УДК 519.21

Л. В. Гошко, канд. фіз.-мат. наук,
М. І. Портенко, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ КІЛЬКОСТІ ПЕРЕТИНІВ ФІКСОВАНОЇ ПЛОЩИНИ ДЕЯКИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ*

The weak convergence of certain sequences of generalized diffusion processes is characterized by the number of intersections of a process with a fixed plane regarded as a functional of the process.

Характеризується слабка збіжність деяких послідовностей узагальнених дифузійних процесів за допомогою такого функціоналу від процесу, як кількість перетинів ним фіксованої поверхні.

Локальну поведінку траєкторій випадкових процесів зручно характеризувати за допомогою такого функціоналу, яким є кількість перетинів траєкторією фіксованої поверхні (в одновимірному випадку поверхня — це точка, у двовимірному — лінія). Однак, у випадку невиродженого дифузійного процесу цей функціонал втрачає сенс, оскільки вказана кількість перетинів або нескінченна, або дорівнює нулеві в залежності від того, чи потрапила траєкторія протягом певного проміжку часу на дану поверхню, чи ні. Тому доводиться розглядати кількість перетинів поверхні дискретною апроксимацією процесу, тобто послідовними значеннями процесу з кроком, скажімо, n^{-1} (n — натуральне число) і потім переходити до границі, коли $n \to \infty$, відшукуючи нормуючі множники, з якими вказана кількість перетинів мала б граничний розподіл. Саме такий підхід було використано для характеризації локальної поведінки траєкторій деяких класів дифузійних та узагальнених дифузійних процесів (див. [1 – 8], дещо інший підхід в [9]). Як виявилось, граничні розподіли тісно пов'язані з таким функціоналом від процесу, як локальний час, що його процес проводить на даній поверхні.

У цій роботі буде показано, що подібний підхід можна використати і при вивченні слабкої збіжності (узагальнених) дифузійних процесів до граничних, а саме: буде встановлено, що співвідношення між швидкістю слабкої збіжності послідовності (узагальнених) дифузійних процесів до граничного та швидкістю спадання до нуля кроку дискретизації процесу (при підрахунку кількості перетинів ним даної поверхні) суттєво впливає на граничний розподіл. Буде розглянуто два випадки, кожний з яких потребує окремого дослідження.

1. У першому випадку фіксованим буде певний орт ν в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$. Нехай $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) = 0\}$ — ортогональна до нього гіперплощина, що розділяє простір на дві частини: $D_+ = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) > 0\}$ та $D_- = \{x \in \mathbb{R}^d : (x, \nu) < 0\}$, і нехай на S задано дійсну неперервну функцію $q(x)$ з властивістю $|q(x)| \le 1$ при всіх $x \in S$. Позначивши через $g(t, x, y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\{-|y - x|^2 / 2t\}$ густину ймовірності переходу стандартного вінерівського процесу в $\mathbb{R}^d$, покладемо для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$

$$G(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_S g(t - \tau, x, z) \frac{\partial}{\partial \nu_z} g(\tau, z, y)\, q(z)\, d\sigma_z, \qquad (1)$$

де через $\partial / \partial \nu_z$ позначено символ похідної в напрямку ν за змінною $z \in \mathbb{R}^d$, а внутрішній інтеграл є поверхневим також за змінною z. Ця формула потребує деяких коментарів. Інтеграл в (1) можна розглядати як нормальну похідну потенціалу простого шару [10], і тому слід розрізняти так зване пряме значення

* Робота виконана при частковій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Державному комітеті з науки та технологій України.

цього інтегралу (воно дорівнює нулеві через те, що $\partial g(t, z, y)/\partial \nu_z = 0$ при $z \in S$, $y \in S$, $t > 0$) та його граничні значення з боку D_+ та D_- (відповідні границі функції $G(t, x, y)$ позначаємо через $G(t, x, y+)$ та $G(t, x, y-)$ для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in S$). З теореми про нормальну похідну потенціалу простого шару [10] випливає, що при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in S$ справджується співвідношення

$$G(t, x, y\pm) = (1 \pm q(y))\, g(t, x, y). \tag{2}$$

Будемо вважати, що при $y \in S$ функція $G(t, x, y)$ визначається прямим значенням відповідного інтегралу, і отже, $G(t, x, y) = g(t, x, y)$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in S$.

Функція $G(t, x, y)$ є густиною ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу $x(t)$ в $\mathbb{R}^d$ [11], матриця дифузії якого є одиничною, а вектор переносу записується у вигляді $\nu q(x)\delta_S(x)$, де $\delta_S(x)$ — узагальнена функція на $\mathbb{R}^d$, дія якої на неперервну фінітну функцію зводиться до інтегрування останньої по гіперплощині S. При $q(x) \equiv +1$ цей процес (точніше, його частина в півпросторі $D_+ \cup S$ в термінології [12]) збігається з стандартним вінерівським процесом в $\mathbb{R}^d$ з миттєвим відбиттям на гіперплощині S в напрямку D_+. При $q(x) \equiv -1$ відбиття буде в протилежному напрямку. В решті випадків процес $x(t)$ може проникати крізь гіперплощину S. Все це дає підстави говорити про напівпрозору мембрану, що розташована на S і властивості якої описує функція $q(x)$. В частинному випадку, коли $q(x) \equiv 0$, формула (1) визначає стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^d$ (випадок цілком прозорої мембрани).

