УДК 518:517.948

Л. И. Каранджулов, канд. мат. наук
(Ин-т прикл. математики и информатики при Техн. ун-те, София)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

By using semiinverse matrices and generalized Green's matrix, we construct the solutions of boundary-value problems for linear and weakly perturbed nonlinear systems of ordinary differential equations with a parameter in boundary conditions.

За допомогою напівобернених матриць та узагальненої матриці Гріна побудовано розв'язок лінійних та слабкозбурених нелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь з параметром в крайових умовах.

1. Рассмотрим задачу о структуре общего решения в пространстве n-мерных непрерывно дифференцируемых вектор-функций $z = z(t) = \mathrm{col}\,(z_1(t), \ldots, z_n(t))$ на интервале $[a, b]$ линейной неоднородной краевой задачи вида

$$\dot{z} = A(t)z + J(t), \tag{1}$$

$$l_0 z(\cdot) = h, \quad t \in [a, b], \tag{2}$$

где $A(t)$ — $n \times n$-мерная матрица, компоненты которой — вещественные непрерывные на $[a, b]$ функции; $J(t)$ — n-мерный вектор-столбец из класса непрерывных на $[a, b]$ функций; n — m-мерный вектор-столбец констант из E_m; l_0 — линейный функционал, определенный в пространстве n-мерных непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ вектор-функций $z(t)$.

Общее решение задачи (1), (2) с помощью псевдообратных и полуобратных матриц получено соответственно в [1, 2]. В настоящей работе с помощью аппарата полуобратных матриц и обобщенной матрицы Грина [1] найдено решение как задачи (1), (2), так и задач, которые содержат малое нелинейное возмущение в (1) или граничные условия (2) содержат параметр.

Введем такие обозначения: $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица системы $\dot{z} = A(t)z$; $D_0 = l_0 X(\cdot)$ — $m \times n$-матрица; D_0^- — любая из полуобратных матриц относительно матрицы D_0 [2, 3]; E – единичная матрица; $P_{D_0} = E - D_0 D_0^-$; $\overline{X}(t) = X(t)(E - D_0^- D_0)$;

$$K(t, s) = \frac{1}{2} X(t) X^{-1}(s)\, \mathrm{sign}\,(t - s); \qquad \bar{z}(t) = \int_a^b K(t, s) J(s)\, ds$$

— частное решение (1).

Для устранения неоднозначности в выборе частного решения краевой задачи (1), (2) будем определять его из условия ортогональности на $[a, b]$ относительно любого решения $z_0(t, u) = z_0(t)u = \overline{X}(t)u$ однородной краевой задачи $\dot{z} = A(t)z$, $l_0 z(\cdot) = 0$, т. е. с помощью систем $B_0 u = T_0$, где

$$B_0 = \int_a^b z_0^T(t) z_0(t)\, dt,$$

$$T_0 = -\int_a^b\int_a^b \overline{X}^T(t) K(t, s) J(s)\, ds - \int_a^b \overline{X}^T(t)\, X(t)[h - l_0 \bar{z}(\cdot)]\, dt.$$

Обозначим через $G(t, s)$ единственную обобщенную матрицу Грина краевой задачи (1), ортогональную к $\overline{X}^T(t)$:

$$G(t,s) = G_0(t,s) - X(t)B_0^{-1}\int_a^b X^T(t)G_0(t,s)\,dt,$$

$$G_0(t,s) = K(t,s) - X(t)D_0^- l_0 K(\cdot, s).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $P_{D_0}[h - l_0\bar{z}(\cdot)] = 0$;

2) $\det B_0 \neq 0$.

