УДК 517.9

В. І. Ткаченко, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ ДИХОТОМІЮ ІМПУЛЬСНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ *

The equivalence of regularity and exponential dichotomy is established for linear pulse differential equations with unbounded operators in a Banach space. The separatrix manifolds of a linear pulse system exponentially dichotomous on a semiaxis are studied in a finite-dimensional space. The conditions of weak regularity of this system are presented.

У банаховому просторі для лінійних імпульсних диференціальних рівнянь з необмеженими операторами доводиться еквівалентність регулярності та експоненціальної дихотомії. У скінченновимірному просторі досліджуються сепаратрисні многовиди експоненціально дихотомічної на півосі лінійної імпульсної системи та наводяться умови слабкої регулярності такої системи.

1. Рівняння у банаховому просторі. Розглянемо рівняння з імпульсною дією

$$dx/dt = A(t)x + f(t),$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i) - x(t_i - 0) = B_i x(t_i - 0) + g_i, \tag{1}$$

де $x \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ — банаховий простір з нормою $\|\,\|$, $A(t)$, B_i, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$, — лінійні оператори (взагалі кажучи, необмежені) в просторі $\mathfrak{B}$; $\{t_i\}$ — строго зростаюча послідовність дійсних чисел, які задовольняють умову

$$\overline{\lim_{T \to \infty}}\, i(t, t+T)/T = p < \infty, \tag{2}$$

де $i(t, t+T)$ — кількість імпульсів на інтервалі $(t, t+T)$; $C'(\mathfrak{B})$ — простір сильно неперервних на $\mathbb{R} \setminus \{t_i\}$ функцій $\mathbb{R} \to \mathfrak{B}$ з розривами в точках t_i і неперервних справа в цих точках; $l(\mathfrak{B})$ — простір визначених на $\{t_i\}$ функцій $g(t_i) = g_i$ зі значеннями в $\mathfrak{B}$ і нормою $\|g\| = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|g_i\|$.

Припускаємо: і) виконаною умову розв'язності вправо для рівняння (1): для довільного початкового значення $u(\tau_0) \in \mathfrak{B}$ відповідне рівнянню (1) однорідне рівняння

$$du/dt = A(t)u,$$

$$\Delta u|_{t=t_i} = u(t_i) - u(t_i - 0) = B_i u(t_i - 0) \tag{3}$$

має єдиний розв'язок $u(t)$, $t \geq \tau_0$, сильно неперервний при $t \neq t_i$ і $u(t_i) = (I + B_i)u(t_i - 0)$; ii) розв'язувальні оператори $U(t, \tau_0)$ сильно неперервні по t при $t \neq t_i$ і задовольняють оцінку

$$\|U(t, \tau_0)\| \leq l_0 \exp(c_0(t - \tau_0)), \quad t \geq \tau_0. \tag{4}$$

Достатні умови цього наведено в роботах [1, 2].

Неоднорідне рівняння (1) має розв'язок

$$x(t) = U(t, \tau_0)x_0 + \int_{\tau_0}^{t} U(t, s) f(s)\, ds + \sum_{\tau_0 \leq t_i \leq t} U(t, t_i) g_i.$$

---

* Ця робота виконана при фінансовій підтримці Державного комітету України з науки і технологій (Фонд фундаментальних досліджень).

© В. І. ТКАЧЕНКО, 1994

Оператор L визначається як необмежений оператор у просторі $C'(\mathfrak{B})$ зі значеннями в $C'(\mathfrak{B}) \oplus l(\mathfrak{B})$:

$$Lu = (T_1 u, T_2 u) = (du/dt - A(t)u,\ u(t_i) - (I + B_i)\, u(t_i - 0)).$$

Як і в роботі [3], введемо таке означення.

