УДК 517.925.46

**І. Є. Вітриченко,** канд. фіз.-мат. наук (Одес. ун-т)

# ПРО КОЛИВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Sufficient conditions are obtained for the initial values of the nontrivial oscillating (for $t = \omega$) solutions of the nonautonomous quasilinear equation

$$y'' \pm \lambda(t) y = F(t, y, y'),$$

where $t \in \Delta = [a, \omega[,\ -\infty < a < \omega \le +\infty,\ \lambda(t) > 0,\ \lambda(t) \in C_{\Delta}^{(1)},\ |F(t, x, y)| \le L(t)(|x| + |y|)^{1+\alpha}$, $L(t) \ge 0,\ \alpha \in [0, +\infty[,\ F: \Delta \times R^2 \to R,\ F \in C_{\Delta \times R^2}$, $R$ is the set of real numbers, and $R^2$ is the two-dimensional real Euclidean space.

Одержано достатні умови для початкових значень коливних за умови $t = \omega$ нетривіальних розв'язків неавтономного квазілінійного рівняння вигляду

$$y'' \pm \lambda(t) y = F(t, y, y'),$$

$t \in \Delta = [a, \omega[,\ -\infty < a < \omega \le +\infty,\ \lambda(t) > 0,\ \lambda(t) \in C_{\Delta}^{(1)},\ |F(t, x, y)| \le L(t)(|x| + |y|)^{1+\alpha}$, $L(t) \ge 0,\ \alpha \in [0, +\infty[,\ F: \Delta \times R^2 \to R,\ F \in C_{\Delta \times R^2};\ R,\ R^2$ — відповідно множина дійсних чисел і двовимірний евклідів дійсний простір.

Досліджується коливання за умови $t = \omega$ нетривіальних розв'язків диференціального рівняння (д. р.) вигляду

$$y'' \pm \lambda(t) y = F(t, y, y'), \tag{1}$$

де $t \in \Delta = [a, \omega[,\ -\infty < a < \omega \le +\infty,\ \lambda : \Delta \to ]0, +\infty[,\ \lambda \in C_{\Delta}^{(1)},\ F : \Delta \times R^2 \to R$, $F \in C_{\Delta \times R^2}$, $R$, $R^2$ — відповідно множина дійсних чисел і двовимірний евклідів дійсний простір,

$$|F(t, x, y)| \le L(t)(|x| + |y|)^{1+\alpha}, \quad L: \Delta \to [0, +\infty[, \quad \alpha \in [0, +\infty[.$$

**Означення.** *Розв'язок* $y = y(t)$ *д. р.* (1), *що задовольняє початкові умови* $y(T) = y_0$, $y'(T) = y_0'$, $T \in \Delta$, $y_0^2 + (y_0')^2 > 0$, *називається коливним за умови* $t = \omega$, *якщо існує послідовність* $\{t_n\}$, $t_n \in [T, \omega[$, *така, що* $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \omega$, $y(t_n) = 0$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

*У протилежному випадку розв'язок* $y = y(t)$ *називається неколивним за умови* $t = \omega$.

У даній статті на функцію $F$ не накладаються знакові обмеження на відміну від досліджень коливання розв'язків д. р. (1) в [1, 2].

**Лема 1.** *Перетворення*

$$\begin{cases} y = 2\lambda^{1/2} \rho \sin\theta, \\ y' = 2\lambda\rho\cos\theta, \end{cases} \tag{2}$$

$\rho$, $\theta$ — *полярні координати, зводить д. р.* (1) *з* $+\lambda$ *до диференціальної системи* (*д. с.*) *вигляду*

$$\begin{cases} \rho' = -\dfrac{1}{2} \lambda' \lambda^{-1} (1 + \cos^2\theta) \rho + F_1, \\ \theta' = \lambda^{1/2} + \dfrac{1}{4} \lambda' \lambda^{-1} \sin 2\theta + F_2, \end{cases} \tag{3}$$

