УДК 517.929. 4

Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, **А. С. Бычков,** мл. науч. сотр. (Киев. ун-т)

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

The linear stochastic differential equations with a deviating neutral type argument are considered. The sufficient conditions for stability are obtained. The functions that give the initial perturbations of the solutions are calculated.

Розглядаються лінійні стохастичні диференціальні системи з відхильним аргументом нейтрального типу. Одержані достатні умови стійкості. Обчислюються функції, які визначають початкові збурення розв'язків.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$d[x(t)-Dx(t-\tau)] = [A_0x(t)+A_1x(t-\tau)]dt + \\ + [B_0x(t)+B_1x(t-\tau)]d\omega(t), \qquad (1)$$

где D, A_0, A_1, B_0, B_1 — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, $\omega(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. Предполагается, что выполнено условие „устойчивости", т. е. $|D| < 1$. Под решением уравнения понимается непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$x(t)-Dx(t-\tau) = x(t_0)-Dx(t_0-\tau)+\int_{t_0}^{t}[A_0x(s)+ \\ + A_1x(s-\tau)]ds+\int_{t_0}^{t}[B_0x(s)+B_1x(s-\tau)]d\omega(s),$$

где второй интеграл является интегралом Ито [1, 2], в качестве начальной $x(t)$, $t_0-\tau \le t \le t_0$, берется любая непрерывно дифференцируемая детерминированная (для простоты) векторная функция. Как известно, система (1) называется устойчивой в среднеквадратическом, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ такие, что для любого решения $x(t)$ системы (1) будет выполняться

$$M\{|x(t)|_1^2\} < \varepsilon, \quad t > t_0,$$

если

$$\|x(t_0)\|_\tau^2 < \delta_1 \quad \text{и} \quad \|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2 < \delta_2 \quad [3, 4].$$

В качестве векторных норм здесь и в дальнейшем будем использовать

$$|x(t)| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}, \quad \|x(t_0)\|_\tau = \max_{-\tau\le s\le 0}\{|x(t_0+s)|\},$$

$$M\{|x(t)|_1^2\} = \max\left\{M\{|x(t)|^2\}, \frac{d}{dt}M\{|x(t)|^2\}\right\}.$$

В качестве матричной нормы — спектральную. Исследование устойчивости системы (1) будем проводить с помощью метода стохастических функций Ляпунова [5, 6]. Поскольку система линейная, естественно брать функцию в виде квадратичной формы $V(x) = x^T H x$. Известно, что необходимым условием асимптотической устойчивости системы (1) является асимптотическая устойчивость этой системы при отсутствии запаздывания, т. е. при $\tau = 0$. Система (1) в этом случае имеет вид

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bx(t)d\omega(t), \tag{2}$$

где

$$A = (E-D)^{-1}(A_0 + A_1), \quad B = (E-D)^{-1}(B_0 + B_1).$$

Если существуют положительно определенные матрицы H, C, являющиеся решением уравнения Сильвестра

$$A^T H + HA + B^T HB = -C, \tag{3}$$

то система (2) будет асимптотически устойчивой [6]. Очевидно, при определенных условиях это сохраняется и для системы (1). Получим достаточные условия устойчивости в среднеквадратическом системы (1) при произвольном отклонении аргумента. Вычислим функции $\delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2(\varepsilon)$, характеризующие начальные возмущения. Они выражаются через коэффициенты матриц системы и собственные числа матриц, входящих в уравнение Сильвестра. Предварительно приведем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть*

$$t_0 + n\tau \le t \le t_0 + (n+1)\tau, \quad n \ge 1.$$

Тогда для $\tilde{x}(t) = x(t) - x(t-\tau)$, *где* $x(t)$ *— решение системы* (1), *справедливы соотношения*

$$d\tilde{x}(t) = D^n \Phi(t)dt + \sum_{i=0}^{n} D^i \{[A_0 \tilde{x}(t - i\tau) +$$

$$+ A_1 \tilde{x}(t-(i+1)\tau)]dt + [B_0 \tilde{x}(t-i\tau) + B_1 \tilde{x}(t-(i+1)\tau)]d\omega(t)\}, \tag{4}$$