Означення 1. *Оператор L називається експоненціально дихотомічним на осі, якщо для простору $\mathfrak{B}$ існує змінний розклад $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}_1(\tau) \oplus \mathfrak{N}_2(\tau)$, ($P_1(\tau)$, $P_2(\tau)$ — відповідні проектори) такий, що для розв'язку $u(t)$ однорідного рівняння* (3) *виконуються умови*:

1) $U(t, \tau_0)\, \mathfrak{N}_i(\tau_0) \subseteq \mathfrak{N}_i(t), \quad t \ge \tau_0, \quad i = 1, 2;$

2) $\sup \| P_i(\tau_0) \| < \infty, \quad i = 1, 2;$

3) *для* $u(\tau_0) \in \mathfrak{N}_1(\tau_0)$ *виконується нерівність*

$$\| u(t) \| \le l_1 \| u(\tau_0) \| \exp(-c_1(t - \tau_0)), \quad t \ge \tau_0; \tag{5}$$

4) *для всякого початкового значення* $u(\tau_0) \in \mathfrak{N}_2(\tau_0)$ *існує єдине продовження на всю вісь таке, що*

$$\| u(t) \| \le l_1 \| u(\tau_0) \| \exp(c_1(t - \tau_0)), \quad t \le \tau_0. \tag{6}$$

Означення 2. *Оператор L називається регулярним на $\mathbb{R}$, якщо лінійне неоднорідне рівняння* (1) *при довільній функції $f(t) \in C'(\mathfrak{B})$ та довільній послідовності $\{g_i\} \in l(\mathfrak{B})$ має єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок $x(t)$ і виконується оцінка*

$$\| x(t) \|_{C'} \le K(\| L_1 x \|_{C'} + \| lx \|_l). \tag{7}$$

Зв'язок між регулярністю та експоненціальною дихотомією при обмежених операторах $A(t)$, B_i, $i \in \mathbb{Z}$, раніше розглядалися в роботах [4 – 7]. В роботах [4 – 6] додатково вимагалося існування рівномірно обмежених операторів $(I + B_i)^{-1}$. В даній роботі такі умови не вимагаються.

Теорема 1. *Регулярність оператора L еквівалентна експоненціальній дихотомії.*

Доведення. Нехай оператор L експоненціально дихотомічний на осі. Побудуємо для нього функцію Гріна. Із умови 4 випливає існування обмеженого оператора $\Omega(t, \tau_0) = U(t, \tau_0) P_2(\tau_0)$ для довільних $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Функція Гріна має вигляд

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t, s) P_1(s), & t \ge s, \\ -\Omega(t, s), & t \le s. \end{cases}$$

Із умов 1 – 4 випливає оцінка

$$\| G(t, s) \| \le l \exp(c_1 | t - s |). \tag{8}$$

Функція

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t, t_i)\, g_i$$

є обмеженим розв'язком рівняння (1) при виконанні умови (2). Це перевіряється аналогічно ([8], § 26).

Нехай тепер оператор L регулярний. Розглянемо многовиди

$$\mathfrak{N}_1(\tau_0) = \{x(\tau_0) \in \mathfrak{B},\ Lx = 0,\ \sup_{t \geq \tau_0} \|x(t)\| < \infty\}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{N}_2(\tau_0) = \{x(\tau_0) \in \mathfrak{B},\ Lx = 0,\ \sup_{t \leq \tau_0} \|x(t)\| < \infty\}. \tag{10}$$

Відмітимо, що із формули (7) випливає однозначна продовжуваність $x(t)$ в формулі (10) на $(-\infty, t_0)$.

Аналогічно роботі [3] доводяться нерівності

$$\|x(t)\| \leq l \|x(\tau_0)\|, \quad t \geq \tau_0, \quad x(\tau_0) \in \mathfrak{N}_1(\tau_0), \tag{11}$$

$$\|x(t)\| \leq l \|x(\tau_0)\|, \quad t \leq \tau_0, \quad x(\tau_0) \in \mathfrak{N}_2(\tau_0). \tag{12}$$

Із нерівностей (11), (12) випливає оцінка (5) для $x(\tau_0) \in \mathfrak{N}_i(\tau_0)$ та (6) для $x(\tau_0) \in \mathfrak{N}_2(\tau_0)$. Многовиди $\mathfrak{N}_1(\tau_0)$ і $\mathfrak{N}_2(\tau_0)$ взаємно доповнювані.