Поведінку процесу $x(t)$ поблизу мембрани добре характеризує наступний результат, доведений в [5]. Позначимо через $\xi_k^{(n)}$ випадкову величину, що набуває значення 1, коли $(x((k-1)/n), \nu)(x(k/n), \nu) < 0$, і значення 0 в усіх інших випадках. Тоді величина

$$\eta_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^{(n)} \tag{3}$$

при натуральних n та k визначає кількість перетинів гіперплощини S послідовністю випадкових векторів $x(0)$, $x(1/n)$, ..., $x(k/n)$. Для $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ виконується співвідношення (через $[\alpha]$ позначається ціла частина числа α)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_x \exp\{i\lambda n^{-1/2} \eta_{[nt]}^{(n)}\} = u(t, x, \lambda), \tag{4}$$

де $\mathbf{M}_x$ — символ математичного сподівання за умови $x(0) = x$, а $u(t, x, \lambda)$ — єдиний обмежений розв'язок інтегрального рівняння

$$u(t, x, \lambda) = 1 + i\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_S g(\tau, x, y)\, u(t-\tau, y, \lambda)(1 - q^2(y))\, d\sigma_y. \tag{5}$$

При $q^2(y) \equiv c^2$ (нагадаємо, що повинно бути $|c| \leq 1$) розв'язок рівняння (5) відповідає функції розподілу $F_{t,x}(\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$), що визначається формулою

$$F_{t,x}(\alpha) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\alpha)\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int\limits_0^{(\alpha+\gamma r(x))/\gamma} \exp\left\{-\frac{\beta^2}{2t}\right\} d\beta, \tag{6}$$

де $\mathbb{1}_\Gamma(\alpha)$ — індикатор множини $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$, $r(x)$ — віддаль від x до S, $\gamma = \sqrt{2/\pi}\,(1-c^2)$.

Зазначимо, що розв'язок рівняння (5) є характеристичною функцією певного функціоналу від стандартного вінерівського процесу $w(t)$ в $\mathbb{R}^d$. Щоб його побудувати, розглянемо локальний час l_t в точці $x = 0$ для одновимірного вінерівського процесу $(w(t), \nu)$, що є проекцією процесу $w(t)$ на напрямок ν. Функціонал l_t є неперервним однорідним адитивним невід'ємним функціоналом від процесу $w(t)$, причому його точки зростання — це ті моменти часу, в які $w(t) \in S$. Побудуємо тепер новий функціонал

$$\mu_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t (1 - q^2(w(\tau)))\, dl_\tau$$

як інтеграл Стільтьєса (траєкторії процесу l_t монотонно не спадають). Його характеристична функція, тобто функція $\mathbf{M}_x \exp\{i\lambda\mu_t\}$ $(t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \lambda \in \mathbb{R}^1)$, і є розв'язком рівняння (5) [3].

Розглянемо тепер послідовність неперервних функцій $q_n(x)$ на S, для яких $|q_n(x)| \le 1$ при всіх $x \in S$ та натуральних n таких, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S q_n(x)\varphi(x)\, d\sigma = 0, \tag{7}$$

якою б не була неперервна фінітна функція φ на S. Через $G_n(t, x, y)$ позначимо функцію, що визначається формулою (1) з заміною в ній $q(z)$ на $q_n(z)$. Функція $G_n(t, x, y)$ є густиною ймовірності переходу узагальненого дифузійного процесу $x_n(t)$ в $\mathbb{R}^d$, що має своєю матрицею дифузії одиничну матрицю, а своїм вектором переносу — функцію $\nu q_n(x)\delta_S(x)$. З умови (7) неважко вивести, що при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t, x, y) = g(t, x, y), \tag{8}$$

а це разом з оцінкою (при $t \downarrow 0$)

$$\sup_{n\ge1} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |y - x|^4 G_n(t, x, y)\, dy = O(t^2)$$

дозволяє зробити висновок [11], що послідовність процесів $x_n(t)$ слабко збігається до стандартного вінерівського процесу $w(t)$ в $\mathbb{R}^d$.

Нехай $\tilde{\xi}_k^{(n)}$ — випадкова величина, що набуває значення 1 у випадку, коли $(x_n((k-1)/n), \nu)(x_n(k/n), \nu) < 0$, і значення 0 в усіх інших випадках. Покладемо для натуральних n та k

$$\tilde{\eta}_k^{(n)} = \sum_{j=1}^k \tilde{\xi}_j^{(n)}. \tag{9}$$

Ця величина є кількістю перетинів гіперплощини S послідовними значеннями процесу $x_n(t)$ з кроком n^{-1}: $x_n(0)$, $x_n(1/n), \ldots, x_n(k/n)$. Нашим завданням буде дослідити граничну поведінку величин $\tilde{\eta}_{[nt]}^{(n)}$ для $t>0$, коли $n \to \infty$. Ми побачимо, що одного лише припущення (7) недостатньо для того, щоб провести це дослідження.

Почнемо з зауваження про те, що до величин $\tilde{\eta}_{[nt]}^{(n)}$ можна застосувати лему А. В. Скорохода [13], згідно з якою величини $n^{-1/2}\tilde{\eta}_{[nt]}^{(n)}$ мають при $n \to \infty$ граничний розподіл тоді і лише тоді, коли його мають величини $n^{-1/2}\zeta_{[nt]}^{(n)}$, де для натуральних n та k покладено

$$\zeta_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} v_n(x_n(j/n)),$$
$$v_n(x) = \mathbf{M}_x \xi_1^{(n)} = \mathbb{1}_{D_+}(x) \int_{D_-} G_n(1/n, x, y)\, dy + \mathbb{1}_{D_-}(x) \int_{D_+} G_n(1/n, x, y)\, dy. \tag{10}$$

При цьому, у випадку існування, обидва граничні розподіли збігаються. Отже, можна розглядати величини (10).

Вивчимо спочатку поведінку при $n \to \infty$ функцій $v_n(x)$. Позначимо перший та другий доданки в правій частині виразу для $v_n(x)$ через $v_n'(x)$ та $v_n''(x)$ відповідно, а гіперплощину $\{x \in \mathbb{R}^d,\ (x, \nu) = \rho\}$ через S_ρ, $S = S_0$.