*де*

$$F_1(t, \theta, \rho) \equiv \frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\theta\, F(t, 2\lambda^{1/2}\rho\sin\theta, 2\lambda\rho\cos\theta),$$

$$F_2(t, \theta, \rho) \equiv -\frac{1}{2}\lambda^{-1}\rho^{-1}\sin\theta\, F(t, 2\lambda^{1/2}\rho\sin\theta, 2\lambda\rho\cos\theta),$$

*причому*

$$|F_1| \le 2^\alpha\lambda^\alpha(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\rho^{1+\alpha}, \tag{4}$$

$$|F_2| \le 2^\alpha\lambda^\alpha(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\rho^{\alpha}. \tag{5}$$

***Доведення.*** Диференціюючи по $t$ обернене до (2) перетворення

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{2}\lambda^{-1}\left[\lambda y^2 + (y')^2\right]^{1/2}, \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\left[\lambda^{1/2}y(y')^{-1}\right], \end{cases} \tag{6}$$

враховуючи співвідношення

$$y'' = -\lambda y + F \equiv 2\lambda^{3/2}\rho\sin\theta + F(t, 2\lambda^{1/2}\rho\sin\theta, 2\lambda\rho\cos\theta),$$

оцінку для $F$, маємо д. с. (3).

**Теорема 1.** *Якщо*

$$\int^{\omega}\lambda^{1/2}dt = +\infty, \quad \left(\int_a^t\lambda^{1/2}d\tau\right)^{-1}\int_a^t\lambda^{-1}|d\lambda| = \Lambda_0 + o(1), \quad t\uparrow\omega, \quad 0\le\Lambda_0<4,$$

*виконується одна із умов:*

1) $\alpha = 0$,

$$\left(\int_a^t\lambda^{1/2}d\tau\right)^{-1}\int_a^t(1+\lambda^{-1/2})L\,d\tau = o(1), \quad t\uparrow\omega, \quad y_0^2 + (y_0')^2 > 0;$$

2) $\alpha > 0$, $\lambda' \le 0$ *або* $\lambda'$ *змінює знак,*

$$\int^{\omega}\lambda^\alpha(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\exp\left(\alpha\int_a^t\lambda^{-1}|d\lambda|\right)dt < +\infty,$$

$$0 < \lambda(T)\,y_0^2 + (y_0')^2 <$$

$$< \lambda^2(T)\left[\alpha\int_T^{\omega}\lambda^\alpha(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\exp\left(\alpha\int_T^t\lambda^{-1}|d\lambda|\right)dt\right]^{-2/\alpha}, \quad T\in\Delta;$$

3) $\alpha > 0$, $\lambda' > 0$,

$$\int^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}L\,dt < +\infty,$$

$$0 < y_0^2 + \lambda^{-1}(T)(y_0')^2 < \left[\alpha\int_T^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,dt\right]^{-2/\alpha}, \quad T\in\Delta;$$

***то будь-який розв'язок** $y = y(t)$ **д. р.** (1) **з** $+\lambda$**, що задовольняє початкові умови** $y(T) = y_0$, $y'(T) = y_0'$**, коливний за умови** $t = \omega$.*

***Доведення.*** Зауважимо, що в силу заміни (2) розв'язок $y = y(t)$ д. р. (1) коливний за умови $t = \omega$, якщо $\lim_{t \uparrow \omega} \theta(t) = +\infty$. Дослідимо поведінку функції $\theta = \theta(t)$ за умови $t \uparrow \omega$.

Для цього з другого д. р. д. с. (3) знайдемо

$$\theta(t) = \theta(T) + \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t \lambda' \lambda^{-1} \sin 2\theta \, d\tau + \right.$$

$$\left. + \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t F_2 d\tau \right] \geq$$

$$\geq \theta(T) + \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t \lambda^{-1} |d\lambda| - \right.$$

$$\left. - \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t |F_2| d\tau \right] =$$

$$= \theta(T) + \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \left[ 1 - \frac{\Lambda_0}{4} - \frac{1}{4} |o(1)| - \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t |F_2| d\tau \right]. \quad (7)$$

З (7) випливає $\lim_{t \uparrow \omega} \theta(t) = +\infty$, якщо $\int^{\omega} \lambda^{1/2} dt = +\infty$ і

$$\left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t |F_2| d\tau = o(1), \quad t \uparrow \omega. \quad (8)$$