$$\Phi(t) = D\dot{\tilde{x}}(t-(n+1)\tau) + \dot{\tilde{x}}(t-n\tau),$$

$$\tilde{x}(t-n\tau) = x(t_0) - x(t-(n+1)\tau), \tag{5}$$

$$\tilde{x}(t-(n+1)\tau) = x(t-(n+1)\tau) - x(t_0-\tau).$$

Доказательство. Для $\tilde{x}(t) = x(t) - x(t-\tau)$ справедливо равенство

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_0 + n\tau) + D[\tilde{x}(t-\tau) - \tilde{x}(t_0 + (n-1)\tau)] +$$

$$\int_{t_0+n\tau}^{t} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)]ds + \int_{t_0+n\tau}^{t} [B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)]d\omega(s).$$

Проделав аналогичную процедуру для $\tilde{x}(t-\tau)$, получим

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_0 + n\tau) + D[D\tilde{x}(t-2\tau) - \tilde{x}(t_0 + (n-2)\tau)] +$$

$$+ D\left[\int_{t_0+(n-1)\tau}^{t-\tau} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)]ds + \int_{t_0+(n-1)\tau}^{t-\tau} [B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)]d\omega(s)\right] +$$

$$+ \int_{t_0+n\tau}^{t} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)]ds + \int_{t_0+n\tau}^{t} [B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)]d\omega(s).$$

Пусть $n \geq 1$. Продолжая процесс дальше, имеем

$$\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_0 + n\tau) = D^n[\tilde{x}(t - n\tau) - \tilde{x}(t_0)] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} D^i \left\{ \int\limits_{t_0+(n-1)\tau}^{t-i\tau} \left[A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)\right] ds + \int\limits_{t_0+(n-1)\tau}^{t-i\tau} \left[B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)\right] d(s) \right\}.$$

Для $\tilde{x}(t - n\tau)$ справедливо

$$\tilde{x}(t - n\tau) = [x(t - n\tau) - x(t_0)] + [x(t_0) - x(t - (n+1)\tau)] = D[x(t - (n+1)\tau) -$$

$$- x(t_0 - \tau)] + \int\limits_{t_0}^{t-n\tau} [A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)] ds + \int\limits_{t_0}^{t-n\tau} [B_0 x(s) +$$

$$+ B_1 x(s-\tau)] d\omega(s) + [x(t_0) - x(t - (n+1)\tau)].$$

Поэтому

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_0 + n\tau) - D^n \tilde{x}(t_0) + D^n\{D\tilde{x}(t - (n+1)\tau) + \tilde{x}(t - n\tau)\} +$$

$$+ D^n \left\{ \int\limits_{t_0}^{t-n\tau} \left[A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)\right] ds + \int\limits_{t_0}^{t-n\tau} \left[B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)\right] d\omega(s) \right\} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} D^i \left\{ \int\limits_{t_0+(n-i)\tau}^{t-i\tau} \left[A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)\right] ds + \int\limits_{t_0+(n-i)\tau}^{t-i\tau} \left[B_0 x(s) + B_1 x(s-\tau)\right] d\omega(s) \right\}.$$

Поскольку в качестве начальной функции берется детерминированная, непрерывно дифференцируемая векторная функция $x(t)$, $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, то в дифференциальной форме получаем (4), (5).

Замечание. Если $n = 0$, то (4) также справедливо. В этом случае

$$d\tilde{x}(t) = \Phi(t)dt + [A_0\tilde{x}(t) + A_1\tilde{x}(t-\tau)]dt +$$

$$+ [B_0\tilde{x}(t) + B_1\tilde{x}(t-\tau)]d\omega(t),$$

где $\Phi(t)$, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(t-\tau)$ определены в (5).