Лема 1. *Для будь-якої заданої на $D_+ \cup S$ фінітної неперервної функції φ виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{D_+} v_n'(x) \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S \varphi(x)\, d\sigma \tag{11}$$

та нерівність

$$\sqrt{n} \left| \int_{D_-} v_n'(x) \varphi(x)\, dx \right| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_{\rho \ge 0} \int_{S_\rho} |\varphi(x)|\, d\sigma. \tag{12}$$

Якщо ж неперервна фінітна функція φ задана на $D_- \cup S$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}^d} v_n''(x) \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S \varphi(x)\, d\sigma \tag{13}$$

і при цьому

$$\sqrt{n} \left| \int_{\mathbb{R}^d} v_n''(x) \varphi(x)\, dx \right| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_{\rho \le 0} \int_{S_\rho} |\varphi(x)|\, d\sigma. \tag{14}$$

Доведення. Нехай функція φ задана на $D_+ \cup S$ і є неперервною та фінітною. Відповідно до формули (1) маємо

$$\int_{D_+} \varphi(x)\, v_n'(x)\, dx = A_1 + A_2,$$

де

$$A_1 = \int_{D_+} \varphi(x)\, dx \int_{D_-} g(1/n, x, y)\, dy,$$

$$A_2 = \int\limits_{D_+} \varphi(x)\,dx \int\limits_{D_-} dy \int\limits_0^{1/n} d\tau \int\limits_S g(\tau, x, z)\,\frac{\partial}{\partial \nu_z}\, g(1/n - \tau, z, y)\, q_n(z)\, d\sigma_z .$$

Величину A_1 можна записати у вигляді

$$A_1 = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{D_-} e^{-|z|^2/2}\,dz \int\limits_0^{-(z,\nu)/\sqrt{n}} d\rho \int\limits_{S_\rho} \varphi(x)\,d\sigma,$$

звідки одержуємо співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, A_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_S \varphi(x)\,d\sigma$$

та оцінку

$$\sqrt{n}\,|A_1| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\rho\ge 0} \int\limits_{S_\rho} |\varphi(x)|\,d\sigma.$$

Далі, з формули

$$\int\limits_{D_-} \frac{\partial}{\partial \nu_z}\, g(t, z, y)\,dy = -(2\pi t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(z,\ \nu)^2}{2t}\right\}, \tag{15}$$

що справедлива при всіх $t > 0$, $z \in \mathbb{R}^d$, одержуємо

$$\sqrt{n}\, A_2 = -\int\limits_0^1 \frac{\Phi_n(\tau/n)}{\sqrt{2\pi(1-\tau)}}\,d\tau,$$

де

$$\Phi_n(\tau) = \int\limits_S h(\tau, z)\, q_n(z)\, d\sigma_z, \quad h(\tau, z) = \int\limits_{D_+} \varphi(x)\, g(\tau, x, z)\,dx.$$

Очевидно, функція h неперервна за сукупністю змінних $(\tau, z) \in [0, \infty)\times S$. Внаслідок того, що функція φ фінітна, маємо

$$\lim_{R\uparrow+\infty} \sup_{0\le\tau\le 1} \int\limits_{S\cap\{z:\,|z|>R\}} |h(\tau, z)|\,d\sigma_z = 0.$$

Тому припущення (7) та звичайні міркування, що їх наводять при доведенні відомої теореми Хеллі, дозволяють зробити висновок

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le\tau\le 1} \Phi_n(\tau) = 0,$$

і отже, при $\tau \in [0, 1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(\tau/n) = 0$. Крім того,

$$|\Phi_n(\tau)| \le \int\limits_0^\infty d\rho \int\limits_{S_\rho} |\varphi(x)|\,d\sigma \int\limits_S (2\pi\tau)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{|z-x|^2}{2\tau}\right\} d\sigma_z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int\limits_0^\infty e^{-\rho^2/(2\tau)} \left(\int\limits_{S_\rho} |\varphi(x)|\,d\sigma\right) d\rho \le \frac{1}{2} \sup_{\rho\ge 0} \int\limits_{S_\rho} |\varphi(x)|\,d\sigma,$$

звідки випливає співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, A_2 = 0$ та нерівність

$$\sqrt{n}\,|A_2| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\rho\geq 0} \int\limits_{S_\rho} |\varphi(x)|\, d\sigma.$$

Разом з відповідним співвідношенням та нерівністю для A_1 це доводить (11) та (12). Друге твердження леми доводиться цілком аналогічно.

Наслідок. *Якщо* φ *— неперервна фінітна на* $\mathbb{R}^d$ *функція, то*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int\limits_{\mathbb{R}^d} v_n(x)\varphi(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{S} \varphi(x)\, d\sigma$$

і справедлива оцінка

$$\sqrt{n}\left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v_n(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sup_{\rho\geq 0} \int\limits_{S_\rho} |\varphi(x)|\, d\sigma + \sup_{\rho\geq 0} \int\limits_{S_\rho} |\varphi(x)|\, d\sigma \right].$$

Ми розглядатимемо потенціали вигляду

$$f_n(t,x) = \sqrt{n} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} v_n(z)\,\varphi(\tau,z)\, G_n(t-\tau,x,z)\, dz,$$

де $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, n — натуральне число, а вимірна функція φ обмежена на множинах $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ при скінченних T.

Лема 2. *Якими б не були числа* $\varepsilon > 0$, $C > 0$, $T > 0$, *існує таке число* $\delta > 0$, *що виконується нерівність* $|f_n(t',x') - f_n(t,x)| < \varepsilon$ *при всіх* $t \in [0,T]$, $t' \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $x' \in \mathbb{R}^d$, *натуральних* n *та вимірних функціях* φ *на* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$, *якщо тільки*

$$\sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbb{R}^d} |\varphi(t,x)| \leq C$$

та $|t'-t| + |x-x'| < \delta$.

