УДК 517.51

**В. О. Лівінський,** асп. (Ін-т математики АН України, Київ)

# ОДНЕ ЗАУВАЖЕННЯ СТОСОВНО ОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ *

A renewal method is suggested that enables one to renew a density for a given system of polynomials orthogonal with respect to this density in a special case.

Пропонується спосіб відновлення щільності за системою ортогональних відносно неї многочленів у деякому частковому випадку.

За мірою, що має всі моменти, легко знайти коефіцієнти ортонормованих відносно неї многочленів [1]. В даній роботі пропонується підхід до вирішення оберненої задачі: відновлення міри за системою ортонормованих відносно неї многочленів. Розглядається випадок мір еквівалентних мірі Лебега, щільності $p: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ яких (відносно міри Лебега) задовольняють нерівності

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{p(x-y)}{p(x)} \right)^2 p(x)\,dx < +\infty$$

для $y$ з множини, адитивна симетрична відносно нуля оболонка якої щільна в $\mathbb{R}$. Ідея відновлення такої міри полягає у побудові повного набору відношень зсувів її щільності, за яким остання легко визначається.

Нехай $p: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ — інтегровна за Лебегом функція, $\mu$ — міра, породжена вагою $p$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni \alpha \mapsto \mu(\alpha) = \int_\alpha p(x)\,dx$, де $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — $\sigma$-алгебра борелівських підмножин дійсної осі. Припускаємо існування всіх моментів міри $\mu$ та щільність многочленів у просторі $L_2(\mathbb{R}, \mu)$. Нехай $\{0, 1, \ldots\} = \mathbb{N}_0 \ni n \mapsto f_n$ — базис ортогональних многочленів простору $L_2(\mathbb{R}, \mu)$, тобто базис, одержаний ортогоналізацією послідовності степенів з наступним нормуванням за умови додатності старших коефіцієнтів. Ним визначається множина коефіцієнтів $\{c_{nk}: 0 \le k \le n \in \mathbb{N}_0\}$, які виникають у розкладі похідних базисних многочленів:

$$f'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Розглянемо систему многочленів $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto q_n$, визначену рівностями:

$$q_0 = 1/f_0, \quad q_{n+1}(y) = \int_0^y \sum_{k=0}^{n} c_{nk} q_k(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Відмітимо, що для побудови цих многочленів можна не знати міри $\mu$.

**Теорема 1.** *Нехай для деякого фіксованого* $y \in \mathbb{R}$ *збігається ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} q_n^2(y)$. *Тоді локально за мірою Лебега, тобто за мірою Лебега на кожному компакті, збігається ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) f_n$, *причому*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) f_n = \frac{p(\cdot - y)}{p(\cdot)} \,(\mathrm{mod}\, m). \tag{2}$$

* Робота частково підтримана Фондом фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки та технологій.

(Літерою $m$ тут і далі позначено міру Лебега на прямій.)

***Доведення.*** Зі збіжності $\sum_{n=0}^{\infty} q_n^2(y)$ випливає збіжність $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) f_n$ у просторі $L_2(\mathbb{R}, \mu)$, а відтак й локально за мірою Лебега. Залишилося довести рівність (2). Маємо рівності

$$q_0(y) = 1/f_0 = \int_{\mathbb{R}} f_0^2 d\mu / f_0 = \int_{\mathbb{R}} f_0 d\mu = \int_{\mathbb{R}} f_0(x+y) p(x) dx .$$

Нехай доведено, що $q_k(y) = \int_{\mathbb{R}} f_k(x+y) p(x) dx$ для всіх $k \le n \in \mathbb{N}_0$. Тоді

$$q_{n+1}(y) = \int_0^y \sum_{k=0}^{n} c_{nk} q_k(t) dt = \int_0^y \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \int_{\mathbb{R}} f_k(x+t) p(x) dx dt =$$

$$= \int_0^y \int_{\mathbb{R}} f'_{n+1}(x+t) p(x) dx dt = \int_{\mathbb{R}} \int_0^y f'_{n+1}(x+t) dt p(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f_{n+1}(x+y) - f_{n+1}(x)) p(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(x+y) p(x) dx.$$

Звідси

$$q_n(y) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) p(x-y) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{p(x-y)}{p(x)} f_n(x) d\mu(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

тобто $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto q_n(y)$ — коефіцієнти Фур'є функції $p(\cdot - y)/p(\cdot)$ відносно базису $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto f_n$ в $L_2(\mathbb{R}, \mu)$.