Лемма 2. *Пусть* $x(t)$ — *решение системы* (1) *и*

$$t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n+1)\tau, \quad n \geq 0.$$

Тогда справедливо равенство

$$dx(t) = \left(Ax(t) + R_1[\tilde{x}(t)] - (E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)\right)dt +$$

$$+ \left(Bx(t) + R_2[\tilde{x}(t)]\right)d\omega(t), \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} R_1[\tilde{x}(t)] = -(E-D)^{-1}D\left\{\sum_{i=0}^{n} D^i\left[A_0\tilde{x}(t-i\tau) + A_1\tilde{x}\left(t-(i+1)\tau\right)\right] + A_1\tilde{x}(t)\right\}, \\ R_2[\tilde{x}(t)] = -(E-D)^{-1}D\left\{\sum_{i=0}^{n} D^i\left[B_0\tilde{x}(t-i\tau) + B_1\tilde{x}\left(t-(i+1)\tau\right)\right] + B_1\tilde{x}(t)\right\}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\Phi(t) = D\dot{\tilde{x}}(t - (n+1)\tau) + \dot{\tilde{x}}(t - n\tau),$$

$$\tilde{x}(t-n\tau) = x(t_0) - x(t-(n+1)\tau), \quad \tilde{x}(t-(n+1)\tau) = x(t-(n+1)\tau) - x(t_0-\tau).$$

Доказательство. *Пусть* $x(t)$ *— решение системы* (1). *Можно записать*

$$dx(t) = \tilde{D}\, d\tilde{x}(t) + [Ax(t) + \tilde{A}\,\tilde{x}(t)]dt + $$
$$+ [Bx(t) + \tilde{B}\,\tilde{x}(t)]d\omega(t),$$

где

$$\tilde{D} = -(E-D)^{-1}D, \quad A = (E-D)^{-1}(A_0 + A_1), \quad B = (E-D)^{-1}(B_0 + B_1),$$

$$\tilde{A} = -(E-D)^{-1}A_1, \quad \tilde{B} = -(E-D)^{-1}B_1, \quad \tilde{x}(t) = x(t) - x(t-\tau).$$

Используя равенство (4), получаем

$$dx(t) = \tilde{D}\Bigg[D^n\Phi(t)dt + \sum_{i=0}^{n} D^i\Big\{\big[A_0\tilde{x}(t-i\tau) + $$

$$+A_1\tilde{x}\big(t-(i+1)\tau\big)\big]dt + \big[B_0\tilde{x}(t-i\tau) + B_1\tilde{x}\big(t-(i+1)\tau\big)\big]d\omega(t)\Big\}\Bigg] + $$

$$+ [Ax(t) + \tilde{A}\,\tilde{x}(t)]dt + [Bx(t) + \tilde{B}\,\tilde{x}(t)]d\omega(t)$$

или

$$dx(t) = -(E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)dt - \sum_{i=0}^{n}(E-D)^{-1}D^{i+1}\{[A_0\tilde{x}(t-i\tau) + $$

$$+ A_1\tilde{x}(t-(i+1)\tau)]dt + [B_0\tilde{x}(t-i\tau) + B_1\tilde{x}(t-(i+1)\tau)]d\omega(t)\} + $$

$$+ [Ax(t) + \tilde{A}\,\tilde{x}(t)]dt + [Bx(t) + \tilde{B}\,\tilde{x}(t)]d\omega(t).$$

Отсюда вытекает (6).

Лемма 3. *Пусть для решения системы* (1) *существует* $t \ge t_0$ *такое, что при всех* $s\colon t_0 - \tau \le s < t$ *выполняется* $M\{v(x(s))\} < M\{v(x(t))\}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$M\{x^T(t)HR_1[\tilde{x}(t)]\} < [|H\tilde{D}|(|A_0| + |A_1|) \times$$

$$\times (1 - |D|)^{-1} + |H\tilde{D}A_1|]\,(1 + \varphi(H))M\{|x(t)|^2\}, \qquad (8)$$

где $R_1[\tilde{x}(t)]$ *определено в* (7),

$$\varphi(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H), \quad \lambda_{\max}(\cdot), \quad \lambda_{\min}(\cdot)$$

— наибольшее и наименьшее собственные числа матриц.