Доведення. Зафіксуємо деякі $C > 0$, $T > 0$ і розглянемо різницю $f_n(t',x) - f_n(t,x)$ при довільному $x \in \mathbb{R}^d$ та довільній функції φ, для якої $|\varphi(t,y)| \leq C$ при всіх $(t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$. При $0 \leq t < t' \leq T$ маємо

$$f_n(t',x) - f_n(t,x) = \sqrt{n} \int\limits_t^{t'} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} v_n(z)\,\varphi(\tau,z)\, G_n(t'-\tau,x,z)\, dz +$$

$$+ \sqrt{n} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} v_n(z)\,\varphi(\tau,z)\,[G_n(t'-\tau,x,z) - G_n(t-\tau,x,z)]\, dz. \qquad (16)$$

Позначимо через B_1 та B_2 відповідно перший та другий доданки в правій частині (16). Оцінимо спочатку B_1. Нескладний підрахунок приводить до нерівності

$$\int\limits_{S_\rho} G_n(t,x,z)\, d\sigma_z \leq \sqrt{\frac{2}{\pi t}},$$

що виконується при всіх $\rho \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та натуральних n. Тому з леми 1 випливає нерівність

$$\sqrt{n}\int_{\mathbb{R}^d} v_n(z)\,G_n(t-\tau, x, z)\,d\sigma \le \frac{4}{\pi\sqrt{t-\tau}},$$

яка дозволяє оцінити B_1:

$$|B_1| \le \frac{8C}{\pi}\sqrt{t'-t}. \tag{17}$$

Щоб оцінити B_2, зобразимо його у вигляді суми $B_2 = B_2' + B_2''$, де

$$B_2' = \sqrt{n}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} v_n(z)\,\varphi(\tau, z)\,[g(t'-\tau, x, z) - g(t-\tau, x, z)]\,dz,$$

$$B_2'' = \int_0^t d\tau \int_0^{t'-\tau} d\theta \int_S h_n(\tau, \theta, y)\,g(t'-\tau-\theta, x, y)\,q_n(y)\,d\sigma_y -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} d\theta \int_S h_n(\tau, \theta, y)\,g(t-\tau-\theta, x, y)\,q_n(y)\,d\sigma_y,$$

$$h_n(\tau, \theta, y) = \sqrt{n}\int_{\mathbb{R}^d} v_n(z)\,\varphi(\tau, z)\,\frac{\partial}{\partial \nu_y} g(\theta, y, z)\,dz.$$

Величину B_2' можна оцінити, виходячи з того, що при τ близьких до t (скажімо, $t-\tau < \gamma$ при малих γ) внаслідок леми 1

$$\int_{t-\gamma}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} v_n(z)\,g(t-\tau, x, z)\,dz \le \frac{4}{\pi}\sqrt{\gamma},$$

оскільки

$$\sup_{\rho\in\mathbb{R}^1}\int_{S_\rho} g(t-\tau, x, z)\,d\sigma_z \le (2\pi(t-\tau))^{-1/2}.$$

Якщо ж $\tau \in [0, t-\gamma]$ (при $t > \gamma$), можна скористатись теоремою Лагранжа про скінченні прирости. В результаті маємо

$$|B_2'| \le \frac{8C}{\pi}\sqrt{\gamma} + \frac{CK}{\sqrt{\gamma}}(t'-t), \tag{18}$$

де K — деяка абсолютна стала, а γ — довільне додатне число. Щоб оцінити B_2'', слід спочатку знайти оцінку для функції $h_n(\tau, \theta, y)$ при $\tau > 0$, $\theta > 0$, $y \in S$. Нескладні підрахунки з використанням формул типу формули (15) приводять до нерівності

$$|h_n(\tau, \theta, y)| \le \frac{4C}{\sqrt{2\pi}} L_n(\theta),$$

де

$$L_n(\theta) = \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-\alpha^2/2}\,d\alpha \int_0^{\alpha/\sqrt{n}} e^{-\rho^2/2\theta}\,\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{2\pi\theta^3}}.$$

Зауважимо, що

$$\int_0^\infty L_n(\theta)\,d\theta = 1.$$

Тепер записуємо B_2'' у вигляді суми $B_2'' = J_1 + J_2$, де

$$J_1 = \int_0^t d\tau \int_{t-\tau}^{t'-\tau} d\theta \int_S g(t'-\tau-\theta, x, y)\, h_n(\tau, \theta, y)\, q_n(y)\, d\sigma_y,$$

$$J_2 = \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} d\theta \int_S h_n(\tau, \theta, y)\, q_n(y) [g(t'-\tau-\theta, x, y) - g(t-\tau-\theta, x, y)\, d\sigma_y.$$

Величину J_1 оцінюємо з використанням оцінки для h_n та леми 1. Маємо

$$|J_1| \le \frac{4C}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \int_{t-\tau}^{t'-\tau} L_n(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi(t'-\tau-\theta)}} \le \frac{4C}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{t'-t}. \tag{19}$$

Нарешті, щоб оцінити J_2, слід використати нерівність для h_n, лему 1, а також підхід, за допомогою якого вище було оцінено величину B_2'. В результаті одержуємо

$$|J_2| \le \frac{8C}{\pi}\sqrt{\gamma} + \frac{CT}{\gamma^{3/2}} K'(t'-t), \tag{20}$$

де K' — деяка абсолютна стала, а γ — довільне додатне число. Зіставляючи тепер (16) – (20), бачимо, що

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{n\ge 1} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{0\le t\le t'\le t+h\le T} |f_n(t', x) - f_n(t, x)| = 0.$$

Подібними ж міркуваннями (навіть дещо простішими) можна довести

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{n\ge 1} \sup_{t\in[0,\,T]} \sup_{x,\, x'\in\mathbb{R}^d,\, |x-x'|\le h} |f_n(t, x') - f_n(t, x)| = 0.$$

Цим закінчується доведення леми.

