УДК 519.21

Т. В. Каратаева

Полугруппа эволюционных разрывных систем относительно смешанного суммирования

В настоящей статье изучаются алгебраические свойства операций смешанного суммирования и смешанного умножения, введенных в [1] для аддитивных и мультипликативных систем (а- и m-систем) соответственно, удовлетворяющих эволюционному соотношению, условию ограниченности вариации и условию полунепрерывности слева или справа в зависимости от точки $\tau \in [0, T]$ [2]. При этом используются обозначения и определения, введенные в [1, 2].

Теорема. *Следующие множества m-систем: $\mathfrak{R}^+ [0, T]$ — непрерывных справа в каждой точке $\tau \in [0, T]$, $\mathfrak{M}^- [0, T]$ — непрерывных слева в каждой точке $\tau \in [0, T]$ и а-систем: $\mathfrak{N}^+ [0, T]$ — непрерывных справа в каждой точке $\tau \in [0, T]$, $\mathfrak{N}^- [0, T]$ — непрерывных слева в каждой точке $\tau \in [0, T]$ образуют топологические полугруппы относительно операций $\boxtimes$ и $\boxplus$ соответственно в топологии сходимости по вариации. Все эти множества гомеоморфны.*

Лемма 1. *Пусть а-системы $y(1)_s^t$, $y(2)_s^t$, $y(3)_s^t$ попарно не имеет общих точек, в которых они разрывны с разных сторон. Тогда существует предел*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} = (y(1) \boxplus y(2) \boxplus y(3))_s^t, \tag{1}$$

который не зависит от последовательности разбиений $\{\Delta_n [s, t]\}$, как функция s и t является а-системой, и справедливо равенство

$$(y(1) \boxplus y(2) \boxplus y(3))_s^t = (y(1) \boxplus y(2))_s^t \boxplus y(3)_s^t = y(1)_s^t \boxplus (y(2) \boxplus y(3))_s^t. \tag{2}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 в [1] достаточно рассмотреть только монотонные измельчающиеся последовательности разбиений и показать, что следующее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{l=1}^{r_k} y(1)_{s_{l-1}}^{s_l} y(2)_{s_{l-1}}^{s_l} \times$$

$$\times y(3)_{s_{i-1}}^{s_i}\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{m_n} y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} \times \tag{3}$$

$$\times y(2)_{s_{i-1}}^{s_i} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k}\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{n_k} y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} y(2)_{s_{i-1}}^{s_i} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} y(2)_{s_{i-1}}^{s_i} y(3)_{s_{i-1}}^{s_i}\Big|.$$

Каждое слагаемое в правой части последнего выражения рассмотрим отдельно. Обозначая $\sup\limits_k |y(3)_{t_{k-1}}^{t_k}|$ через C_1 для первого слагаемого в (3) и учитывая, что $\varphi_i(T) = \varphi_i(0, T) = \sup\limits_{\Delta[0,T]} \Sigma |y_0^{t_k} - y_0^{t_{k-1}}| < \infty$, $i = \overline{1, 3}$, получаем оценку

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\Big[y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} - \sum_{i=1}^{r_k} y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} y(2)_{s_{i-1}}^{s_i}\Big] y(3)_{t_{k-1}}^{t_k}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k} (y(1)_0^{t_k} - y(1)_0^{t_{k-1}})\, y(2)_{s_{i-1}}^{s_i} - (y(1)_0^{s_i} - y_0^{s_{i-1}}(1)) \times$$

$$\times y(2)_{s_{i-1}}^{s_i})| \leqslant C_1 \Big\{\Big[\sum_{k=1}^{m_n} \varphi_1(t_k)(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} \varphi_1(s_i) \times$$

$$\times(\varphi_2(s_i) - \varphi_2(s_{i-1}))\Big] + \Big[\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} \varphi_i(s_{i-1})(\varphi_2(s_i) - \varphi_2(s_{i-1})) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m_n} \varphi_1(t_{k-1})(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1}))\Big]\Big\}.$$

Поскольку разности, стоящие в квадратных скобках правой части последнего выражения, представляют собой разности интегральных сумм для правого и левого интегралов Стильтьеса соответственно [3], то все выражение может быть сделано меньше $\varepsilon/2$ при достаточно большом n.

