УДК 519.21

Б. В. Бондарев, А. Дахмани

Экспоненциальные оценки в процедурах стохастической аппроксимации

Пусть известно, что уравнение

$$R(x) = 0 \tag{1}$$

имеет единственное решение $x = \theta$, причем функция $R(x)$ в момент времени k может быть измерена в каждой точке x со случайной ошибкой $\xi(k, x, \omega)$, т. е. наблюдается $V(x, \omega) = R(x) + \xi(k, x, \omega)$. Роббинс и Монро [1] для нахождения корня уравнения (1) с возрастающей функцией $R(x)$ предложили итеративную процедуру

$$x_{n+1} = x_n - a_n V_n, \tag{2}$$

названную процедурой стохастической аппроксимации, где V_n — результат измерений $R(x)$ на n-м шаге, последовательность положительных чисел a_n должна быть такой чтобы $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty, \quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty.$

Формула (2) исследовалась многими авторами. При довольно общих ограничениях на $R(x)$, a_n и вид случайных погрешностей $\xi(n, x, \omega)$ доказана (см., например, [2, 3]) сходимость x_n к θ при $n \to +\infty$ в среднеквадратическом и с вероятностью 1. При дополнительных ограничениях на $R(x)$ и $\xi(n, x, \omega)$ доказана [2, 3] асимптотическая нормальность процедуры (2), получена [3] оценка скорости сходимости распределения случайной величины $\sqrt{n}(x_n - \theta)$ к нормальному закону, установлен [4] закон повторного логарифма, доказана [5] сходимость ступенчатых процессов, построенных по последовательным итерациям процедуры (2) к диффузионному процессу.

В работе [6] в случае, когда для $R(x)$ выполнены соотношения

$$R(x) < c_1 x + d_1, \quad x > \theta,$$

$$R(x) > c_2 x - d_2, \quad x < \theta,$$

c_1, c_2, d_1 и d_2 — положительные константы, а $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) = R(\infty) > L > 0$, где постоянная L такая, что $P\{|V_n - R(x_n)| \leqslant L\} = 1$, найдена оценка $P\{x_n > \varepsilon\} \leqslant \exp\{-\gamma n\}$, $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, а если $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) < L$, то $P\{x_n > \varepsilon\} \leqslant \exp(-n^{R(\infty)/L - \delta}) \ \forall\ \delta > 0, \quad n > n_0(\delta)$.

В [7] методами, отличными от методов [6], при менее ограничительных условиях получена оценка вида $P\{x_{n+1} \leqslant -\varepsilon\} \leqslant (n + c) \exp\{-\gamma n\}$. $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$. Отметим, что в работах [6, 7] ошибки в измерениях $R(x)$ предполагались независимыми. Вместе с тем (см., например, [3, 8, 9]) более естественным представляется предположение «слабой» зависимости результатов измерений, т. е. ошибки в измерениях $R(x)$ становятся практически независимыми по истечении достаточно длительного времени, прошедшего между измерениями.

В данной работе для процедур стохастической аппроксимации вида (2) в случае слабо зависимых погрешностей в измерениях функции $R(x)$ построены экспоненциальные оценки для вероятности уклонения приближения x_n от корня θ. Полученные неравенства применимы при построении достаточно «узкого» доверительного интервала для θ — искомого корня уравнения (1).

Сформулируем некоторые предположения.

Определение [9]. *Стационарная в «узком» смысле последовательность называется удовлетворяющей условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.), если при* $m \to +\infty$

$$\sup_{A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{n},\ B \in \mathfrak{M}_{n+m}^{+\infty}} |P(B/A) - P(B)| = \varphi(m) \to 0.$$

Здесь $\mathfrak{M}_{-\infty}^{n}$ *— σ-алгебра, порожденная стационарной последовательностью* $\{\xi_k\}$ *до момента времени «n» — «прошлое» процесса;* $\mathfrak{M}_{n+m}^{+\infty}$ *— σ-алгебра, порожденная стационарной последовательностью* $\{\xi_k\}$ *после момента времени «n + m», т. е. будущее случайного процесса* $\varphi(m)$ *— коэффициент равномерного сильного перемешивания.*