Далі обчислимо границі функції $f_n(t, x)$ в припущенні, що функція $\varphi(\tau, z)$ є обмеженою та рівномірно неперервною на множинах вигляду $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ при скінченних T. Зафіксуємо деякі $x \in \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $t \in [0, T]$ і запишемо $f_n(t, x)$ у вигляді суми $f_n(t, x) = I_n^{(1)}(t, x) + I_n^{(2)}(t, x)$, де

$$I_n^{(1)}(t, x) = \sqrt{n} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\tau, z)\, v_n(z)\, g(t-\tau, x, z)\, dz,$$

$$I_n^{(2)}(t, x) = \int_0^t d\theta \int_S g(t-\theta, x, y)\, Q_n(\theta, y)\, q_n(y)\, d\sigma_y, \tag{21}$$

$$Q_n(t, y) = \sqrt{n} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t-\tau, z) \frac{\partial}{\partial \nu_y} g(\tau, y, z)\, v_n(z)\, dz.$$

З леми 1 легко виводимо співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(1)}(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_S \varphi(\tau, z)\, g(t-\tau, x, z)\, d\sigma_z. \tag{22}$$

Зауважимо тепер, що $Q_n = Q_n' + Q_n''$, де Q_n' та Q_n'' зображаються тим же інтегралом, що і Q_n, з тією лише різницею, що в ньому замінено v_n відповідно на v_n' та v_n''. Розглянемо Q_n':

$$Q_n'(t, y) = \sqrt{n} \int_0^t d\tau \int_{D_+} \varphi(t-\tau, z) \frac{\partial}{\partial \nu_y} g(\tau, y, z)\, dz \int_{D_-} g(1/n, z, u)\, du +$$

$$+ \sqrt{n} \int_0^t d\tau \int_{D_+} \varphi(t-\tau, z) \frac{\partial}{\partial \nu_y} g(\tau, y, z)\, dz \int_{D_-} du \times$$

$$\times \int_0^{1/n} d\theta \int_S g(\theta, z, v) \frac{\partial}{\partial \nu_v} g(1/n - \theta, v, u)\, q_n(v)\, d\sigma_v.$$

Позначимо через $E_n^{(1)}(t, y)$ та $E_n^{(2)}(t, y)$ відповідно перший та другий доданки в правій частині цієї рівності. За допомогою нескладних обчислень величину $E_n^{(1)}$ можна звести до вигляду

$$E_n^{(1)}(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(t, y) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(t, y) \int_t^\infty L_n(\tau)\, d\tau + R_n(t, y),$$

де

$$R_n(t, y) = \sqrt{n} \int_0^t d\tau \int_{D_-} (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2} dx \times$$

$$\times \int_{\left\{0 \le (z, \nu) \le -(x, \nu) n^{-1/2}\right\}} [\varphi(t-\tau, z) - \varphi(t, y)] \frac{\partial}{\partial \nu_y} g(\tau, y, z)\, dz.$$

Використовуючи обмеженість та рівномірну неперервність функції φ на множині $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, величину R_n можна оцінити величиною $\varepsilon + K_\varepsilon n^{-1/2}$ при довільних $\varepsilon > 0$ та натуральних n з константою K_ε, що не залежить від n. Крім того, неважко бачити, що при фіксованому $t > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \int_t^\infty L_n(\tau)\, d\tau = 0, \quad \int_t^\infty L_n(\tau)\, d\tau \le 1.$$

Тому, підставивши в (21) замість $Q_n(\theta, y)$ величину $E_n^{(1)}(\theta, y)$, одержимо, що результат цієї підстановки прямує до нуля, коли $n \to \infty$. Залишається дослідити $E_n^{(2)}(t, y)$. Використовуючи формулу

$$\int_{D_+} \frac{\partial}{\partial \nu_y} g(\tau, y, z)\, g(\theta, z, v)\, dz = \sqrt{\frac{\theta}{\tau}} \, (2\pi(\tau+\theta))^{-(d+1)/2} \exp\left\{-\frac{|v-y|^2}{2(\tau+\theta)}\right\},$$

можемо записати $E_n^{(2)}$ у вигляді

$$E_n^{(2)}(t, y) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{nt} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\theta}}{(\theta+\tau)\sqrt{1-\theta}} \times$$

$$\times H_n\left(\frac{\theta+\tau}{n}, y\right) \varphi\left(t - \frac{\tau}{n}, y\right) d\theta + R_n'(t, y),$$

де покладемо для $t > 0$, $y \in S$, $\theta > 0$, $v \in S$

$$H_n(t, y) = \int_S (2\pi t)^{-(d-1)/2} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}\right\} q_n(x)\, d\sigma_x,$$

$$R_n'(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}} \int_S F(t, \theta/n, y, v)\, q_n(v)\, d\sigma_v,$$

$$F(t, \theta, y, v) = \int_0^t d\tau \int_{D_+} [\varphi(t-\tau, y) - \varphi(t-\tau, z)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} g(\tau, y, z)\, g(\theta, z, v)\, dz.$$

Для R_n' справедлива така ж сама (і з тих же причин) оцінка, що і вище для R_n). Тому границя $I_n^{(2)}$ при $n \to \infty$ визначається поведінкою суми першого доданку у виразі для $E_n^{(2)}$, а також відповідного доданку у виразі для Q_n''. Цікаво, що останній збігається з першим і за величиною, і за знаком. Отже, можемо записати

$$I_n^{(2)}(t, x) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t d\theta \int_0^{n\theta} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^1 \frac{\sqrt{s}\, ds}{(s+\tau)\sqrt{1-s}} \times$$

$$\times \left[\int_S g(t-\theta, x, y)\, H_n((s+\tau)/n, y)\, \varphi(\theta, y)\, q_n(y)\, d\sigma_y \right] + o(1). \tag{23}$$

Звідси видно, що границя $I_n^{(2)}$ при $n \to \infty$ визначається поведінкою функції $H_n(t, x)$ (зауважимо, що $H_n(t, x) \to 0$ при фіксованому $t > 0$, коли $n \to \infty$, і $H_n(t, x) \to q_n(x)$ при фіксованому n, коли $t \downarrow 0$). Введемо додаткове до (7) припущення щодо q_n: існує вимірна функція $\beta(t)$ $(t > 0)$, що задовольняє співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \int_S H_n(t/n, x)\, \varphi(x)\, q_n(x)\, d\sigma = \beta(t) \int_S \varphi(x)\, d\sigma, \tag{24}$$

якою б не була неперервна фінітна функція φ на S. Неважко зрозуміти, що $0 \le \beta(t) \le 1$. Якщо тепер позначити

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \int_0^1 \frac{\beta(\theta+\tau)\sqrt{\theta}}{(\theta+\tau)\sqrt{1-\theta}}\, d\theta,$$

то з (23) маємо

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(2)}(t, x) = -\kappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y)\, \varphi(\tau, y)\, d\sigma_y. \tag{25}$$

Зауважимо, що $\kappa = 1$ у випадку $\beta(t) \equiv 1$.