Доказательство. Справедливы соотношения

$$M\{x^T(t)HR_1[\tilde{x}(t)]\} = M\left\{-x^T(t)H(E-D)^{-1}D\left(\sum_{i=0}^{n} D^i[A_0\tilde{x}(t-i\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + A_1\tilde{x}(t-(i+1)\tau)] + A_1\tilde{x}(t)\right\} \le M\left\{\left|H(E-D)^{-1}D\right|\sum_{i=0}^{n}\left|D^i\right|\left|x(t)\right| \times\right.$$

$$\times [|A_0|\,|\tilde{x}(t-i\tau)| + |A_1|\,|\tilde{x}(t-(i+1)\tau)|] + |H(E-D)^{-1}DA_1|\,|x(t)|\,|\tilde{x}(t)|.$$

В силу условий леммы для квадратичной формы $v(x)$ справедлива оценка

$$\lambda_{\min}(H)M\{|x(s)|^2\} \le M\{v(x(s))\} <$$

$$< M\{v(x(t))\} \leq \lambda_{\max}(H) M\{|x(t)|^2\}.$$

Поэтому

$$M\{|x(s)|^2\} < \varphi(H) M\{|x(t)|^2\}, \quad s < t. \tag{9}$$

Используя неравенство (9) и соотношение

$$|\tilde{x}(t - i\tau)| \leq |x(t - i\tau)| + |x(t - (i+1)\tau)|, \tag{10}$$

получаем

$$M\{x^T(t) H R_1[\tilde{x}(t)]\} < \Bigg[|H\tilde{D}| (|A_0| + |A_1|) \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n} |D|^i + \left|H\tilde{D}A_1\right| \Bigg] (1 + \varphi(H)) M\{|x(t)|^2\}.$$

Поскольку $|D| < 1$, выполняется (7).

Лемма 4. *Пусть для решения $x(t)$ системы* (1) *существует $t > t_0$ такое, что при всех s: $t_0 - \tau \leq s < t$ выполняется $M\{v(x(s))\} < M\{v(x(t))\}$. Тогда справедливо неравенство*

$$M\{x^T(t) B^T H R_2[\tilde{x}(t)]\} < [|B^T H \tilde{D}| (|B_0| + |B_1|) \times$$

$$\times (1 - |D|)^{-1} + |B^T H \tilde{D} B_1|] (1 + \varphi(H)) M\{|x(t)|^2\}, \tag{11}$$

где $R_2[\tilde{x}(t)]$ определено в (7).

Доказательство. Справедливы соотношения

$$M\{x^T(t) B^T H R_2[\tilde{x}(t)]\} = M\Bigg\{ -x^T(t) B^T H (E - D)^{-1} D \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{n} D^i \Big[B_0 \tilde{x}(t - i\tau) + B_1 \tilde{x}\big(t - (i+1)\tau\big) \Big] + B_1 \tilde{x}(t) \right\} \leq$$

$$\leq M\Bigg\{ |B^T H (E - D)^{-1} D| \sum_{i=0}^{n} |D|^i |x(t)| [|B_0| |\tilde{x}(t - i\tau)| +$$

$$+ |B_1| |\tilde{x}(t - (i+1)\tau)|] + |B^T H (E - D)^{-1} D B_1| |x(t)| |\tilde{x}(t)| \Bigg\}.$$

Используя соотношения (9), (10), получаем (11).

Лемма 5. *Пусть для решения $x(t)$ системы* (1) *существует $t > t_0$ такое, что при всех s: $t_0 - \tau \leq s < t$ выполняется $M\{v(x(s))\} < M\{v(x(t))\}$. Тогда справедливо*

$$M\{R_2^T[\tilde{x}(t)] H R_2[\tilde{x}(t)]\} < 4 |\tilde{D}^T H \tilde{D}| \varphi(H) \times$$

$$\times [(|B_0| + |B_1|)(1 - |D|)^{-1} + |B_1|]^2 M\{|x(t)|^2\}, \tag{12}$$

где $R_2[\tilde{x}(t)]$ определено в (7).

Доказательство. Проведем следующие преобразования:

$$M\{R_2^T[\tilde{x}(t)] H R_2[\tilde{x}(t)]\} = M\Bigg\{ \Bigg(\sum_{i=0}^{n} D^i [B_0 \tilde{x}(t - i\tau) +$$

$$+ B_1\tilde{x}(t-(i+1)\tau)] + B_1\tilde{x}(t)\Bigg)^T [(E-D)^{-1}D]^T H(E-D)^{-1}D\Bigg(\sum_{i=0}^{n} D^i[B_0 \times$$

$$\times \tilde{x}(t-i\tau) + B_1\tilde{x}(t-(i+1)\tau)] + B_1\tilde{x}(t)\Bigg)\Bigg\} \le |\tilde{D}^T H\tilde{D}| \times$$

$$\times M\left\{\left|\sum_{i=0}^{n} D^i[B_0\tilde{x}(t-i\tau) + B_1\tilde{x}(t-(i+1)\tau)] + B_1\tilde{x}(t)\right|^2\right\}.$$

Используя соотношения (9), (10), получаем (12).