Тогда общее решение краевой задачи (1), (2) *можно записать в виде*

$$z(t,c) = \overline{X}(t)c + \bar{z}_0(t), \tag{3}$$

где c *— произвольный вектор,* $\bar{z}_0(t)$ *имеет вид*

$$\bar{z}_0(t) = \int_a^b G(t,s)J(s)\,ds + X(t)S\,D_0^-\,h, \tag{4}$$

а

$$S = E - (E - D_0^- D_0)B_0^{-1}\int_a^b \overline{X}^T(t)\,X(t)\,dt.$$

2. Предположим, что пара матриц (A, B) упорядоченная, т. е. $(A,B) \neq \neq (B,A)$.

Определение [2]. *Пара матриц* (A,B) *называется вполне совершенной, если* $(E - AA^-)B = 0$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{z} = A(t)z + J(t), \tag{5}$$

$$(l_0 + \lambda l_1)\dot{z}(\cdot) = h, \tag{6}$$

где $l_1 z : C^{-1}[a,b] \to R^m$, l_0, l_1 — линейные функционалы; λ — параметр, $\lambda \in \in [0, 1]$.

Введем обозначения: $D_1 = l_1 X(\cdot)$, $P_{D_1} = E - D_1 D_1^-$ — $(m\times m)$-матрица, $\tilde{X}(t,\lambda) = X(t)(\lambda E + D_1^- D_0)^{-1}$, $\tilde{X}(t,\lambda) = \tilde{X}(t,\lambda)(E - D_1^- D_1)$.

Можно показать, что задача (5), (6) имеет непрерывное решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$P_{D_1}[h - (l_0 + \lambda l_1)\,\bar{z}(\cdot)] = 0, \tag{7}$$

если (D_1, D_0) — вполне совершенная пара матриц и λ не является собственным числом матрицы $-D_1^- D_0$.

Частное решение краевой задачи (5), (6), которое удовлетворяет условию ортогональности на $[a,b]$ относительно любого решения краевой задачи $\dot{z} = = A(t)z$, $(l_0 + \lambda l_1)z(\cdot) = 0$, находим с помощью систем $B_{00}(\lambda)u = T_{00}(\lambda)$. Оно имеет вид

$$\bar{z}_1(t,\lambda) = \int_a^b G_1(t,s)J(s)\,ds + X(t)S_1 D_1^- h, \tag{8}$$

где $G_1(t,s)$ — обобщенная $(n\times n)$-матрица Грина краевой задачи (5), (6) при $\lambda\in[0,1]$

$$G_1(t,s) = G_0(t,s) - \overline{\overline{X}}(t,\lambda)B_{00}^{-1}(\lambda)\int\limits_a^b \overline{\overline{X}}^T(t,\lambda)G_{10}(t,s)\,dt,$$

$$G_{10}(t,s) = K(t,s) - \tilde{X}(t,\lambda)D_1^-(l_0+\lambda l_1)K(\cdot,s),$$

а

$$S_1 = E - (\lambda E + D_1^- D_0)^{-1}(E - D_1^- D_1)B_{00}^{-1}(\lambda)\int\limits_a^b \overline{\overline{X}}^T(t,\lambda)X(t,\lambda)\,dt,$$

$$B_{00}(\lambda) = \int\limits_a^b \overline{\overline{X}}^T(t,\lambda)\overline{\overline{X}}(t,\lambda)\,dt,$$

$$T_{00}(\lambda) = -\int\limits_a^b\int\limits_a^b \overline{\overline{X}}(t,\lambda)K(t,s)J(s)\,ds\,dt - \int\limits_a^b \overline{\overline{X}}^T(t,\lambda)\tilde{X}(t,\lambda)D_1^-[h-(l_0+\lambda l_1)\overline{z}]\,dt.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*
1) (D_1, D_0) — *вполне совершенная пара матриц;*
2) λ — *не собственное число матрицы* $-D_1^- D_0$;
3) *справедливо* (7);
4) *оператор* $B_{00}(0)$ *непрерывно обратим.*

Тогда, если при всех $\lambda\in[0,1]$ *и любом и существует постоянная* $p\ge 0$ *такая, что* $\|B_{00}(\lambda)u\|\ge p\|u\|$, *то общее решение краевой задачи* (5), (6) *можно записать следующим образом:*

$$z(t,c,\lambda) = \overline{\overline{X}}(t,\lambda)c + \overline{z}_1(t,\lambda), \tag{9}$$

где $\overline{z}_1(t,\lambda)$ *имеет вид* (8), *а* c — *произвольный вектор.*

Доказательство теоремы следует из сказанного выше. Четвертое условие гарантирует непрерывную обратимость линейно-непрерывного оператора $B_{00}(\lambda)$ при $\lambda\in[0,1]$.