Обозначив далее $\sup\limits_{k,i} |y(1)_{s_{i-1}}^{s_i}|$ через C_2, оценим второе слагаемое в (3):

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} y(2)_{s_{i-1}}^{s_i} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} y(2)_{s_{i-1}}^{s_i} y(3)_{s_{i-1}}^{s_i}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big\{\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} (\varphi_2(s_i) - \varphi_2(s_{i-1}))(\varphi_3(t_k) - \varphi_3(s_i)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} (\varphi_2(s_i) - \varphi_2(s_{i-1}))(\varphi_3(s_{i-1}) - \varphi_3(t_{k-1}))\Big\}.$$

Теперь аналогично оценке первого слагаемого в (3) видим, что второе слагаемое в (1) не превышает $\varepsilon/2$ для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n. Следовательно, выражение (3) при достаточно большом n может быть сделано меньше любого $\varepsilon > 0$, и предел (1) существует. Аналогично теореме 1 в [1] нетрудно показать, что $(y(1) \boxplus y(2) \boxplus y(3))_s^t$ является a-системой.

Покажем теперь, что справедлива формула (2) и, следовательно, операция $\boxplus$ ассоциативна. Для доказательства первого из равенств (2) оценим выражение

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n} y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - \sum_{k=1}^{m_n} (y(1) \boxplus y(2))_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k}\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{m_n} (y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(2))_{t_{k-1}}^{t_k})\, y(3)_{t_{k-1}}^{t_k}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=1}^{m_n} \Big|(y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(2))_{t_{k-1}}^{t_k}\Big|.$$

В силу оценки (5) в [1] правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда и следует спреведливость первого равенства в (2). Аналогичным образом доказывается второе равенство в (2).

Следствие 1. *В условиях леммы* 1 *система*

$$p_s^t = y(1)_s^t + y(2)_s^t + y(3)_s^t + (y(1) \boxplus y(2))_s^t +$$
$$+ (y(1) \boxplus y(2))_s^t + (y(2) \boxplus y(3))_s^t + (y(1) \boxplus y(2) \boxplus y(3))_s^t$$

является а-системой.

Следствие 2. *Справедливо равенство*

$$(y(1) + y(2))_s^t \boxplus y(3)_s^t = (y(1) \boxplus y(2))_s^t + (y(1) \boxplus y(2))_s^t.$$

Лемма 2. *Пусть m-системы* $x(1)_s^t$, $x(2)_s^t$, $x(3)_s^t$ *попарно не имеют общих точек, в которых они разрывны с разных сторон. Тогда существует и не зависит от последовательности разбиений* $\{\Delta_n[s,t]\}$ *предел*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} x(1)_{t_{k-1}}^{t_k} x(2)_{t_{k-1}}^{t_k} x(3)_{t_{k-1}}^{t_k} = (x(1) \boxtimes x(2) \boxtimes x(3))_s^t \tag{4}$$

и справедливо равенство

$$(x(1) \boxtimes x(2) \boxtimes x(3))_s^t = ((x(1) \boxtimes x(2))_s^t \boxtimes x(3)_s^t =$$
$$= x(1)_s^t \boxtimes (x(2) \boxtimes x(3))_s^t. \tag{5}$$

Доказательство. Из следствия 1 и теорем в [1] вытекает, что существует и не зависит от последовательности разбиений предел $\lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (p_{t_{k-1}}^{t_k} + E) = D^{-1}(p)_s^t$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $\lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} x(1)_{t_{k-1}}^{t_k} x(2)_{t_{k-1}}^{t_k} x(3)_{t_{k-1}}^{t_k} = D^{-1}(p)_s^t$. Это равенство вытекает из соотношений

$$\lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} x(1)_{t_{k-1}}^{t_k} x(2)_{t_{k-1}}^{t_k} x(3)_{t_{k-1}}^{t_k} = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} x(1)_{t_{k-1}}^{t_k} \times$$

$$\times x(2)_{t_{k-1}}^{t_k} (y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} + E) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} x(1)_{t_{k-1}}^{t_k} (y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} + E) \times$$

$$\times (y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} + E) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} + E)(y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} + E)(y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} + E),$$

к доказательству которых мы и приступим. Для этого оценим норму разности

$$\left|\prod_{k=1}^{m_n} x(1)_{t_{k-1}}^{t_k} x(2)_{t_{k-1}}^{t_k} x(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - \prod_{k=1}^{m_n} x(1)_{t_{k-1}}^{t_k} x(2)_{t_{k-1}}^{t_k} \times\right.$$

$$\left.\times (y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} + E)\right| \leqslant \exp\{F_1(0,T) F_2(0,T)(\varphi_3(0,T) +$$

$$+ F_3(0,T) + 2) + F_1(0,T)(F_2(0,T) + \varphi_3(0,T) +$$

$$+ F_3(0,T) + 1) + F_2(0,T)(F_3(0,T) + \varphi_3(0,T) + 1) +$$

$$+ F_1(0,T) + F_2(0,T) + F_3(0,T) + \varphi_3(0,T)\} \times$$

$$\times \sup_k |x(1)_{t_{k-1}}^{t_k}| \, |x(2)_{t_{k-1}}^{t_k}| \sum_k |x(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} + E)| \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \sum_k |x(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - E|, \tag{6}$$

где функции $F_i(0,T)$, $i=\overline{1,3}$, определяются следующим образом: $F_i(0,T) = \sup\limits_{\Delta[0,T]} \sum\limits_k |x(i)_{t_{k-1}}^{t_k} - E|$, $i = \overline{1,3}$, и ограничены в силу определения m- и a- систем.