Для доведення (8) використаємо оцінку (5) і нерівність

$$0 < \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \left| \int_T^t F_2 d\tau \right| \leq \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t |F_2| d\tau \leq$$

$$\leq 2^{\alpha} \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t \lambda^{\alpha} (1 + \lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \rho^{\alpha} d\tau.$$

Тоді (8) виконується за умови

$$\left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} A \equiv \left( \int_T^t \lambda^{1/2} d\tau \right)^{-1} \int_T^t \lambda^{\alpha} (1 + \lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \rho^{\alpha} d\tau = o(1), \quad t \uparrow \omega. \quad (9)$$

Якщо $\alpha = 0$, то (9) набирає вигляду умови 1 теореми 1. Якщо $\alpha > 0$, то (9) містить невідому величину $\rho^{\alpha}$. Для оцінки $\rho^{\alpha}$ зверху використаємо принцип С. О. Чаплигіна [3, с. 309].

Нехай $\lambda' \leq 0$ або $\lambda'$ змінює знак. З першого д. р. д. с. (3) та оцінки (4) маємо диференціальну нерівність (д. н.)

$$\rho' \leq |\lambda'| \lambda^{-1} \rho + 2^{\alpha} \lambda^{\alpha} (1 + \lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \rho^{1+\alpha}. \quad (10)$$

Виконуючи в (10) заміну $z = \rho^{-\alpha}$, одержуємо д. н.

$$z' \geq -\alpha |\lambda'| \lambda^{-1} z - 2^{\alpha} \alpha \lambda^{\alpha} (1 + \lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L. \quad (11)$$

Проінтегруємо диференціальну нерівність (11)

$$z(t) \geq \exp\left(-\alpha \int_T^t \lambda^{-1} |d\lambda|\right)\left[ z(T) - \right.$$

$$\left. - 2^{\alpha}\alpha \int_T^t \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right) d\tau \right]. \tag{12}$$

Підставимо в (12) $z(t) = \rho^{-\alpha}(t)$, $z(T) = \rho^{-\alpha}(T)$. В результаті маємо

$$\rho^{\alpha}(t) \leq \rho^{\alpha}(T) \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right)\left[ 1 - \right.$$

$$\left. - 2^{\alpha}\alpha\rho^{\alpha}(T) \int_T^t \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^{\tau} \lambda^{-1}|d\lambda|\right) d\tau \right]^{-1}. \tag{13}$$

Нерівність (13) вірна для всіх $t \in [T, \omega[$, якщо

$$2^{\alpha}\alpha\rho^{\alpha}(T) \int_T^t \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^{\tau} \lambda^{-1}|d\lambda|\right) d\tau \leq$$

$$\leq 2^{\alpha}\alpha\rho^{\alpha}(T) \int_T^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right) dt < 1.$$

А значить, $\rho(T)$ задовольняє нерівність

$$0 < \rho^2(T) < \frac{1}{4}\left[ \alpha \int_T^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right) dt \right]^{-2/\alpha}. \tag{14}$$

Оскільки із (6) випливає

$$\rho^2(T) = \frac{1}{4}\lambda^{-2}(T)[\lambda(T)\, y_0^2 + (y_0')^2],$$

то (14) вірна, якщо

$$\lambda(T)\, y_0^2 + (y_0')^2 <$$

$$< \lambda^2(T)\left[ \alpha \int_T^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right) dt \right]^{-2/\alpha}. \tag{15}$$

При виконанні (15) маємо для $\rho^{\alpha}(t)$ остаточну оцінку

$$\rho^{\alpha}(t) \leq \rho^{\alpha}(T) \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right)\left[ 1 - \right.$$

$$\left. - 2^{\alpha}\alpha\rho^{\alpha}(T) \int_T^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right) dt \right]^{-1}. \tag{16}$$

Оцінимо $A$, підставляючи (16) у вираз для $A$ із (9):

$$A \leq \left[ 1 - 2^{\alpha}\alpha\rho^{\alpha}(T) \int_T^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left(\alpha \int_T^t \lambda^{-1}|d\lambda|\right) dt \right]^{-1} \times$$

$$\times 2^{\alpha}\rho^{\alpha}(T)\int\limits_{T}^{\omega}\lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\exp\left(\alpha\int\limits_{T}^{t}\lambda^{-1}|d\lambda|\right)dt <$$

$$< \left[1 - 2^{\alpha}\alpha\rho^{\alpha}(T)\int\limits_{T}^{\omega}\lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\exp\left(\alpha\int\limits_{T}^{t}\lambda^{-1}|d\lambda|\right)dt\right]^{-1},$$

тобто $A$ — величина обмежена. Тому умова (9) виконується.