Лема 3. *Нехай послідовність неперервних функцій $q_n(x)$ на S така, що $|q_n(x)| \le 1$ при всіх $x \in S$ та натуральних n, і, крім того, виконуються умови* (7) *та* (24). *Тоді для будь-якої функції φ, обмеженої та рівномірно неперервної на множині вигляду $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ при скінченних T, виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\tau,z)\,G_n(t-\tau,x,z)\,v_n(z)\,dz =$$

$$= (1-\kappa)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,y)\,\varphi(\tau,y)\,d\sigma_y.$$

Доведення випливає безпосередньо із співвідношень (22) та (25).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми* 3. *Тоді при всіх* $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\alpha\in\mathbb{R}^1$ *виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_x\{n^{-1/2}\,\tilde{\eta}^{(n)}_{[nt]}<\alpha\} = F_{t,x}(\alpha),$$

де функція $F_{t,x}(\alpha)$ *визначається формулою* (6), *в якій слід покласти* $c^2=\kappa$.

Доведення. Як вказувалося вище, можна розглядати величини $\zeta^{(n)}_{[nt]}$ замість величин $\tilde{\eta}^{(n)}_{[nt]}$. Покладемо

$$u_n(t,x,\lambda) = \mathbf{M}_x\exp\{i\lambda n^{-1/2}\,\zeta^{(n)}_{[nt]}\}$$

для $\lambda\in\mathbb{R}^1$, $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}^d$. Функція $u_n(t,x,\lambda)$ задовольняє наступне рівняння (див., наприклад, [3])

$$u_n(t,x,\lambda) = 1+n\int_{[0,\,[nt]/n)}d\tau\int_{\mathbb{R}^d}(\exp\{i\lambda n^{-1/2}v_n(y)\}-1)\times$$

$$\times u_n(\tau,y,\lambda)\,G_n(([nt]-[n\tau])/n,x,y)\,dy.$$

Позначимо через $u_n^*(t,x,\lambda)$ характеристичну функцію функціоналу

$$\sqrt{n}\int_0^t v_n(x_n(\tau))\,d\tau$$

від процесу $x_n(t)$. Вона є єдиним обмеженим розв'язком рівняння [3]

$$u_n^*(t,x,\lambda) = 1+i\lambda\sqrt{n}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}u_n^*(\tau,y,\lambda)\,v_n(y)\,G_n(t-\tau,x,y)\,dy. \tag{26}$$

З використанням леми 2 неважко довести, що $\lim_{n\to\infty}[u_n(t,x,\lambda)-u_n^*(t,x,\lambda)] = 0$. Отже, слід шукати границю функції u_n^*. Знову на підставі леми 2 можемо стверджувати існування такої послідовності $n_k\to\infty$, що локально рівномірно відносно t,x,λ виконується співвідношення $\lim_{n_k\to\infty}u^*_{n_k}(t,x,\lambda) = \tilde{u}(t,x,\lambda)$. Перейшовши до границі за цією підпослідовністю в рівнянні (26), з використанням леми 3 одержимо, що функція $\tilde{u}$ повинна задовольняти рівняння (5), в якому слід покласти $q^2(y)\equiv\kappa$. З того факту, що розв'язок цього рівняння єдиний, випливає, що вся послідовність u_n^*, а отже, і u_n, збігається до функції $\tilde{u}$. Оскільки остання є характеристичною функцією розподілу (6) при $c^2=\kappa$, то звідси й випливає твердження теореми.

Приклад. Нехай $d = 2$. Тоді S — пряма на площині, що проходить через початок координат. Для натурального n, деякого фіксованого $\alpha > 0$ та $x \in S$ покладаємо $q_n(x) = \cos(|x| n^{\alpha})$. Ця функція задовольняє умову (7), і для неї $H_n(t, x) = \exp\{-t n^{2\alpha}/2\} \cos(n^{\alpha} |x|)$ при $t > 0$, $x \in S$. Звідси випливає, що виконується умова (24) і при цьому $\beta(t) \equiv 0$ у випадку $\alpha > 1/2$, $\beta(t) \equiv 1/2$ у випадку $\alpha < 1/2$ і $\beta(t) = e^{-t}/2$, якщо $\alpha = 1/2$. Цікаво відзначити, що у першому та третьому випадках граничний розподіл можна одержати за допомогою повторних граничних переходів. У випадку $\alpha > 1/2$ можна, зафіксувавши спочатку крок дискретизації часу, перейти до граничного (вінерівського) процесу, а вже потім спрямувати до нуля величину кроку дискретизації. У випадку ж $\alpha < 1/2$ граничний розподіл одержимо, якщо зафіксуємо спочатку процес і перейдемо до границі, коли величина кроку дискретизації прямує до нуля, а вже потім здійснимо граничний перехід до вінерівського процесу.