Лемма 6. *Пусть* $t_0 + n\tau \le t < t_0 + (n+1)\tau$, $n \ge 0$. *Тогда для решения* $x(t)$ *системы* (1) *справедливо неравенство*

$$M\{x^T(t)H(E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)\} \le |H\tilde{D}|\,|D|^n \times$$

$$\times [\alpha M\{|x(t)|^2\} + 4(1+|D|)^2 \|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\alpha], \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Поскольку

$$|\Phi(t)| = |D\dot{\tilde{x}}(t-(n+1)\tau) + \dot{\tilde{x}}(t-n\tau)| \le 2(1+|D|)\,\|\dot{x}(t_0)\|_\tau,$$

то для произвольного $0 < \alpha < \infty$ будет выполняться

$$M\{x^T(t)H(E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)\} \le |H(E-D)^{-1}D|\,|D|^n \times$$

$$\times \left\{\sqrt{\alpha}\,|x(t)|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|\Phi(t)|\right\} \le |H(E-D)^{-1}D|\,|D|^n \times$$

$$\times [\alpha M\{|x(t)|^2\} + 4(1+|D|)^2 \|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\alpha].$$

Лемма 7. *Пусть при* $t_0 - \tau \le s < t$ *выполняется* $M\{v(x(s))\} < \varepsilon\lambda_{\min}(H)$. *Если при* $s = t$

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} < -\beta M\{|x(t)|^2\}, \quad \beta > 0,$$

то при $\xi > 0$ *справедливо соотношение*

$$M\{v(x(t+\xi))\} < \varepsilon\lambda_{\min}(H). \tag{14}$$

Доказательство. Используя неравенства квадратичных форм, получаем

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} < -\frac{\beta}{\lambda_{\max}(H)}M\{v(x(t))\}.$$

Проинтегрируем последнее соотношение:

$$M\{v(x(t+\xi))\} < M\{v(x(t))\}\exp\left\{-\frac{\beta}{\lambda_{\max}(H)}\xi\right\}.$$

Учитывая условия леммы и непрерывность, получаем (14).

Теорема. *Пусть существуют положительно определенные матрицы* H *и* C, *удовлетворяющие уравнению* (3), *при которых выполняется неравенство*

$$L(H) > 0, \tag{15}$$

где

$$L(H) = \lambda_{\min}(C) - 2[|H\tilde{D}|(|A_0| + |A_1|)(1-|D|)^{-1} +$$

$$+ |H\tilde{D}A_1| + |B^T H\tilde{D}|(|B_0| + |B_1|)(1-|D|)^{-1} + |B^T H\tilde{D}B_1|](1+\varphi(H)) -$$

$$-4|\,\tilde{D}^T H\tilde{D}\,|\,[(|\,B_0\,|+|\,B_1\,|)(1-|\,D\,|)^{-1}+|\,B_1\,|]^2\varphi(H).$$

Тогда для произвольного решения $x(t)$ *системы* (1) *будет выполняться* $M\{|\,x(t)\,|_1^2\}<\varepsilon$ *при* $t>t_0$, *если* $\|\,x(t_0)\,\|_\tau^2<\delta_1(\varepsilon)$ *и* $\|\,\dot{x}(t_0)\,\|_\tau^2<\delta_2(\varepsilon)$, *где*

$$\delta_1(\varepsilon) = R\varepsilon/\varphi(H),$$

$$\delta_2(\varepsilon) = \left[\frac{L(H)}{8(1+|D|)|\,H(E-D)^{-1}D\,|}\right]^2\frac{R\varepsilon}{\varphi(H)}, \tag{16}$$

$$R = \min\left\{1, \left[L(E)+\frac{L(H)\,|(E-D)^{-1}D\,|}{|\,H(E-D)^{-1}D\,|\sqrt{\varphi(H)}}\right]^2\right\},$$