Нехай $Y$ — множина всіх $y \in \mathbb{R}$, для яких збігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_n^2(y)$, $Y'$ — її адитивна симетрична відносно нуля оболонка, тобто найменша симетрична замкнена відносно додавання множина, що містить $Y$. Тоді згідно з доведеною теоремою, виходячи з многочленів $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto f_n$, можемо побудувати $p(\cdot - y)/p(\cdot)$ для кожного $y \in Y$. Саме тому в теоремі 1 фігурує локальна збіжність за мірою Лебега така, що не залежить від невідомої міри $\mu$. Далі, згідно з рівностями

$$\frac{p(\cdot + y)}{p(\cdot)} = \left( \frac{p(\cdot + y - y)}{p(\cdot + y)} \right)^{-1}, \quad \frac{p(\cdot - u - v)}{p(\cdot)} = \frac{p(\cdot - u - v)}{p(\cdot - u)} \frac{p(\cdot - u)}{p(\cdot)}$$

одержуємо $p(\cdot - y)/p(\cdot)$ для $y \in Y'$. Надалі припускатимемо щільність $Y'$ в $\mathbb{R}$.

**Лема.** *Для будь-якої фундаментальної послідовності* $\mathbb{N} \ni n \mapsto y_n \in Y'$ *послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto p(\cdot - y_n)/p(\cdot)$ *збігається до* $p(\cdot - y)/p(\cdot)$ *локально за мірою Лебега.*

***Доведення.*** Справедлива рівність

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{p(x - y_n)}{p(x)} - \frac{p(x-y)}{p(x)} \right| d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} | p(x - y_n) - p(x-y) | dx.$$

Права частина її прямує до нуля при $y_n \to y$ для будь-якої інтегровної за Лебегом функції $p$. А зі збіжності в $L_1(\mathbb{R}, \mu)$ випливає локальна збіжність за мірою Лебега. Таким чином, внаслідок щільності $Y'$ в $\mathbb{R}$, визначаємо $p(\cdot - y)/p(\cdot)$ для кожного $y \in \mathbb{R}$. Маючи $p(x-y)/p(x)$ на $\mathbb{R}^2$, легко відновити шукану щільність

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{\mu(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \frac{p(x-y)}{p(x)}\, dy = f_0^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{p(x-y)}{p(x)}\, dy \pmod{m}. \tag{3}$$

Зауважимо, що ми не маємо $p(x-y)/p(x)$ як вимірної функції двох змінних. Але цього неважко досягти. Рівностями

$$\int_{\mathbb{R}^2} R(x,y) g(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{p(x-y)/p(x)}{1 + p(x-y)/p(x)} g(x,y) dx dy,$$

де $g$ пробігає $L_1(\mathbb{R}^2)$, визначається єдина вимірна за Лебегом функція двох змінних $R$. Для неї виконується рівність

$$\frac{p(x-y)}{p(x)} = \frac{R(x,y)}{1-R(x,y)} \pmod{m^2}.$$

Деякі додаткові відомості про функцію $p$, наприклад, її неперервність, роблять зайвим останнє зауваження.

Проілюструймо викладене на прикладі. Нехай $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto f_n$ — многочлени Ерміта, тобто многочлени, ортонормовані з вагою

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Для них маємо $f'_{n+1} = \sqrt{n+1}\,/\,\sigma^{-1} f_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тобто $c_{nk} = \sqrt{n+1}\,/\,\sigma^{-1}\delta_{nk}$, $0 \le k \le n \in \mathbb{N}_0$. Значить,

$$q_{n+1}(y) = \int_0^y \frac{\sqrt{n+1}}{\sigma} q_n(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Починаючи з $q_0 = 1 = 1/f_0$, маємо

$$q_1(y) = \frac{\sqrt{1}}{\sigma} \int_0^y q_0(t) dt = \frac{y^1}{\sigma^1\sqrt{1!}}, \quad q_2(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_0^y q_1(t) dt = \frac{y^2}{\sigma^2\sqrt{2!}} \ \ldots .$$

