad h(y) \in L_2[0, \infty), \quad x \in [0, T_0].$$

1. *Королюк В. С., Томусяк А. А., Турбин А. Ф.* Время пребывания полумарковского процесса в расширяющемся множестве состояний // Аналитические методы в теории вероятностей.— Киев : Наук. думка, 1979.— С. 69–80.
2. *Боровков А. А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения.— 1967.— 12, вып. 4.— С. 635—654.
3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев: Наук. думка, 1978.— 218 с.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1967.— 624 с.

Получено 26.07.89