Нехай $\lambda' > 0$. Тоді для $\rho$ одержуємо д. н.

$$\rho' \le -\frac{1}{2}\lambda'\lambda^{-1}\rho + 2^{\alpha}\lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\rho^{1+\alpha}. \tag{17}$$

Інтегруючи (17), за допомогою заміни $z = \rho^{-\alpha}$ маємо

$$\rho^{\alpha}(t) \le \rho^{\alpha}(T)\lambda^{(1/2)\alpha}(T)\lambda^{(-1/2)\alpha}\Bigg[1 -$$

$$- 2^{\alpha}\alpha\lambda^{(1/2)\alpha}(T)\rho^{\alpha}(T)\int\limits_{T}^{t}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,d\tau\Bigg]^{-1}. \tag{18}$$

Нерівність (18) вірна для всіх $t \in [T, \omega[$, якщо

$$2^{\alpha}\alpha\lambda^{(1/2)\alpha}(T)\rho^{\alpha}(T)\int\limits_{T}^{t}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,d\tau \le$$

$$\le 2^{\alpha}\alpha\lambda^{(1/2)\alpha}(T)\rho^{\alpha}(T)\int\limits_{T}^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,dt < 1.$$

Звідси $\rho(T)$ задовольняє нерівність

$$0 < \rho^{2}(T) < \frac{1}{4}\lambda^{-1}(T)\left[\alpha\int\limits_{T}^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,dt\right]^{-2/\alpha}. \tag{19}$$

Але (19) виконується, якщо

$$0 < y_0^2 + \lambda^{-1}(T)(y_0')^2 < \left[\alpha\int\limits_{T}^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,dt\right]^{-2/\alpha}. \tag{20}$$

За умови виконання (20) маємо для $\rho^{\alpha}(t)$ остаточну оцінку

$$\rho^{\alpha}(t) \le \rho^{\alpha}(T)\lambda^{(1/2)\alpha}(T)\lambda^{(-1/2)\alpha}\Bigg[1 -$$

$$- 2^{\alpha}\alpha\lambda^{(1/2)\alpha}(T)\rho^{\alpha}(T)\int\limits_{T}^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,dt\Bigg]^{-1}. \tag{21}$$

Підставляємо (21) у вираз для $A$ із (9):

$$A \le \left[1 - 2^{\alpha}\alpha\lambda^{(1/2)\alpha}(T)\rho^{\alpha}(T)\int\limits_{T}^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\,dt\right]^{-1},$$

тобто $A$ — величина обмежена. Тому (9) вірна. Теорема доведена.

***Зауваження* 1.** За умови $L \equiv 0$ теорема 1 узгоджується з результатом А. Вімана [4].

**Теорема 2.** *Якщо*

$$\int^{\omega} \lambda^{1/2} dt < +\infty, \quad \lambda' \lambda^{-3/2} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\lambda^{\alpha-1/2}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left( \alpha \int_T^t \lambda^{-1} |d\lambda| \right) = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

*і виконується одна із умов*:

1) $\alpha = 0,\ y_0^2 + (y_0')^2 > 0$;

2) $\alpha > 0,\ \lambda' \le 0$ *або* $\lambda'$ *змінює знак*, .

$$\int^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left( \alpha \int_T^t \lambda^{-1} |d\lambda| \right) dt < +\infty,$$

$$0 < \lambda(T)\, y_0^2 + (y_0')^2 <$$

$$< \lambda^2(T) \left[ \alpha \int_T^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \exp\left( \alpha \int_T^t \lambda^{-1} |d\lambda| \right) dt \right]^{-2/\alpha}, \quad T \in \Delta;$$