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $x = \theta$, *причем известна априорная оценка корня* $|\theta| \leqslant N < +\infty$, $R(x)$ *такая, что*

$$\forall\, x \in (-\infty, +\infty) \quad 0 < \gamma_0 \leqslant \frac{R(x)}{x - \theta}; \tag{3}$$

2) *в момент времени* $k+1$ *в точке* x_k *наблюдается* $V_k = R(x_k) + \xi_k(\omega)$, *где* ξ_k *— случайные ошибки в измерениях* $R(x)$ *— образуют стационарную в узком смысле последовательность, удовлетворяющую условию р. с. п., причем* $M\xi_k = 0$ *при каждом* k *и с вероятностью* 1 $|\xi_k| \leqslant L < +\infty$;

3) *коэффициент равномерно сильного перемешивания такой, что* $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \leqslant Q \leqslant +\infty$ *при некотором* $1/2 \leqslant \beta < 1$, $n^{1-\beta}\varphi(n^\beta) \to 0$ *при* $n \to 0$;

4) x_n *определяется рекуррентной процедурой* (2) *при* $a_n = a/n : a > 0$ и $a^2\gamma_0 < 2a \leqslant 1$.

Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *и натурального* n *таких, что* $\varepsilon > \dfrac{2L(1+4Q)}{n^\beta}$ и $\dfrac{N}{(\delta n)^{a\gamma_0}} + \dfrac{2^{a\gamma_0}L}{a\gamma_0} - \dfrac{\varepsilon\gamma_0}{2}\sum_{i=\delta n}^{n-1}\dfrac{1}{i} < -1$, $\delta n > 1$ (*индекс* δn *означает* $[\delta_n]$), *справедливо неравенство*

$$P\{|x_n - \theta| > \varepsilon\} \leqslant n^\beta C_1 e^{-\frac{(\delta n - 1)}{n^\beta}C_2\varepsilon},$$

где

$$C_1 = \frac{32L}{\varepsilon - \dfrac{4eL(1+4Q)}{n^\beta}}, \quad C_2 = \frac{1}{8L}\left(1 - \frac{16eLn\varphi(n^\beta)}{\varepsilon(\delta n - 1)} - \frac{4eL(1+4Q)}{\varepsilon n^\beta}\right).$$

Доказательство базируется на следующих леммах.

Лемма 1. *Существуют целое число* k_0 *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при* $k > k_0$ *справедливо*

$$\{x_k - \theta \leqslant \varepsilon/2\} \subset \{x_{k+1} - \theta \leqslant 3\varepsilon/4\}.$$

Доказательство. $x_{k+1} = x_k - \dfrac{a}{k}V_k \leqslant x_k - \dfrac{aR(x_k)}{k} + \dfrac{aL}{k}$. При $x_k > \theta$ $R(x_k) > 0$, поэтому $(x_{k+1} - \theta) \leqslant x_k - \theta + aL/k \leqslant \varepsilon/2 + aL/k \leqslant 3\varepsilon/4$. При $x_k \leqslant \theta$ имеем

$$x_{k+1} - \theta \leqslant (x_k - \theta)(1 - aR(x_k)/(k(x_k - \theta)) + aL/k \leqslant (x_k - \theta)(1 - a\gamma_0/k) + aL/k \leqslant \varepsilon/2 + aL/k \leqslant 3\varepsilon/4, \ k_0 = [4aL/\varepsilon].$$

Лемма 2 [6]. *Для произвольных* ε *и* T *существует* $\delta=\delta(\varepsilon, T, L)$ *такое, что*

$$P\{x_n-\theta>\varepsilon\}\leqslant P\{x_{\delta n}-\theta>T\}+P\left\{\sum_{i=\delta n}^{n-1}\frac{\xi_i}{i}\leqslant -1\right\}+\sum_{k=\delta n}^{n-1}P\left\{\sum_{i=k+1}^{n-1}\frac{\xi_i}{i}<-\frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

индекс δn *означает* $[\delta n]$.