2. Розглянемо тепер в $\mathbb{R}^1$ послідовність дифузійних процесів $x_n(t)$ з одиничним коефіцієнтом дифузії і коефіцієнтом переносу $a_n(x) = na(nx)$, де $a(x)$ — задана на $\mathbb{R}^1$ дійсна неперервна обмежена функція, для якої

$$\| a \|_1 = \int_{\mathbb{R}^1} |a(x)| \, dx < 1.$$

Через $G_n(t, x, y)$ позначимо густину ймовірності переходу процесу $x_n(t)$, а через $G(t, x, y)$ — функцію, що визначається при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$ формулою

$$G(t, x, y) = (2\pi t)^{-1/2} \left[\exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} + c \operatorname{sign} y \exp\left\{ -\frac{(|x| + |y|)^2}{2t} \right\} \right], \tag{27}$$

де c — деякий дійсний параметр, причому $|c| \le 1$. Ця формула визначає густину ймовірності переходу деякого узагальненого дифузійного процесу $x(t)$ в $\mathbb{R}^1$, що має своїм коефіцієнтом дифузії одиницю, а коефіцієнтом переносу — функцію $c\delta(x)$, де $\delta(x)$ — δ-функція Дірака [11]. Процес $x(t)$ можна розглядати як математичну модель (одновимірну) броунівського руху з напівпрозорою мембраною в точці $x = 0$. Властивості мембрани залежать від значення параметру c. У випадку $c = 1$ процес $x(t)$ є вінерівським процесом з миттєвим відбиттям у точці $x = 0$ праворуч. При $c = -1$ відбиття буде у протилежному напрямку. В обох цих випадках мембрана непрозора. Максимально прозорою вона буде при $c = 0$, тобто у випадку, коли $x(t)$ — стандартний вінерівський процес на прямій.

Наступне твердження показує, що в цій ситуації граничний перехід приводить до виникнення мембрани, на відміну від попередньої, коли після переходу до границі мембрана зникала.

Лема 4. *При всіх* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ *виконується співвідношення* $\lim_{n \to \infty} G_n(t, x, y) = G(t, x, y)$, *де функція* $G(t, x, y)$ *визначається формулою* (27), *в якій слід покласти*

$$c = \operatorname{th} q = \frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q}}, \quad q = \int_{\mathbb{R}^1} a(x) \, dx.$$

Доведення. Функція $G_n(t, x, y)$ задовольняє кожне з наступної пари рівнянь [14, 11]:

$$G_n(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^1} g(\tau,x,z)\,\frac{\partial}{\partial z} G_n(t-\tau,z,y)\,a_n(z)\,dz, \tag{28}$$

$$G_n(t,x,y) = g(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^1} G_n(\tau,x,z)\,\frac{\partial}{\partial z} g(t-\tau,z,y)\,a_n(z)\,dz, \tag{29}$$

в яких $g(t,x,y) = (2\pi t)^{-1/2}\exp\{-|y-x|^2/2t\}$ — густина ймовірності переходу одновимірного вінерівського процесу. Індукцією знаходимо з цих рівнянь

$$G_n(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} G_n^{(k)}(t,x,y), \tag{30}$$

де $G_n^{(0)}(t,x,y) = g(t,x,y)$, а при $k \ge 1$

$$G_n^{(k)}(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^1} \overset{(k)}{\cdots} \int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{sign}(y-z_k)\operatorname{sign}(z_k-z_{k-1}) \ldots \operatorname{sign}(z_2-z_1) \times$$

$$\times\ (2\pi t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2t}h_k^2(x,\ y,\ z_1,\ \ldots,\ z_k)\right\} a_n(z_1)\ldots a_n(z_k)\,dz_1\ldots dz_k,$$

$$h_k(x,y,z_1,\ldots,z_k) = |y-z_k| + |z_k-z_{k-1}| + \ldots + |z_2-z_1| + |z_1-x|.$$

Використовуючи ту обставину, що $h_k(x,y,z_1,\ldots,z_k) \ge |y-x|$, маємо нерівності

$$|G_n^{(k)}(t,x,y)| \le \|a\|_1^k\,(2\pi t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\},$$

що виконуються при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^1$, $y\in\mathbb{R}^1$ та $k\ge 0$. Вони переконують нас у тому, що ряд (30) збігається рівномірно відносно n і в ньому можна переходити до границі при $n\to\infty$ почленно. Неважко бачити, що при всіх $k\ge 1$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^1$, $y\in\mathbb{R}^1\setminus\{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} G_n^{(k)}(t,x,y) = \lambda_k \operatorname{sign} y\,(2\pi t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(|x|+|y|)^2}{2t}\right\},$$

де

$$\lambda_k = \int_{\mathbb{R}^1} \overset{(k)}{\cdots} \int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{sign}(z_k-z_{k-1})\ldots\operatorname{sign}(z_2-z_1)\,a(z_1)\ldots a(z_k)\,dz_1\ldots dz_k.$$

Отже, залишається довести, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k = \operatorname{th} q.$$

Щоб це зробити, розглянемо при $k\ge 1$ функції $(x\in\mathbb{R}^1)$

$$V_k(x) = \int_{\mathbb{R}^1} \overset{(k)}{\cdots} \int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{sign}(x-z_k)\operatorname{sign}(z_k-z_{k-1})\ldots$$

$$\ldots\operatorname{sign}(z_2-z_1)\,a(z_1)\ldots a(z_k)\,dz_1\ldots dz_k$$

і зауважимо, що $\lambda_k = \lim_{x\to+\infty} V_k(x)$. З іншого боку, якщо покласти $V_0(x)\equiv 1$, то будемо мати рекурентні співвідношення

$$\frac{d}{dx} V_k(x) = 2a(x) V_{k-1}(x)$$

при $k = 1, 2, \ldots$. Звідси легко знаходимо рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) = \frac{2e^{2A(x)}}{1+e^{2q}}$$

(тут і надалі $A(x) = \int_{-\infty}^{x} a(z)\,dz$), з якої, переходячи до границі при $x \to +\infty$, одержуємо шукане співвідношення між константами λ_k. Лему доведено.

Ця лема разом з оцінкою

$$G_n(t, x, y) \le (1 - \| a \|_1)^{-1} (2\pi t)^{-1/2} \exp\{-|y-x|^2/2t\},$$

що справедлива при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$ та натуральних n, дозволяє твердити, що послідовність процесів $x_n(t)$ слабко збігається до процесу $x(t)$ з густиною ймовірності переходу (27) при $c = \operatorname{th} q$. Отже, граничний процес має своїм коефіцієнтом переносу функцію $c\delta(x)$, а не $q\delta(x)$, хоч остання є границею послідовності коефіцієнтів переносу $a_n(x)$.