3) $\alpha > 0,\ \lambda' > 0$,

$$\int^{\omega} \lambda^{\alpha/2} L\, dt < +\infty,$$

$$0 < y_0^2 + \lambda^{-1}(T)(y_0')^2 < \left[ \alpha \int_T^{\omega} \lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L\, dt \right]^{-2/\alpha}, \quad T \in \Delta,$$

*то будь-який розв'язок* $y = y(t)$ *д. р.* (1) *з* $+\lambda$, *що задовольняє початкові умови* $y(T) = y_0$, $y'(T) = y_0'$, *неколивний за умови* $t = \omega$.

***Доведення.*** Внаслідок заміни (2) розв'язок $y(t) \equiv 2\lambda^{1/2} \rho(t) \sin\theta(t)$ д. р. (1) є неколивним за умови $t = \omega$, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \theta(t)$.

З другого д. р. д. с. (3), інтегруючи по $t$, зобразимо функцію $\theta = \theta(t)$:

$$\theta(t) = \theta(T) + \int_T^t \lambda^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{4} \lambda' \lambda^{-3/2} \sin 2\theta + \lambda^{-1/2} F_2 \right) d\tau. \tag{22}$$

А значить, існує скінченна границя $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \theta(t)$, якщо

$$\int^{\omega} \lambda^{1/2} dt < +\infty, \quad \lambda' \lambda^{-3/2} \sin 2\theta = o(1), \quad \lambda^{-1/2} F_2 = o(1), \quad t \uparrow \omega. \tag{23}$$

Перші дві умови в (23) забезпечуються умовами теореми 2. Внаслідок нерівності $\lambda^{-1/2} |F_2| \le 2^{\alpha} \lambda^{\alpha-1/2} (1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \rho^{\alpha}$ третя умова в (23) виконується, якщо

$$\lambda^{\alpha-1/2}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha} L \rho^{\alpha} = o(1), \quad t \uparrow \omega. \tag{24}$$

В (24) міститься невідома величина $\rho^{\alpha}$ за умови $\alpha > 0$. Виконуючи оцінку величини $\rho^{\alpha}$ зверху, як в теоремі 1, і підставляючи її в (24), впевнюємось у вірності теореми 2. Теорема доведена.

**Лема 2.** *Перетворення* (2) *зводить д. р.* (1) *з* $-\lambda$ *до д. с. вигляду*

$$\begin{cases} \rho' = \lambda^{1/2}\left[\sin 2\theta - \dfrac{1}{2}\lambda'\lambda^{-3/2}(1+\cos^2\theta)\right]\rho + F_1, \\ (\operatorname{tg}\theta)' = \lambda^{1/2}\left[1 + \dfrac{1}{2}\lambda'\lambda^{-3/2}\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^2\theta + (1+\operatorname{tg}^2\theta)\lambda^{-1/2}F_2\right]. \end{cases} \tag{3'}$$

***Доведення.*** Диференціюючи по $t$ перетворення (6), враховуючи співвідношення $y'' = \lambda y + F$ і оцінку для $F$, маємо д. с. (3′).

**Теорема 3.** *Якщо* $\lambda'\lambda^{-3/2} = \lambda_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\lambda_0 \in R$, *і виконується одна з умов*:

1) $\alpha = 0$, $\lambda^{-1}(\lambda^{1/2}+1)L = o(1)$, $t\uparrow\omega$, $y_0^2 + (y_0')^2 > 0$;

2) $\alpha > 0$, $\lambda' \le 0$ *або* $\lambda'$ *змінює знак,*

$$\int^{\omega} \lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\exp\left[\alpha\int_a^t(\lambda^{1/2} + |\lambda'|\lambda^{-1})\,d\tau\right]dt < +\infty,$$

$$\lambda^{\alpha-1/2}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\exp\left[\alpha\int_a^t(\lambda^{1/2} + |\lambda'|\lambda^{-1})\,d\tau\right] = o(1), \quad t\uparrow\omega,$$

$$0 < \lambda(T)\,y_0^2 + (y_0')^2 < \lambda^2(T)\left\{\alpha\int_T^{\omega}\lambda^{\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L \times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[\alpha\int_T^t(\lambda^{1/2} + |\lambda'|\lambda^{-1})\,d\tau\right]dt\right\}^{-2/\alpha}, \quad T\in\Delta;$$