3. Рассмотрим краевую задачу вида

$$\dot{z}(t) = A(t)z + J(s) + \varepsilon f(t,z,\varepsilon), \tag{10}$$

$$(l_0+\lambda l_1)z(\cdot) = h, \tag{11}$$

где ε — малый положительный параметр; $\lambda\in[0,1]$; $f(t,z,\varepsilon)$ — нелинейная по z n-мерная функция класса C^{010} в $[a,b]\times L\times[0,\varepsilon_0]$, $L\subset E_n$ и L : $\|z-z^*\|\le q$.

Пусть $z^*(t,\lambda)$ — решение соответствующей (10), (11) краевой задачи при $\varepsilon=0$. Тогда согласно теореме 2 $z^*(t,\lambda)$ имеет вид (9):

$$z^*(t,c^*,\lambda) = \overline{\overline{X}}(t,\lambda)c^* + \overline{z}_1^*(t,\lambda). \tag{12}$$

Поставим задачу о нахождении непрерывного решения $z(t,\varepsilon,\lambda)$ системы (10), (11) из класса $C[\varepsilon]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ и $C[\lambda]$, $\lambda\in[0,1]$. Заметим, что при $\varepsilon=0$ имеем одно из решений (12).

Эта задача рассматривалась для системы (10) и $l_0 z(\cdot) = h$ в [1] на базе псевдообратных матриц. Изучались критические и некритические случаи, а исследование сходимости предложенных алгоритмов построения решения и оценки области сходимости совершалось с помощью конечных мажорирующих уравнений Ляпунова [4]. В [5] без введения обобщенной матрицы Грина строится итерационный процес, когда краевые условия (11) имеют вид $Mz(a) + Nz(b) + \varepsilon\nu(z(a), z(b), \varepsilon) = 0$, M, N — $(n \times n)$-матрицы, ν — n-мерный вектор и $\operatorname{rank}(M \vdots N) = n$, а задача $\dot{z} = A(t)z$, $Mz(a) + Nz(b) = 0$ имеет только нулевое решение.

В этом пункте на базе полуобратных матриц строится итерационная процедура для конструирования решения $z(t, \varepsilon, \lambda)$ на основе результатов [6] и [1, 4].

Для определения вектора c^* воспользуемся необходимым условием существования решения задачи (10), (11) [1], которое в этом случае имеет вид

$$P_{D_0}(l_0 + \lambda l_1) \int_a^b K(\cdot, s) f(s, z^*(s, c^*, \lambda), 0)\, ds = 0, \qquad \lambda \in [0, 1]. \tag{13}$$

Выполнив в (10) замену переменных $z(t, \lambda, \varepsilon) = z^*(t, \lambda) + x(t, \lambda, \varepsilon)$, $x(t, \lambda, 0) = 0$, переходим к задаче

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \varepsilon[f(t, z^*, 0) + f_z(t, z^*, 0)x + R(t, x, \varepsilon)], \\ (l_0 + \lambda l_1)x(\cdot) = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

где нелинейная вектор-функция $R(t, x, \varepsilon)$ принадлежит классу непрерывных по совокупности аргументов функций в области $\|x\| \le q$, $t \in [a, b]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\lambda \in [0, 1]$. При этом $R(t, 0, 0) = 0$, $R_x(t, 0, 0) = 0$.