Лемма 3 [10]. *Если* ξ_i *удовлетворяют условию р. с. п. и* ξ_i *измерима относительно* $\mathfrak{M}_{-\infty}^{i}$, *а* ξ_j, $i\neq j$, *измерима относительно* $\mathfrak{M}_j^{+\infty}$, *кроме того,* $|\xi_i|\leqslant L<+\infty$, $|\xi_j|\leqslant L<+\infty$, *то* $|M\xi_i\xi_j-M\xi_iM\xi_j|\leqslant 2L^2\varphi(|j-i|)$, *а* $M\xi_i=M\xi_j=0$ $\forall i$, $\forall j$, *т. е.* $|M\xi_i\xi_j|\leqslant 2L^2\varphi(|j-i|)$.

Лемма 4 [11, 12]. *Если* ξ_j *удовлетворяет условию р. с. п. и* $|\xi_j|\leqslant L$, *то*

$$|M\{\xi_j/\mathfrak{M}_{-\infty}^{i}\}-M\xi_j|\leqslant 2L\varphi(|j-i|).$$

Доказательство теоремы. 1. Оценим вероятность $P\{x_{\delta n}-\theta>T\}$. Пусть $\delta n=m$, т. е. $P\{x_{\delta n}-\theta>T\}=P\{x_m-\theta>T\}$,

$$x_m-\theta=x_{m-1}-\theta-\frac{1}{m-1}(R(x_{m-1})+\xi_{m-1})=$$

$$=\left(1-\frac{aR(x_{m-1})}{(m-1)(x_m-\theta)}\right)(x_{m-1}-\theta)-\frac{a\xi_{m-1}}{m-1}=$$

$$=(x_0-\theta)\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{aR(x_k)}{k(x_k-\theta)}\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a\xi_i}{i}\prod_{k=i+1}^{m-1}\left(1-\frac{aR(x_k)}{k(x_k-\theta)}\right).$$

Из (3) получаем

$$\prod_{k=i+1}^{m-1}\left(1-\frac{aR(x_k)}{k(x_k-\theta)}\right)\leqslant\prod_{k=i+1}^{m-1}\left(1-\frac{a\gamma_0}{k}\right),$$

$$\prod_{k=i+1}^{m-1}\left(1-\frac{a\gamma_0}{k}\right)\leqslant\left(\frac{i+1}{m}\right)^{a\gamma_0}\quad \text{при } a\gamma_0<2.$$

Действительно,

$$\ln\prod_{k=i+1}^{m-1}(1-a\gamma_0/k)=\sum_{k=i+1}^{m-1}\ln(1-a\gamma_0/k),$$

из неравенства $\ln(1-x)\leqslant -x$ следует

$$\sum_{k=i+1}^{m-1}\ln(1-a\gamma_0/k)\leqslant\sum_{k=i+1}^{m-1}-a\gamma_0/k\leqslant -a\gamma_0\int_{i+1}^{m}dx/x\leqslant\ln(i+1)/m^{a\gamma_0},$$

т. е. $\ln\prod_{k=i+1}^{m-1}(1-a\gamma_0/k)\leqslant\ln((i+1)/m)^{a\gamma_0}$. Значит, $\prod_{k=i+1}^{m-1}(1-a\gamma_0/k)\leqslant\left(\frac{i+1}{m}\right)^{a\gamma_0}$, следовательно, $\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{a\gamma_0}{k}\right)\leqslant m^{-a\gamma_0}$. Пусть $x_0=0$. Тогда

$$x_m-\theta\leqslant|x_m-\theta|\leqslant|\theta\prod_{k=i+1}^{m-1}(1-a\gamma_0/k)|+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{a|\xi_i|}{i}\prod_{k=i+1}^{m-1}(1-a\gamma_0/k)\leqslant$$