$$L(E) = \lambda_{\max}(A^T+A+B^TB)+4[|\,\tilde{D}\,|\,(|\,A_0\,|+|\,A_1\,|)\times$$

$$\times(1-|\,D\,|)^{-1}+|\,\tilde{D}A_1\,|+|\,B^T\tilde{D}\,|\,(|\,B_0\,|+|\,B_1\,|)(1-|\,D\,|)^{-1}+|\,B^T\tilde{D}B_1\,|]+$$

$$+4|\,\tilde{D}\,|^2[(|\,B_0\,|+|\,B_1\,|)(1-|\,D\,|)^{-1}+|\,B_1\,|]^2.$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — произвольное решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\|\,x(t_0)\,\|_\tau^2<\delta_1$ (по предположению начальной является детерминированная непрерывно дифференцируемая функция). Если δ_1 выбрать, исходя из (16), то при $t_0-\tau\le s\le t_0$ будем иметь $M\{v(x(s))\}<$ $<R\varepsilon\lambda_{\min}(H)$. Покажем, что это сохранится и при $t>t_0$. Пусть, от противного, это не так и при некотором $t>t_0$: $M\{v(x(t))\}<R\varepsilon\lambda_{\min}(H)$. Вычислим полную производную в силу системы от математического ожидания функции Ляпунова $v(x)=x^THx$. Рассмотрим стохастический дифференциал функции $v(x)$ вдоль решений системы

$$dx(t) = f(t)dt+\sigma(t)d\omega(t). \tag{17}$$

Как следует из формулы Ито [3, 4],

$$dv(x(t)) = [f^T(t)Hx(t)+x^T(t)Hf(t)+\sigma^T(t)H\sigma(t)]dt+$$

$$+[\sigma^T(t)Hx(t)+x^T(t)H\sigma(t)]d\omega(t).$$

Проинтегрируем последнее соотношение в пределах от t_0 до t:

$$v(x(t)) = v(x(t_0))+\int_{t_0}^{t}[f^T(s)Hx(s)+x^T(s)Hf(s)+$$

$$+\sigma^T(s)H\sigma(s)]ds+\int_{t_0}^{t}[\sigma^T(s)Hx(s)+x^T(t)H\sigma(s)]\,d\omega(s).$$

Вычислив математическое ожидание и продифференцировав, получим

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} = M\{f^T(t)Hx(t)+x^T(t)Hf(t)+\sigma^T(t)H\sigma(t)\}.$$

Если в качестве системы взять (6), то будем иметь

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} = M\{[Ax(t)+R_1[\tilde{x}(t)]-(E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)]^T\times$$

$$\times Hx(t) + x^T(t)H[Ax(t) + R_1[\tilde{x}(t)] - (E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)] +$$

$$+ [Bx(t) + R_2[\tilde{x}(t)]]^T H[Bx(t) + R_2[\tilde{x}(t)]]\}.$$

Поскольку H определяется уравнением Сильвестра (3), то можно записать

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} \le -\lambda_{\min}(C)M\{|x(t)|^2\} +$$

$$+ 2M\{x^T(t)HR_1[\tilde{x}(t)]\} - 2M\{x^T(t)H(E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)\} +$$

$$+ 2M\{x^T(t)B^T HR_2[\tilde{x}(t)]\} + M\{R_2^T[\tilde{x}(t)]HR_2[\tilde{x}(t)]\}.$$

Используя неравенства (8), (11) — (13), получаем

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} < [-\lambda_{\min}(C) + 2[|H\tilde{D}|(|A_0| + |A_1|)(1-|D|)^{-1} +$$

$$+ |H\tilde{D}A_1|](1+\varphi(H)) + 2[|B^T H\tilde{D}|(|B_0| + |B_1|)(1-|D|)^{-1} + |B^T H\tilde{D}B_1|] \times$$

$$\times (1+\varphi(H)) + 4|\tilde{D}^T H\tilde{D}|[(|B_0| + |B_1|)(1-|D|)^{-1} + |B_1|]^2\varphi(H) +$$

$$+ 2\alpha|H(E-D)^{-1}D||D|^n]M\{|x(t)|^2\} +$$

$$+ 8|H(E-D)^{-1}D||D|^n(1+|D|)^2\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\alpha.$$