Для решения $x(t, \lambda, \varepsilon)$ задачи (14) имеем следующее выражение:

$$x(t, \lambda, \varepsilon) = \overline{\overline{X}}(t, \lambda)\, c + x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon), \tag{15}$$

где неизвестная вектор-функция $x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon)$ определяется следующим образом:

$$x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) = \varepsilon \int_a^b G_1(t, s)[f(s, z^*, 0) + f_z(s, z^*, 0)x(s, \lambda, \varepsilon) + R(s, x(s, \lambda, \varepsilon), \varepsilon)]\, ds. \tag{16}$$

При это выполняется условие типа (7):

$$P_{D_1}(l_0 + \lambda l_1)\overline{\overline{z}}(\cdot) = 0. \tag{17}$$

Из этого условия, принимая во внимание соотношение

$$\overline{\overline{z}}(t) = \int_a^b K(t, s)[f(s, z^*, 0) + f_z(s, z^*, 0)x(s, \lambda, \varepsilon) + R(s, x(s, \lambda, \varepsilon), \varepsilon)]\, ds$$

и (15), получаем неизвестный постоянный вектор $c = c(\lambda, \varepsilon)$.

Введем обозначения

$$B_{000}(\lambda) = P_{D_1}(l_0 + \lambda l_1) \int_a^b K(\cdot, s) f_z(s, z^*, 0)\, \overline{\overline{X}}(s, \lambda)\, ds,$$

$$T_{000}(x^{(1)}, c, \lambda, \varepsilon) = -P_{D_1}(l_0 + \lambda l_1) \int_a^b K(\cdot, s)\,[f_z(s, z^*, 0)\,x^{(1)}(s, \lambda, \varepsilon) +$$
$$+ R(s, \overline{\overline{X}}(s)c) + x^{(1)}(s, \lambda, \varepsilon), \varepsilon]\,ds. \tag{18}$$

Использовав (17), для отыскания вектора c получим нелинейную относительно c систему

$$B_{000}(\lambda)c = T_{000}(x^{(1)}, c, \lambda, \varepsilon). \tag{19}$$

Из вида линейного матричного оператора $B_{000}(\lambda)$ имеем, что если $B_{000}(\lambda)$ непрерывно обратим, т. е. при всех $\lambda \in [0, 1]$ и любом c существует положительная постоянная m такая, что справедливо неравенство $\| B_{000}(\lambda)\,c \| \geq m \| c \|$, то оператор $B_{000}^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in [0, 1]$ существует и ограничен. В дальнейшем будем предполагать существование этого обратного оператора.

Пусть L_1 и L_2 — следующие матричные операторы:

$$\begin{aligned} L_1\psi(t) &= -B_{000}^{-1}(\lambda)P_{D_1}(l_0 + \lambda l_1) \int_a^b K(\cdot, s)\,\psi(s)\,ds, \\ L_2\psi(t) &= \int_a^b G_1(t, s)\,\psi(s)\,ds \end{aligned} \tag{20}$$

и предположим, что для любой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$ и $\lambda \in [0, 1]$ справедливы оценки

$$|||\, L_1\psi(t)\,||| \leq m_1\, |||\,\psi(t)\,|||, \quad |||\, L_2\psi(t)\,||| \leq m_2\, |||\,\psi(t)\,|||, \tag{21}$$

где $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ — постоянные, а также справедлива оценка

$$|||\, \overline{\overline{X}}(t, \lambda)\,||| \leq M, \quad \lambda \in [0, 1], \quad t \in [a, b]. \tag{22}$$