$$\leqslant|\theta|/m^{a\gamma_0}+\frac{L}{m^{a\gamma_0}}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(i+1)^{a\gamma_0}}{i}\leqslant|\theta|m^{a\gamma_0}+\frac{2^{a\gamma_0}L}{m^{a\gamma_0}}\sum_{i=1}^{m-1}i^{a\gamma_0-1}\leqslant$$

$$\leqslant|\theta|m^{a\gamma_0}+\frac{2^{a\gamma_0}Lm^{a\gamma_0}}{m^{a\gamma_0}a\gamma_0}\leqslant N/m^{a\gamma_0}+2^{a\gamma_0}L/(a\gamma_0).$$

Значит, выбирая $T > \frac{N}{m^{a\gamma_0}} + \frac{2^{a\gamma_0}}{a\gamma_0} L$, получаем

$$P\{x_{\delta n} - \theta > T\} = P\{x_m - \theta > T\} = 0. \tag{4}$$

2. Теперь оценим вероятность $P\left\{\sum_{i=\delta n}^{n-1} \frac{\xi_i}{i} < -1\right\}$. Пусть

$$\sum_{i=\delta n}^{n-1} \frac{\xi_i}{i} = \sum_{j=0}^{l-1} Z_j + \sum_{j=0}^{l} Y_j, \tag{5}$$

где

$$z_j = \sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1} \frac{\xi_i}{i}, \quad j = 0, \ldots, l-1,$$

$$Y_j = \sum_{i=(2j+1)p+\delta n}^{(2j+2)p+\delta n-1} \frac{\xi_i}{i}, \quad j = 0, \ldots, l-1,$$

$$Y = \sum_{i=2lp+\delta n}^{n-1} \frac{\xi_i}{i},$$

$$l = \left[\frac{n-\delta n}{2p}\right] \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда для любого $t \geqslant 0$

$$-tZ_j \leqslant t\,|Z_j| \leqslant t \sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1} \frac{|\xi_i|}{i} \leqslant$$

$$\leqslant tL \ln\left(1 + \frac{p}{2jp+\delta n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{p}{2jp+\delta n-1}\right)^{tL} = \ln K_j,$$

т. е.

$$-tZ_j \leqslant \ln\left(1 + \frac{p}{2jp+\delta n-1}\right)^{tL} = \ln K_j, \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{l-1} MZ_j^2 = \sum_{j=0}^{l-1} M\left(\sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1} \frac{\xi_i}{i}\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{l-1}\left(\sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1} M\frac{\xi_i^2}{i^2} + 2\sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1}\ \sum_{r=i+1}^{(2j+1)p+\delta n} M\,\frac{\xi_i\xi_n}{i_r}\right). \tag{7}$$

По лемме 3

$$M\,\frac{\xi_i}{i}\,\frac{\xi_r}{r} \leqslant \left| M\,\frac{\xi_i\xi_r}{i_r}\right| \leqslant 2L^2\varphi(|r-i|)\,\frac{1}{ir}.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{l-1} MZ_j^2 \leqslant L^2\left(\sum_{j=0}^{l-1}\ \sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1} \frac{1}{i^2} + \sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1}\ \sum_{r=i+1}^{(2j+1)p+\delta n} \frac{\varphi(|r-i|)}{ir}\right).$$

Если $|r-i| = k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k) \leqslant Q < +\infty$, то

$$\sum_{j=0}^{l-1} MZ_j^2 \leqslant L^2(1+4Q)\sum_{j=0}^{l-1}\ \sum_{i=2jp+\delta n}^{(2j+1)p+\delta n-1} \frac{1}{i^2} \leqslant$$

$$\leqslant L^2(1+4Q)\sum_{j=0}^{(2l+1)p+\delta n-1}\frac{1}{(\delta n+j)^2}\leqslant L^2(1+4Q)\sum_{j=0}^{n+p-1}\int\limits_{j-1}^{j}\frac{dx}{(\delta n+j)^2}\leqslant$$

$$\leqslant L^2(1+4Q)\int\limits_{-1}^{n+p-1}\frac{d(\delta n+x)}{(\delta n+x)^2}\leqslant\frac{L^2(1+4Q)}{\delta n-1}. \tag{8}$$