3) $\alpha > 0$, $\lambda' > 0$,

$$\int^{\omega}\lambda^{\alpha}L\exp\left(\alpha\int_a^t\lambda^{1/2}d\tau\right)dt < +\infty,$$

$$\lambda^{-1/2}L\exp\left(\alpha\int_a^t\lambda^{1/2}d\tau\right)dt = o(1), \quad t\uparrow\omega,$$

$$0 < y_0^2 + \lambda^{-1}(T)(y_0')^2 < \left\{\alpha\int_T^{\omega}\lambda^{(1/2)\alpha}(1+\lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[\alpha\int_T^t\lambda^{1/2}d\tau\right]dt\right\}^{-2/\alpha}, \quad T\in\Delta,$$

*то будь-який розв'язок* $y = y(t)$ *д. р.* (1) *з* $-\lambda$, *що задовольняє початкові умови* $y(T) = y_0$, $y'(T) = y_0'$, *неколивний за умови* $t = \omega$.

***Доведення.*** Зазначимо, що в силу першого співвідношення перетворення (6) $\rho = \rho(t) \ne 0$, а перше співвідношення перетворення (2) можна зобразити у вигляді

$$y = 2\lambda^{1/2}\rho\operatorname{tg}\theta(1+\operatorname{tg}^2\theta)^{-1/2}. \tag{2'}$$

З (2′) випливає, що $y = y(t)$ — неколивний розв'язок д. р. (1) з $-\lambda$, якщо $\operatorname{tg}\theta(t)$ перетворюватись в 0 на деякому напівінтервалі $[T_0, \omega[$, $T_0 \in \Delta$, не буде. Для цього зобразимо друге д. р. д. с. (3′) у вигляді

$$(\operatorname{tg}\theta)' = \lambda^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2}\lambda_0 \operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^2\theta + o(1)\operatorname{tg}\theta + \lambda^{-1/2}(1+\operatorname{tg}^2\theta)F_2\right].$$

Нехай $\varepsilon_0 \in\, ]0, a_0[$ або $\varepsilon_0 \in\, ]0, b_0[$, де

$$a_0 = \min\left\{ \frac{1}{4}\lambda_0 + \left(1 + \frac{1}{16}\lambda_0^2\right)^{1/2}, \left[\frac{1}{4}\lambda_0 + \left(1 + \frac{1}{16}\lambda_0^2\right)^{1/2}\right]^{-1} \right\},\ \lambda_0 \ge 0,$$

$$b_0 = \min\left\{ -\frac{1}{4}\lambda_0 + \left(1 + \frac{1}{16}\lambda_0^2\right)^{1/2}, \left[-\frac{1}{4}\lambda_0 + \left(1 + \frac{1}{16}\lambda_0^2\right)^{1/2}\right]^{-1} \right\},\ \lambda_0 < 0.$$

Тоді існує $T_0 \in \Delta$ таке, що у смузі $|\operatorname{tg}\theta| \le a_0 - \varepsilon_0$, $\lambda_0 \ge 0$ ($|\operatorname{tg}\theta| \le b_0 - \varepsilon_0$, $\lambda_0 < 0$) для всіх $t \in [T_0, \omega[$ $(\operatorname{tg}\theta)' > 0$ ($(\operatorname{tg}\theta)' < 0$), тобто функція $\operatorname{tg}\theta(t)$ монотонно зростає (монотонно спадає) за умови $\lambda^{-1/2}F_2 = o(1)$, $t \uparrow \omega$. Останнє граничне співвідношення виконується, якщо $\lambda^{\alpha-1/2}(1 + \lambda^{-1/2})^{1+\alpha}L\rho^\alpha = o(1)$, $t \uparrow \omega$. За умови $\alpha > 0$ невідома величина $\rho^\alpha$ оцінюється зверху як в теоремі 1. Теорема доведена.