2. Рівняння (1) у скінченновимірному просторі $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^m$. Припускаємо, що $\|A(t)\| \leq K,\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \in C'(\mathbb{R}),\ \|g_i\| \leq K,\ \forall i \in \mathbb{Z},\ \|B_i\| \leq K,\ \forall i \in \mathbb{Z},\ \|\cdot\|$ — норма матриці чи вектора. Можливе виродження імпульсів $\det(I + B_i) = 0$ при деяких чи всіх $i \in \mathbb{Z}$, тому розв'язки рівняння (1) не продовжуються на від'ємну піввісь чи продовжуються неоднозначно.

Означення 3. *Рівняння* (3) *при* $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^m$ *назвемо експоненціально дихотомічним при* $t \geq \tau_0$, *якщо для всякого* $\tau \geq \tau_0$ *простір* $\mathbb{R}^m$ *можна зобразити у вигляді прямої суми* $\mathbb{R}^m = U_\tau \oplus S_\tau$ *таким чином, що виконуються умови*:

i) *розв'язок рівняння* (3) $u(t)$ *з* $u(\tau) \in S_\tau$ *задовольняє оцінку*

$$\|u(t)\| \leq K \|u(\tau)\| \exp(-\nu(t - \tau)), \quad t \geq \tau; \tag{13}$$

ii) *для* $u(\tau) \in U_\tau$ *виконується оцінка*

$$\|u(t)\| \geq K \|u(\tau)\| \exp(\nu(t - \tau)), \quad t \geq \tau. \tag{14}$$

Вибір многовиду U_τ в ii) неоднозначний, це один з доповнюючих просторів до S_τ. В умові i) можливе виродження розв'язку $u(t)$ в нульовий розв'язок. Розмірності многовидів S_τ та U_τ можуть змінюватися при зміні τ. Закономірність цієї зміни визначає така лема.

Лема 1. *Для розмірностей стійкого та нестійкого многовидів*

$$\begin{aligned} \dim S_t &\geq \dim S_\tau \quad \text{при} \quad t \leq \tau, \\ \dim U_t &\geq \dim U_\tau \quad \text{при} \quad t \leq \tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Доведення. Очевидно, якщо між t і τ в умові леми немає точок імпульсів, то нерівності перетворюються в рівності. Строгі нерівності можуть з'явитися при $t = t_i - 0$, $\tau = t_i$. Розглянемо цей випадок. Образ простору $S_{t_i - 0}$ при відображенні $(I + B_i)$ міститься в S_{t_i}. Його розмірність рівна $\dim(I + B_i) S_{t_i - 0} = \dim S_{t_i - 0} - \dim\ker(I + B_i)$. Побудуємо в S_{t_i} доповнення до $(I + B_i) S_{t_i - 0}$. Цей підпростір має розмірність $\dim S_{t_i} - \dim S_{t_i - 0} + \dim\ker(I + B_i)$ і належить множині $\mathbb{R}^m \setminus (I + B_i)\mathbb{R}^m$. Тому справедлива нерівність

$$\dim S_{t_i} - \dim S_{t_i-0} + \dim\ker(I+B_i) \le \dim\ker(I+B_i)$$

або $\dim S_{t_i} \le \dim S_{t_i-0}$. Друга нерівність (15) доводиться, виходячи із доповнювальності S_τ і U_τ в $\mathbb{R}^m$. Лема доведена.

Лема 2. *Нехай система* (3) *визначена при* $t \ge 0$ *і експоненціально дихотомічна на півосі* $t \ge \tau_1 > 0$. *Тоді вона експоненціально дихотомічна на півосі* $t \ge s$ *для всіх* $s \in [0, \tau_1]$.

Доведення. Нехай $\tau_1 \in [t_j, t_{j+1})$. Тоді розв'язки однозначно продовжуються вліво від точки $t = \tau_1$ на відрізок $[t_j, \tau_1]$ як розв'язки системи лінійних диференціальних рівнянь з обмеженою матрицею. Враховуючи оцінку (4), легко одержати дихотомічність рівняння (3) на $[t_j, \infty)$, виходячи з дихотомічності на $[\tau_1, \infty)$. При цьому можуть змінитися константи в нерівностях (5), (6). Оскільки матриця $(I+B_j)$ вироджена, то не всі розв'язки на $[t_j, \infty)$ мають прообрази в точці $t_j - 0$. Нехай S_{t_j} і U_{t_j} — стійкий та нестійкий многовиди системи в точці t_j. Многовид S_{t_j-0} є сумою прообразів векторів з підпростору S_{t_j} та елементів $\ker(I+B_j)$. Виходячи з обмеженості матриці в правій частині системи (3), зрозуміло виконання нерівності (15) для S_{t_j-0}.