Аналогично доказательству теоремы в [2] можно показать, что правая часть (6) стремится в нулю при $n \to \infty$. Второе и третье равенства в (4) доказываются аналогично. Докажем четвертое равенство в (4). Для этого, использовав следствие 1, оценим выражение

$$\left|\prod_{k=1}^{m_n} (y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} + E)(y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} + E)(y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} + E) - \prod_{k=1}^{m_n} (p_{t_{k-1}}^{t_k} + E)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{\varphi_1(0,T)\varphi_2(0,T)\varphi_3(0,T) + \varphi_1(0,T)\varphi_2(0,T) + \varphi_1(0,T) \times$$

$$\times \varphi_3(0,T) + \varphi_2(0,T)\varphi_3(0,T) + \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(0,T)\Big\} \exp\Big\{\sup \sum_k |p_{t_{k-1}}^{t_k}|\Big\} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} \{|y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(2) \boxplus y(3))_{t_{k-1}}^{t_k}| +$$

$$+ |y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(2))_{t_{k-1}}^{t_k}| + |y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- (y(1) \boxplus y(3))_{t_{k-1}}^{t_k}| + |y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(2) \boxplus y(3))_{t_{k-1}}^{t_k}|\}. \tag{7}$$

Так как первые два сомножителя в правой части (7) ограничены, то для доказательства требуемого достаточно показать, что третий сомножитель в (7) стремится к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{m_n} |y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(2) \boxplus y(3))_{t_{k-1}}^{t_k}| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n} |y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(2))_{t_{k-1}}^{t_k}| + \sum_{k=1}^{m_n} |y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} \times$$

$$\times y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(3))_{t_{k-1}}^{t_k}| + \sum_{k=1}^{m_n} |y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(2) \boxplus y(3))_{t_{k-1}}^{t_k}|. \tag{8}$$

Из (5) в [1] следует, что последние три слагаемые в ней стремятся к нулю при $n \to \infty$. Оценим первую сумму в (8). Использовав преобразования, приведенные при доказательстве леммы 1, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{m_n} | y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - \sum_{i=1}^{r_k} y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} y(2)_{s_{i-1}}^{s_i} y(3)_{s_{i-1}}^{s_i} | \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k | y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} | \Big\{ \Big[\sum_{k=1}^{m_n} \varphi_1(t_k)(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \varphi_1(s_i)(\varphi_2(s_i) -$$

$$- \varphi_2(s_{i-1})) \Big] + \Big[\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \varphi_1(s_{i-1})(\varphi_2(s_i) - \varphi_2(s_{i-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_1(t_{k-1}) \times$$

$$\times (\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) \Big] \Big\} + \sup_{k,i} | y(1)_{s_{i-1}}^{s_i} | \Big\{ \Big[\sum_{k=1}^{m_n} \varphi_3(t_k)(\varphi_2(t_k) -$$

$$- \varphi_2(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \varphi_3(s_i)(\varphi_2(s_i) - \varphi_2(s_{i-1})) \Big] + \Big[\sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \varphi_3(s_{i-1}) \times$$

$$\times (\varphi_2(s_i) - \varphi_2(s_{i-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_3(t_{k-1})(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) \Big] \Big\},$$

переходя в котором к пределу при $\sup_i | s_i - s_{i-1} | = \delta_k \to 0$, получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{m_n} | y(1)_{t_{k-1}}^{t_k} y(2)_{t_{k-1}}^{t_k} y(3)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y(1) \boxplus y(2) \boxplus y(3))_{t_{k-1}}^{t_k} | \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \Big\{ \Big[\sum_{k=1}^{m_n} \varphi_1(t_k)(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) - (r) \int_s^t \varphi_1(\tau)\, d\varphi_2(\tau) \Big] +$$

$$+ \Big[(l) \int_s^t \varphi_1(\tau)\, d\varphi_2(\tau) - \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_1(t_{k-1})(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) \Big] \Big\} +$$

$$+ C_1 \Big\{ \Big[\sum_{k=1}^{m_n} \varphi_3(t_k)(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) - (r) \int_s^t \varphi_3(\tau)\, d\varphi_2(\tau) \Big] +$$

$$+ \Big[(l) \int_s^t \varphi_3(\tau)\, d\varphi_2(\tau) - \sum_{k=1}^{m_n} \varphi_3(t_{k-1})(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})) \Big] \Big\}.$$

Из определения интеграла Стильтьеса [3] следует, что правая часть этого неравенства стремится к нулю. Следовательно, выражения (8), а вместе с ними и (7) стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Переходя теперь к доказательству формул (5), заметим, что по теореме из [1] отображение D является взаимно однозначным, операция $\boxplus$ ассоциативна по лемме 1. Поэтому операция $\boxtimes$ является также ассоциативной, т. е. справедлива формула (5).