Розглянемо випадок, коли $\omega = +\infty$

$$\lambda'\lambda^{-3/2} = \pm 4 + \beta,\quad t \to +\infty, \tag{25}$$

$\beta = o(1)$, $t \to +\infty$. У цьому випадку співвідношення (7) і (22) не виконуються. Інтегруючи (25), маємо

$$\lambda = \frac{1}{4}t^{-2}\left[1 \mp \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}(T)t^{-1} + Tt^{-1} \mp \frac{1}{4}t^{-1}\int_T^t \beta\, d\tau\right]^{-2},$$

тобто $\lambda = (1/4)t^{-2}(1+\gamma)$, $t \to +\infty$, $\gamma = o(1)$, $t \to +\infty$.

Щоб використати результати теорем 1, 2, виконаємо в (1) заміну

$$t = \exp\tau,\quad y = t^{1/2}z. \tag{26}$$

В результаті одержимо д. р. вигляду

$$z'' + \lambda_1 z = \Phi_1, \tag{27}$$

де

$$\lambda_1 \equiv \exp(2\tau)\left[\lambda(\exp\tau) - \frac{1}{4}\exp(-2\tau)\right],$$

$$|\Phi_1| \le \left(\frac{3}{2}\right)^{1+\alpha}\exp\left[\left(2 + \frac{1}{2}\alpha\right)\tau\right]L(\exp\tau)(|z| + |z'|)^{1+\alpha},$$

$\tau \in \Delta_1 = [\ln a, +\infty[$, $a \in\, ]0, +\infty[$.

З (26) виходить, що $y = y(t)$ — коливний (неколивний) розв'язок за умови $t = +\infty$, якщо таким є $z$.

Припускаючи $\lambda_1\colon \Delta_1 \to\, ]0, +\infty[$, застосовуємо до д. р. (27) результати теорем 1, 2. Тоді в позначеннях д. р. (1) вірні такі теореми.

**Теорема 4.** *Якщо* $\omega = +\infty$, $\lambda'\lambda^{-3/2} = \pm 4 + o(1)$, $t \to +\infty$, $4t^2\lambda > 1$,

$$\int^{+\infty} t^{-1}(4t^2\lambda - 1)^{1/2}\,dt = +\infty,$$

$$\left[\int_a^t \tau^{-1}(4\tau^2\lambda - 1)^{1/2} d\tau\right]^{-1} \int_a^t \tau^2 (4\tau^2\lambda - 1)^{-1} |d(4\lambda - \tau^2)| = \lambda_0^* + o(1),$$

$t \to +\infty$, $0 \le \lambda_0^* < 2$, *виконується одна з умов:*

1) $\alpha = 0$,

$$\left[\int_a^t \tau^{-1}(4\tau^2\lambda - 1) d\tau\right]^{-1} \int_a^t [1 + (4\tau^2\lambda - 1)^{-1/2}]\, \tau L\, d\tau = o(1), \quad t \to +\infty,$$

$$y_0^2 + (y_0')^2 > 0;$$

2) $\alpha > 0$, $2\lambda + t\lambda' \le 0$ *або* $2\lambda + t\lambda'$ *змінює знак,*

$$\int^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{-1/2 + (1/2)\alpha} t^{1 + (1/2)\alpha} L \times$$

$$\times \exp\left[\alpha \int_a^t \tau^2 (4\tau^2\lambda - 1)^{-1} |d(4\lambda - \tau^{-2})|\right] dt < +\infty,$$

$$0 < [4T^2\lambda(T) - 1]\, y_0^2 + (2y_0' - T^{-1}y_0)^2 <$$

$$< 4T[4T^2\lambda(T) - 1]^2 \left\{\alpha \int_T^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{\alpha} [1 + 2(4t^2\lambda - 1)^{-1/2}]^{1+\alpha} t^{1 + (1/2)\alpha} L \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[\alpha \int_T^t \tau^2 (4\tau^2\lambda - 1)^{-1} |d(4\lambda - \tau^{-2})|\right] dt\right\}^{-2/\alpha}, \quad T \in \Delta;$$