Елементи многовиду U_{t_j}, які мають прообрази при дії матриці $(I+B_j)$ утворюють векторний простір. Нехай $v_1, \ldots, v_l$ — його базис. Розглянемо алгебраїчну систему

$$(I+B_j)y = v_k, \quad k = \overline{1,l}. \tag{16}$$

Для кожного v_k серед розв'язків системи (16) виберемо розв'язок y_k з найменшою нормою. Приводячи $(I+B_j)$ до жорданової форми, можна показати виконання нерівності

$$\|v_k\| \ge M\|y_k\|, \quad k = \overline{1,l}, \tag{17}$$

з незалежною від v_k константою. Оболонка векторів y_k утворює многовид U_{t_j-0}. Виходячи з (17), одержуємо для векторів з U_{t_j-0} нерівність (14); $S_{t_j-0} \oplus \oplus U_{t_j-0} = \mathbb{R}^m$ за побудовою. Отже, доведена експоненціальна дихотомічність для $t_j - 0$. Точки $t < t_j - 0$ розглядаємо аналогічно. Лему доведено.

Означення 4. *Оператор* L *назвемо слабко регулярним на півосі* $t \ge \tau_0$, *якщо лінійне неоднорідне рівняння* (1) *при довільних* $f(t) \in C'[\tau_0, \infty)$, $\{g_i\} \in \in l[\tau_0, \infty)$ *має хоч один обмежений при* $t \ge \tau_0$ *розв'язок* $u(t)$.

Теорема 2. *Для слабкої регулярності системи* (1) *необхідно і достатньо, щоб система була експоненціально дихотомічною на півосі і розмірності стійкого та нестійкого підпросторів* S_τ *і* U_τ *не залежали від* $\tau \ge \tau_0$.

Доведення. *Достатність.* Нехай $\dim S_\tau = r$, $\dim U_\tau = m - r$, $\forall\, \tau \ge \tau_0$. Многовид S_τ визначається однозначно (на відміну від його доповнення U_τ), він інваріантний. Введемо в S_τ базис $u_1(t), \ldots, u_r(t)$. Доповнимо його до базису в $\mathbb{R}^m$ вектор-функціями $u_{r+1}, \ldots, u_m(t)$. Побудуємо матрицю $Q(t)$: i-й її стовпчик рівний $u_i(t) \,|\det Q(t)| \ge a > 0$. Зробимо в системі (1) заміну змінних $x = = Q(t)y$. У змінних (y_1, y_2) многовид S_τ має вигляд $(y_1(t), 0)$. У нових змінних (y_1, y_2) одержимо трикутну систему

$$dy_1/dt = A_1(t)y_1 + A_{12}(t)y_2 + f_1(t),$$

$$\Delta y_1|_{t=t_i} = B_i^1 y_1 + B_i^{12} y_2 + g_i^1; \tag{18}$$

$$dy_2/dt = A_2(t)y_2 + f_2(t),$$

$$\Delta y_2|_{t=t_i} = B_i^2 y_2 + g_i^2. \tag{19}$$

Однорідна система (19) (при $f_2(t) = 0$, $g_i^2 = 0$, $i \in \mathbb{Z}$) не має нетривіальних обмежених розв'язків, всі її розв'язки експоненціально зростають. В цьому випадку $\det(I + B_i^2) \neq 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ і розв'язки продовжуються однозначно на піввісь $t \geq \tau_0$. Єдиний обмежений розв'язок неоднорідної системи (19) визначається формулою

$$y_2(t) = \int_t^{\infty} Y_2(t,s) f_2(s) ds + \sum_{t \leq t_i < \infty} Y_2(t, t_i) g_i^2,$$

де $Y_2(t,s)$ — матрицант однорідної системи (19).