Теорема 3. *Пусть краевая задача* (10), (11) *при* $\varepsilon = 0$ *имеет решение* $z^*(t, \lambda) = z^*(t, c^*, \lambda)$ *вида* (12), *где* c^* *удовлетворяет условию* (13). *Тогда решение краевой задачи* (14) *существует и единственно, если* $[B_{000}(\lambda)]^{-1}$, $\lambda \in [0, 1]$, *существует, причем* $x(t, \lambda, \varepsilon) \in c[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\lambda \in [0, 1]$ *обращается в нуль при* $\varepsilon = 0$. *Это решение можно определить с помощью сходящегося на* $[0, \varepsilon_0]$ *и* $[0, 1]$ *итерационного процесса*

$$\begin{cases} c_k = L_1[f_z(t, z^*, 0)\,x_k^{(1)} + R(t, x_k, \varepsilon)], \\ x_{k+1}^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) = \varepsilon L_2\left\{f(t, z^*, 0) + f_z(t, z^*, 0)[\overline{\overline{X}}(t, \lambda)c_k + x_k^{(1)}] + R(t, x_k, \varepsilon)\right\}, \\ x_{k+1}(t, \lambda, \varepsilon) = \overline{\overline{X}}(t, \lambda)c_k + x_{k+1}^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon), \\ x_0(t, \lambda, \varepsilon) = x_0^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) = 0, \\ k = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{23}$$

Краевая задача (10), (11) *имеет решение* $z(t, \lambda, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\lambda \in [0, 1]$, *обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в* $z^*(t, \lambda)$, *и является пределом последовательности*

$$z_{k+1}(t, \lambda, \varepsilon) = z^*(t, \lambda) + x_{k+1}(t, \lambda, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводим с помощью метода конечных мажорирующих уравнений Ляпунова [4, 1]. Учитывая (20), (21) и (22), краевую задачу (14) приводим к операторному виду

$$y(t, \lambda, \varepsilon) = L^{(1)}y + L^{(2)}F^{(1)}(y, t, \lambda, \varepsilon), \tag{24}$$

где введены обозначения

$$y(t, \lambda, \varepsilon) = \begin{bmatrix} x(t, \lambda, \varepsilon) \\ c(\lambda, \varepsilon) \\ x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) \end{bmatrix}, \quad L^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{X}(t, \lambda) & E \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix}, \quad F^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_z x^{(1)} + R \\ \varepsilon(f + f_z x + R) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ — линейные, ограниченные, а следовательно, непрерывные операторы. Векторная функция $F^{(1)}(y, t, \lambda, \varepsilon)$ непрерывна по t, λ и ε и дифференцируема по x. Непрерывность операторов $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ означает, что результат их действия на функции класса C является функцией этого класса. Из структуры оператора $L^{(1)}$ следует существование ограниченного обратного оператора $(E - L^{(1)})^{-1}$, где E — единичный оператор. Тогда (24) будет иметь вид

$$y = \tilde{L}F^{(1)}(y, t, \lambda, \varepsilon),$$

где $\tilde{L} = (E - L^{(1)})^{-1} L^{(2)}$. Ясно, что $\tilde{L}$ является линейным и ограниченным, т. е. непрерывным. Таким образом, (24) сводится в этом случае к системе того же типа. Тогда существуют последовательные приближения $y_k = \tilde{L}F^{(1)}(y_{k-1}, t, \lambda, \varepsilon)$, которые сходятся к единственному решению $y = y(t, \lambda, \varepsilon)$ (23). Теорема доказана.

Если в (10), (11) положить $\lambda = \varepsilon$, то граничное условие (11) примет вид $l_0 z(\cdot) = h - \varepsilon l_1 z(\cdot)$, и рассуждения проводятся, как в [1].

Если λ, ε — разные малые параметры, которые совпадают только при $\lambda = \varepsilon = 0$, то задача о нахождении непрерывного решения системы (10), (11) решается как в п. 3 с соответствующей разницей в отдельных моментах.

1. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
2. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 158 с.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М: Наука, 1982. – 269 с.
4. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М: Наука, 1979. – 431 с.
5. *Vejvoda O.* Perturbed boundary-value problems and their approximate solution // Symp. Num. Treatment of Ordinary Different. Equat. Integral and Integro-Different. Equat. – Rome, Basel: Birkhäuser Verlag, 1960. – P. 37 – 41.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М: Наука, 1980. – 495 с.

Получено 23.10.92