3) $\alpha > 0$, $2\lambda + t\lambda' > 0$,

$$\int^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{-1/2} t^{1 + (1/2)\alpha} L\, dt < +\infty,$$

$$0 < y_0^2 + [4T^2\lambda(T) - 1]^{-1} (2y_0' - T^{-1}y_0)^2 <$$

$$< 4T\left\{\alpha \int_T^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{(1/2)\alpha} [1 + 2(4t^2\lambda - 1)^{-1/2}]^{1+\alpha} t^{1 + (1/2)\alpha} L\, dt\right\}^{-2/\alpha}, \quad T \in \Delta,$$

*то будь-який розв'язок* $y = y(t)$ *д. р.* (1), *що задовольняє початкові умови* $y(T) = y_0$, $y'(T) = y_0'$, *коливний за умови* $t = +\infty$.

**Теорема 5.** *Якщо* $\omega = +\infty$, $\lambda'\lambda^{-3/2} = \pm 4 + o(1)$, $t \to +\infty$, $4t^2\lambda > 1$,

$$\int^{+\infty} t^{-1}(4t^2\lambda - 1)^{1/2} dt < +\infty, \quad t(2\lambda + t\lambda')(4t^2\lambda - 1)^{-3/2} = o(1), \quad t \to +\infty,$$

$$(4t^2\lambda - 1)^{-1 + (1/2)\alpha} t^{2 + (1/2)\alpha} L \exp\left[\alpha \int_a^t \tau^2 (4\tau^2\lambda - 1)^{-1} |d(4\lambda - \tau^{-2})|\right] = o(1),$$

$t \to +\infty$, *і виконується одна з умов:*

1) $\alpha = 0$, $y_0^2 + (y_0')^2 > 0$;

2) $\alpha > 0$, $2\lambda + t\lambda' \le 0$ *або* $2\lambda + t\lambda'$ *змінює знак*,

$$\int^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{1/2-(1/2)\alpha} t^{1+(1/2)\alpha} L \times$$

$$\times \exp\left[ \alpha \int_a^t \tau^2 (4\tau^2\lambda - 1)^{-1} \left| d(4\lambda - \tau^{-2}) \right| \right] dt < +\infty,$$

$$0 < [4T^2\lambda(T) - 1]\, y_0^2 + (2y_0' - T^{-1}y_0)^2 <$$

$$< 4T[4T^2\lambda(T) - 1]^2 \left\{ \alpha \int_T^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{\alpha} [1 + 2(4t^2\lambda - 1)^{-1/2}]^{1+\alpha} t^{1+(1/2)\alpha} L \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[ \alpha \int_T^t \tau^2 (4\tau^2\lambda - 1)^{-1} \left| d(4\lambda - \tau^{-2}) \right| \right] dt \right\}^{-2/\alpha}, \quad T \in \Delta;$$

3) $\alpha > 0$, $2\lambda + t\lambda' > 0$,

$$\int^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{-1/2} t^{1+(1/2)\alpha} L\, dt < +\infty,$$

$$0 < y_0^2 + [4T^2\lambda(T) - 1]^{-1} (2y_0' - T^{-1}y_0)^2 <$$

$$< 4T \left\{ \alpha \int_T^{+\infty} (4t^2\lambda - 1)^{(1/2)\alpha} [1 + 2(4t^2\lambda - 1)^{-1/2}]^{1+\alpha} t^{1+(1/2)\alpha} L\, dt \right\}^{-2/\alpha}, \quad T \in \Delta,$$

*то будь-який розв'язок* $y = y(t)$ *д. р.* (1), *що задовольняє початкові умови* $y(T) = y_0$, $y'(T) = y_0'$, *неколивний за умови* $t = +\infty$.

***Зауваження 2.*** Якщо $\lambda_1' \lambda_1^{-3/2} = \pm 4 + o(1)$, $t \to +\infty$, то можна знову застосувати перетворення типу (26).


1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1970. – 603 с.
2. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
3. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. – М.: Наука, 1954. – 568 с.
4. *Wiman A.* Ueber die reellen Losungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung // Ark. Mat. Astr. Fys. – 1947. – **12**, № 14.


Получено 03.02.92