Однорідна система (18) при $f_1 = 0$, $g_i^2 = 0$, $y_2(t) = 0$ експоненціально стійка. Тому всі розв'язки неоднорідної системи обмежені і задаються формулою

$$y_1(t) = \int_{t_0}^{t} Y_1(t,s)(A_{12}(s) y_{20}(s) + f_1(s)) ds + \sum_{t_0 \leq t_i \leq t} Y_1(t, t_i)(B_i^{12} y_{20}(t_i) + g_i^1),$$

де $Y_1(t,s)$ — матрицант однорідної системи (18) (при $y_2 = 0$), $y_{20}(t)$ — обмежений розв'язок системи (19).

Необхідність. Аналогічно роботі [5] доводимо, що обмежені при $t \geq \tau_0$ розв'язки однорідної системи (3) задовольняють оцінку (13), а розв'язки з деякого доповнення простору обмежених розв'язків — оцінку (14). Зауважимо, що при доведенні в [5] по суті не використовується умова невиродженості матриці $(I + B_i)$.

Покажемо необхідність сталості розмірностей S_τ і U_τ. Нехай при $t = t_i$ порушується ця умова, тобто, з урахуванням леми 1 справедлива нерівність $\dim S_{t_i} < \dim S_{t_i - 0}$. Нехай $\dim \ker(I + B_i) = k$, $\dim S_{t_i} = s$, $\dim S_{t_i - 0} = s + s_1$. При дії $(I + B_i)$ підпростір $S_{t_i - 0}$ розкладається в суму k-вимірного підпростору, що переходить в нуль, та $(s + s_1 - k)$-вимірного, який має ненульовий образ в S_{t_i}. Простір S_{t_i} розкладається в пряму суму $(s + s_1 - k)$-вимірного підпростору $S_{t_i}^1$, який має прообраз в $S_{t_i - 0}$ та $(k - s_1)$-мірного $S_{t_i}^2$, який не має прообразу.

Розв'язок системи (1) має вигляд

$$x(t) = U(t, t_i)x_i + \int_{t_i}^{t} U(t,s) f(s) ds + \sum_{t_i < t_j < t} U(t, t_j) g_j =$$

$$= U(t, t_i - 0) x_{i-0} + \int_{t_i - 0}^{t} U(t,s) f(s) ds + \sum_{t_i \leq t_j < t} U(t, t_j) g_j =$$

$$= U(t, t_i)(I + B_i) x_{i-0} + \int_{t_i - 0}^{t} U(t,s) f(s) ds + \sum_{t_i \leq t_j < t} U(t, t_j) g_j.$$

Тому

$$(I + B_i)x_{i-0} = x_i + g_i. \tag{20}$$

Нехай при $t > t_i$ $g_i = 0$, $f(t) = 0$. Система (1) при $t > t_i$ має множину обмежених розв'язків, які починаються на S_{t_i}. Оскільки система (1) слабко реґулярна, то алгебраїчна система (20) має розв'язок при довільному значенні g_i і $x_i \in S_{t_i}$. Виберемо $g_i \notin \operatorname{Im}(I + B_i)$, тоді $(g_i + S^1_{t_i})$ не має прообразу при дії $(I + B_i)$. Розмірність гіперплощини $(g_i + S^2_{t_i})$ рівна $(m - s_1)$. Розмірність $\operatorname{Im}(I + B_i)$ рівна $m - k$, тому завжди можна вибрати g_i так, щоб $(g_i + S^2_{t_i})$ і $\operatorname{Im}(I + B_i)$ не перетиналися, тобто можна знайти такі неоднорідності $f(t)$, g_i, що система (1) не має обмежених розв'язків. Це суперечить припущенню про слабку регулярність. Теорема доведена.