На $n$-му кроці

$$q_n(y) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \int_0^y q_{n-1}(t) dt = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \int_0^y \frac{t^{n-1}\, dt}{\sigma^{n-1}\sqrt{(n-1)!}} = \frac{y^n}{\sigma^n\sqrt{n!}}.$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{n} q_n(y) f_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f_n(x)}{\sqrt{n!}} \left(\frac{y}{\sigma}\right)^n,$$

як відомо, являє собою розклад твірної функції многочленів Ерміта: $\exp((x-a)y/\sigma^2 - y^2/2\sigma^2)$. Він збігається скрізь в $\mathbb{R}^2$. Тому для кожного фіксованого $y$ маємо

$$\frac{p(x-y)}{p(x)} = \exp\left(\frac{(x-a)y}{\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \pmod{m}.$$

Внаслідок неперервності $p$ ця рівність виконується всюди на $\mathbb{R}^2$. А тому

$$p(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{(x-a)y}{\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy\right)^{-1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Наведений приклад цікавий ще й такою особливістю.

**Теорема 2.** *Лише для поліномів Ерміта многочленами* $\{q_1, q_2, \ldots\}$ *є одночлени.*

***Доведення.*** З рівностей (1) випливає, що многочлени $\{q_1, q_2, \ldots\}$ можуть бути одночленами лише у випадку, коли множина коефіцієнтів $\{c_{nk} : 0 \le k \le \le n \in \mathbb{N}_0\}$ діагональна, тобто $c_{nk} = c_n \delta_{nk}$, $0 \le k \le n \in \mathbb{N}_0$. Отже, маємо $f'_{n+1} = = c_n f_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Нехай $\{a_n, b_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ — система коефіцієнтів, що визначають [2] ортонормовані многочлени $\{f_0, f_1, \ldots\}$ за рекурентними формулами

$$x f_n(x) = a_n f_{n+1}(x) + b_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$x f_0(x) = a_0 f_1(x) + b_0 f_0(x).$$

Диференціюючи ці рівності, одержуємо

$$f_n(x) + x f'_n(x) = a_n f'_{n+1}(x) + b_n f'_n(x) + a_{n-1} f'_{n-1}(x), \quad n \ge 2,$$

$$f_1(x) + x f'_1(x) = a_1 f'_2(x) + b_1 f'_1(x), \quad f_0(x) = a_0 f'_1(x).$$

Розкладаючи похідні та позбавляючись множення на незалежну змінну, згідно з рекурентними формулами маємо

$$f_n + c_{n-1} a_{n-1} f_n + c_{n-1} b_{n-1} f_{n-1} + c_{n-1} a_{n-2} f_{n-2} =$$

$$= a_n c_n f_n + b_n c_{n-1} f_{n-1} + a_{n-1} c_{n-2} f_{n-2}, \quad n \ge 2,$$

$$f_1 + c_0 a_0 f_1 + c_0 b_0 f_0 = a_1 c_1 f_1 + b_1 c_0 f_0, \quad f_0 = a_0 c_0 f_0.$$

Звідси випливає

$$\begin{cases} a_0 c_0 = 1, \\ a_{n+1} c_{n+1} = a_n c_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ a_{n+1} / c_{n+1} = a_n / c_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n = b_0, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_n c_n = n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ a_n / c_n = a_0 / c_0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n = b_0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Нехай $\sigma = c_0^{-1} > 0$. Тоді $c_n = a_n / \sigma^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, звідки $a_n = \sqrt{n+1} / \sigma$, $b_n = b_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, що відповідає, як відомо [2], многочленам Ерміта.

Зауважимо, що значну частину доведення теореми складає доведення того, що серед ортогональних многочленів лише для многочленів Ерміта похідна $n$-го многочлена з точністю до сталої збігається з $n-1$-м многочленом, $n \in \mathbb{N}$.

Додамо також, що приклад, наведений для ілюстрації відновлення щільності, не єдиний можливий. Адже неважко підібрати як завгодно багато щільностей $p$ таких, що інтеграл $\int_{\mathbb{R}} (p(x-y)/p(x))^2 p(x)\,dx$ збігатиметься для будь-яких $y \in \mathbb{R}$.

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

Одержано 02.11.92