Позначимо через $\xi_k^{(n,m)}$ (n, m, k — натуральні числа) випадкову величину, що приймає значення 1 у випадку $x_m((k-1)/n)\,x_m(k/n) < 0$ і значення 0 в решті випадків. Покладемо

$$\eta_k^{(n,m)} = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^{(n,m)}.$$

Ця величина визначає кількість перетинів нульового рівня послідовними (з кроком n^{-1}) значеннями процесу $x_m(t)$: $x_m(0), x_m(1/n), \ldots, x_m(k/n)$. Завдання полягає у тому, щоб дослідити поведінку величини $\eta_{[nt]}^{(n,m)}$ при $t \ge 0$, коли n та m узгоджено зростають до нескінченності.

У цьому випадку також можна скористатись згаданою вище лемою А. В. Скорохода і замість величин $\eta_{[nt]}^{(n,m)}$ розглядати величини

$$\zeta_{[nt]}^{(n,m)} = \sum_{j=1}^{[nt]} v^{(n,m)}(x_m(j/n)),$$

де

$$v^{(n,m)}(x) = \mathbf{M}_x \xi_1^{(n,m)} = \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) \int_0^{\infty} G_m(1/n, x, y)\,dy +$$

$$+ \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \int_{-\infty}^{0} G_m(1/n, x, y)\,dy.$$

Дослідження величин $\zeta_{[nt]}^{(n,m)}$ проводиться за тією ж схемою, що і вище, і ми не наводимо технічні деталі. Сформулюємо остаточний результат.

Теорема 2. *Нехай при деяких додатніх* α *та* μ *виконується умова* $m = \mu^{\alpha} n^{\alpha}$. *Тоді граничний розподіл величини* $n^{-1/2}\eta_{[nt]}^{(n,m)}$ *(при умові* $x_m(0) = x$*)*

визначається формулою (6), *в якій слід покласти* $r(x) = |x|$, *а константу* γ *визначати так:*

а) $\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[1-(\operatorname{th} q)^2]$ *у випадку* $\alpha > 1/2$;

б) $\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\exp\{2A(0)-q\}}{\operatorname{ch} q}$ *у випадку* $\alpha < 1/2$;

в)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\frac{e^{-q}}{\operatorname{ch} q}\left[\int_0^{\infty} e^{2A(y)}\,dy\int_{-\infty}^{0} G_1(\mu,\ y,\ z)\,dz + \int_{-\infty}^{0} e^{2A(y)}\,dy\int_0^{\infty} G_1(\mu,\ y,\ z)\,dz\right]$$

у випадку $\alpha = 1/2$.

Цікаво відзначити, що у випадку в) граничний розподіл залежить від μ, а також від густини ймовірності переходу $G_1(t, x, y)$ процесу $x_1(t)$, тобто дифузійного процесу з коефіцієнтом переносу $a(x)$ та одиничним коефіцієнтом дифузії.

Варто також порівняти теорему 2 з доведеною в [4] теоремою про кількість перетинів нульового рівня граничним процесом. А саме: якщо позначити через $\eta_k^{(n)}$ кількість перетинів нульового рівня послідовними значеннями граничного процесу $x(t)$ з кроком n^{-1}: $x(0), x(1/n), \ldots, x(k/n)$, то при всіх $t \geq 0$ величини $n^{-1/2}\eta_{[nt]}^{(n)}$ мають граничний розподіл, який збігається з тим, що фігурує у випадку а) теореми 2.

1. *Гіхман Й. І.* Деякі граничні теореми для кількості перетинів випадковою функцією границі даної області // Наук. зап. Київ. ун-ту. – 1957. – **16**. – С. 149–164.
2. *Гіхман Й. І.* Асимптотичні розподіли числа перетинів випадковою функцією границі деякої області // Вісн. Київ. ун-ну. Сер. астрономія, математика, механіка. – 1958. – **1**. – С. 25–46.
3. *Портенко Н. И.* Неотрицательные аддитивные функционалы от марковских процессов и некоторые предельные теоремы // Теория случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1973. – Вып. 1. – С. 86–107.
4. *Ефименко С. В., Портенко Н. И.* О числе пересечений винеровским процессом частично отражающего экрана // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 57–64.
5. *Portenko N., Yefimenko S.* On the number of crossings of a partly reflecting hyperplane by a multidimensional Wiener process // Lect. Notes Control and Inform. Sci. – 1987. – **96**. – P. 194–203.
6. *Ефименко С. В., Портенко Н. И.* О числе пересечений случайным процессом фиксированного уровня // Статистика и управление случайными процессами. – М.: Наука, 1989. – С. 70–75.
7. *Ефименко С. В.* О предельном распределении числа пересечений некоторого уровня обобщенным диффузионным процессом на прямой // Избранные задачи современной теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 66–73.
8. *Ефименко С. В., Портенко Н. И.* О распределении числа пересечений задерживающего экрана процессом, склеенным из двух процессов броуновского движения // Стохастический анализ и его приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 55–63.
9. *Stoica L.* The oscillations of Brownian motion near a hypersurface // Studii si cercetari Mathematice. – Editura Academiei Republicii socialiste Romania. – 1989. – **41**, № 2. – P. 79–134.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
11. *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процессы. – Киев: Наук. думка, 1982. – 208 с.
12. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
13. *Скороход А. В.* Некоторые предельные теоремы для аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин // Укр. мат. журн. – 1961. – **13**, № 4. – С. 67–78.
14. *Portenko N. I.* On the theory of diffusion processes // Probability Theory and Mathematical Statistics. – (Proceedings of the Sixth USSR–Japan Symposium). – World Scientific. – 1992. – P. 259–267.

Одержано 04.02.93