3. Експоненціальна дихотомія збуреної системи. Поряд з системою (3) будемо розглядати збурену систему

$$\begin{aligned} dy/dt &= (A(t) + \tilde{A}(t))\,y, \quad t \neq t_i, \\ \Delta y|_{t=t_i} &= (B_i + \tilde{B}_i)\,y. \end{aligned} \tag{21}$$

Теорема 2. *Нехай система* (3) *експоненціально дихотомічна при* $u \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$. *Тоді при* $\|\tilde{A}(t)\|_C \leq \delta$, $\|\tilde{B}_i\|_l \leq \delta$ *з достатньо малим* $\delta > 0$ *система* (21) *також експоненціально дихотомічна.*

Доведення. Як випливає з леми 1, розмірність стійкого многовиду S_τ експоненціально дихотомічної системи (3) не збільшується при зростанні τ. Оскільки розмірність простору скінченна, то, починаючи з деякого значення τ_0, розмірність стабілізується і при $\tau \geq \tau_0$ розмірності S_τ і U_τ постійні (можливий випадок $S_\tau = 0$, $S_\tau = \mathbb{R}^m$). За теоремою 2 на півосі $\tau \geq \tau_0$ система (3) слабко регулярна і для неї існує функція Гріна $G(t, s)$, яка задовольняє оцінку (8). При $t \geq \tau_0$ і малих δ для системи (21) існує прямий розклад $\mathbb{R}^m = \tilde{U}_\tau \oplus \tilde{S}_\tau$, який задає експоненціальну дихотомію. Підпростір $\tilde{S}_\tau$ складається з початкових значень $y(\tau)$ тих розв'язків рівняння (21), які прямують до 0 при $t \to +\infty$. Ці розв'язки визначаються з інтегрального рівняння

$$y(t) = U(t, \tau)u(\tau) + \int_\tau^\infty G(t, s)\tilde{A}(s)y(s)ds + \sum_{\tau < t_i < \infty} G(t, t_i)\tilde{B}_i y(t_i), \tag{22}$$

де $u(\tau) \in S_\tau$. Можна показати, що права частина (22) при виконанні умов (2), (8) і при достатньо малих δ є оператором стиску. Тому при кожному $u(\tau) \in S_\tau$ рівняння (22) має єдиний розв'язок $y(t)$, який задовольняє оцінку (13). Тим самим побудовано $\tilde{S}_\tau$.

Всі розв'язки з доповнення до $\tilde{S}_\tau$ експоненціально зростають. Такі розв'язки визначаються з рівняння

$$y(t) = U(t, \tau)y(\tau) + \int_\tau^t U(t, s)\tilde{A}(s)y(s)ds + \sum_{\tau < t_i < t} U(t, t_i)\tilde{B}_i y(t_i).$$

Аналогічно [9, с. 259] можна показати виконання оцінки (14) для таких розв'язків. Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$dy/dt = 0, \quad t \neq n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta y|_{t=n} = b_n y + g_n. \tag{23}$$

Нехай $b_n = 2$ при $n \geq 1$ і $b_n = 0$ при $n \leq 0$, $g_n = 0$, $n \neq 1$, $g_1 = 2$. Рівняння (23) експоненціально дихотомічне на півосі $t \geq \tau_0$ при всіх τ_0. Очевидно, $U_t == 0$ при $t < 1$ і $\dim U_t = 1$ при $t \geq 1$. На півосі $t \geq 1$ рівняння має єдиний обмежений розв'язок $y(t) = -1$, $1 \leq t < 2$, і рівний нулю при $t \geq 2$. На півосі $t \geq 0$ обмежених розв'язків немає, оскільки всі розв'язки при $t = 1$ переходять у точку $y(1) = 2$, а розв'язок з такою початковою умовою необмежений.

1. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабонелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием и их устойчивость. – Киев, 1986. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86-65).
2. *Самойленко А. М., Илолов М.* К теории эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Докл. АН СССР. – 1991. – **316**, №4. – С. 821 – 825.
3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.
4. *Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* О почти периодических решениях импульсных систем // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, №1. – С. 74 – 80.
5. *Гуцу В. И.* Слабая регулярность линейных дифференциальных уравнений с импульсами // Геометрические методы в теории дифференциальных уравнений. Математические исследования. Вып. 112. – Кишинев: Штиинца, 1990. – С. 72 – 82.
6. *Bainov D. D., Kostadinov S. I., Zabreiko P. P.* Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a banach space // Int. J. Theor. Phys. – 1989. – **28**, №7. – P. 797 – 814.
7. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений импульсных систем // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №6. – С. 779 – 783.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
9. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

Получено 28.01.93