Лемма 3. *Операции смешанного суммирования и смешанного произведения непрерывны в топологии сходимости по вариации.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности a-систем $(N)\, y(i)_s^t$, $i = 1, 2$, одновременно непрерывные слева или справа в зависимости от точки $\tau \in [0, T]$, и предположим, что $(N)\, y(i)_s^t$, $i = 1, 2$, сходятся к некоторым a-системам $y(i)_s^t$, $i = 1, 2$. Очевидно, что при $N \to \infty$ a-системы $(N)\, y(1)_s^t$ и $y(1)_s^t$, $(N)\, y(2)_s^t$, $y(2)_s^t$ также будут одновременно непрерывны слева или справа в зависимости от точки $\tau \in [0, T]$. Действительно, если бы это было не так, то не выполнялось бы условие

$\sup \Sigma | (N)\, y\, (i)_{t_{k-1}}^{t_k} - y\, (i)_{t_{k-1}}^{t_k} | \to 0,\ N \to \infty,\ i = 1, 2,$ что противоречило бы сходимости по вариации указанных систем.

Для доказательства непрерывности операции смешанного суммирования в топологии сходимости по вариации нужно показать, что

$$\sup \Sigma | y\, (1)_s^t \boxplus y\, (2)_s^t - (N)\, y\, (1)_s^t \boxplus - (N)\, y\, (2)_s^t | \to 0, \qquad N \to \infty.$$

Для этого оценим следующую сумму:

$$\sup \sum_k | (N)\, y\, (1)_{t_{k-1}}^{t_k} \boxplus (N) y\, (2)_{t_{k-1}}^{t_k} - (y\, (1) \boxplus y\, (2))_{t_{k-1}}^{t_k} | =$$

$$= \sup \sum_k \Big| \lim \sum_{i=1}^{r_k} (N)\, y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i} ((N)\, y\, (2)_{s_{i-1}}^{s_i} - y\, (2)_{s_{i-1}}^{s_i}) -$$

$$\sum_{i=1}^{r_k} (y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i} - (N)\, y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i})\, y\, (2)_{s_{i-1}}^{s_i}) \Big| \leqslant \sup_k \sup_i | (N)\, y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i} \Big| \times$$

$$\times \sup \sum_k | (N)\, y\, (2)_{t_{k-1}}^{t_k} - y\, (2)_{t_{k-1}}^{t_k} | + \sup_k \sup_i | y\, (2)_{s_{i-1}}^{s_i} | \times$$

$$\times \sup_{\Delta[s,t]} \Sigma | y\, (1)_{t_{k-1}}^{t_k} - (N)\, y\, (1)_{t_{k-1}}^{t_k} | \to 0,$$

так как

$$\sup_k \sup_i | (N)\, y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i} | \leqslant \sup_{k,i} | (N)\, y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i} - y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i} | +$$

$$+ | y\, (1)_{s_{i-1}}^{s_i} | < \infty, \quad \sup_{k,i} | y\, (2)_{s_{i-1}}^{s_i} | < \infty,$$

$$\sup_{\Delta[s,t]} \sum_k | (N)\, y\, (i)_{t_{k-1}}^{t_k} - y\, (i)_{t_{k-1}}^{t_k} | \to 0, \quad N \to \infty \qquad i = 1, 2,$$

по условию теоремы.

Непрерывность операции смешанного умножения в топологии сходимости по вариации следует из взаимной однозначности и взаимной непрерывности операции смешанного суммирования в указанной топологии, непрерывности операции смешанного суммирования в той же топологии и формулы $D\, (x\, (1) \boxtimes x\, (2))_s^t = D\, (x\, (1))_s^t + D\, (x\, (2))_s^t + (D\, (x\, (1)) \boxplus D\, (x\, (2)))_s^t$, доказанной в [1].

Из доказанных выше лемм и вытекает доказательство теоремы.

1. *Каратаева Т. В.* О смешанном произведении эволюционных мультипликативных систем без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 4.— С. 444—450.
2. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных систем без условий непрерывности // Там же.— 1985.— 37, № 2.— С. 168—175.
3. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 3—6.

Ин-т математики АН УССР, Киев — Получено 06.05.87