Используя обозначения $L(H)$, получаем

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} < -[L(H) - 2\alpha|H(E-D)^{-1}D||D|^n]M\{|x(t)|^2\} +$$

$$+ 8|H(E-D)^{-1}D|(1+|D|)^2|D|^n\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\alpha.$$

Положим

$$\alpha = \xi L(H)/2|H(E-D)^{-1}D||D|^n,$$

где $0 < \xi < 1$ — произвольная фиксированная постоянная. Получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}M\{v(x(t))\} < -(1-\xi)L(H)M\{|x(t)|^2\} +$$

$$+ 16|H(E-D)^{-1}D|^2(1+|D|)^2|D|^{2n}\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\xi L(H).$$

Если выполняется

$$\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2 < \xi(1-\xi)\left(\frac{L(H)}{4(1+|D|)|H(E-D)^{-1}D|}\right)^2 M\{|x(t)|^2\},$$

то полная производная математического ожидания функции Ляпунова в момент t будет отрицательно определенной. А для этого достаточно, чтобы $\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2 < \delta_2(\varepsilon)$, где $\delta_2(\varepsilon)$ выбирается из (16). Воспользовавшись неравенством (13) леммы 7, получим $M\{|x(t)|^2\} < R\varepsilon,\ t > t_0$.

Рассмотрим оценку величины $\frac{d}{dt}M\{|x(t)|^2\}$. Ее можно вычислить из зависимости (18) при $H = E$, т. е.

$$\frac{d}{dt}M\{|x(t)|^2\} < \lambda_{\max}(A^T + A + B^T B)M\{|x(t)|^2\} +$$
$$+ 2M\{x^T(t)R_1[\tilde{x}(t)]\} - 2M\{x^T(t)(E-D)^{-1}D^{n+1}\Phi(t)\} +$$
$$+ 2M\{x^T(t)HR_2[\tilde{x}(t)]\} + M\{|R_2[\tilde{x}(t)]|^2\}.$$

Используя обозначения $L(E)$, получаем

$$\frac{d}{dt}M\{|x(t)|^2\} < [L(E) - 2\alpha|(E-D)^{-1}D||D|^n]M\{|x(t)|^2\} +$$
$$+ 8|(E-D)^{-1}D|(1+|D|)^2|D|^n\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\alpha.$$

И так как $M\{|x(t)|^2\} < R\varepsilon$, $|D| < 1$, $n \geq 0$, то

$$\frac{d}{dt}M\{|x(t)|^2\} < [L(E) + 2\alpha|(E-D)^{-1}D|]R\varepsilon +$$
$$+ 8|(E-D)^{-1}D|(1+|D|)^2\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\alpha.$$

Для того чтобы $\frac{d}{dt}M\{|x(t)|^2\} < \varepsilon$, $t > t_0$, достаточно выполнения

$$[L(E) + 2\alpha|(E-D)^{-1}D|]R\varepsilon + 8|(E-D)^{-1}D|(1+|D|)^2\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2/\alpha \leq \varepsilon.$$

Поскольку $\|\dot{x}(t_0)\|_\tau^2 < \delta_2(\varepsilon)$, где $\delta_2(\varepsilon)$ выбирается из (16), то положим

$$R \leq \left[L(E) + 2\alpha|(E-D)^{-1}D| + \frac{|(E-D)^{-1}D|L^2(H)}{8\alpha|H(E-D)^{-1}D|^2\varphi(H)}\right]^{-1}.$$

Выбирая α из условия максимума R, получаем

$$\alpha = L(H)/4|H(E-D)^{-1}D|\sqrt{\varphi(H)}.$$

Отсюда

$$R \leq [L(E) + L(H)|(E-D)^{-1}D|/|H(E-D)^{-1}D|\sqrt{\varphi(H)}]^{-1}.$$

Теорема доказана.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
3. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
4. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. – 1960. – **24**, вып. 5. – С. 809 – 823.
6. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 206 с.
7. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эридитарных систем. – М.: Наука, 1988. – 112 с.

Получено 28. 01. 91