Из (5) находим

$$P\left\{\sum_{i=\delta n}^{n-1}\frac{\xi_i}{i}<-1\right\}=P\left\{\sum_{j=0}^{l-1}z_j+\sum_{j=0}^{l}Y_j<-1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sum_{j=0}^{l-1}Z_j<-\frac{1}{2}\right\}+P\left\{\sum_{j=0}^{l}Y_j<-\frac{1}{2}\right\};$$

$$P\left\{\sum_{j=0}^{l-1}Z_j<-\frac{1}{2}\right\}\leqslant e^{-\frac{1}{2}}M\exp\left\{-t\sum_{j=0}^{l-2}Z_j\right\}M\{e^{-tZ_{l-1}}/\mathfrak{M}_{-\infty}^{l-2}\}.$$

Из леммы 4 и (6) получаем

$$P\left\{\sum_{j=0}^{l-1}Z_j<-\frac{1}{2}\right\}\leqslant e^{-\frac{1}{2}t}Me^{-t\sum\limits_{j=0}^{l-2}z_j}(Me^{-tZ_j}+2K_j\varphi(P))\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}t}\prod_{j=0}^{l-1}(Me^{-tZ_j}+2K_j\varphi(p)),$$

$$Me^{-tZ_j}=1+\sum_{m=2}^{\infty}M\frac{(tZ_j)^m}{m!}\leqslant 1+\frac{t^2MZ_j^2}{2}\sum_{m-2}^{\infty}\frac{(\ln K_j)^{m-2}}{(m-2)!}\leqslant$$

$$\leqslant 1+\frac{t^2MZ_j^2}{2}\left(1+\frac{p}{\delta n-1}\right)^{tL}.$$

Выбирая $t=\dfrac{\delta n-1}{Lp}$, имеем $Me^{-tZ_j}\leqslant 1+\dfrac{e(\delta n-1)^2}{2L^2p^2}MZ_j^2$, т. е.

$$P\left\{\sum_{j=0}^{l-1}Z_j<-\frac{1}{2}\right\}\leqslant e^{-\frac{\delta n-1}{2Lp}}\prod_{j=0}^{l-1}\left(1+\frac{e(\delta n-1)^2}{2L^2p^2}MZ_j^2+2e\varphi(p)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{\delta n-1}{2Lp}+2el\varphi(p)+\frac{e(\delta n-1)^2}{2L^2p^2}\sum_{j+0}^{l-1}MZ_j^2\right\}.$$

Из (8) при $p=n^{\beta}$ $(1/2<\beta<1)$ находим

$$P\left\{\sum_{j=0}^{l-1}Z_j<-\frac{1}{2}\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\delta n-1}{2Ln^{\beta}}+\frac{e(\delta n-1)(1+4Q)}{2n^{2\beta}}+2el\varphi(n^{\beta}).\right.$$

Аналогично

$$P\left\{\sum_{j=0}^{l-1}Y_j<-\frac{1}{2}\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\delta n-1}{2Ln^{\beta}}+\frac{e(\delta n-1)(1+4Q)}{2n^{2\beta}}+2e(l+1)\varphi(n^{\beta}),\right.$$

т. е.

$$P\left\{\sum_{i=\delta n}^{n-1}\frac{\xi_i}{i}<-1\right\}\leqslant 2e^{-\frac{\delta n-1}{2Ln^{\beta}}+\frac{e(\delta n-1)(1+4Q)}{2n^{2\beta}}}+2e(l+1)\varphi(n^{\beta}). \tag{9}$$

3. Оценим $\sum_{k=\delta n}^{n-1} P\left\{\sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{\xi_i}{i} < -\frac{\varepsilon}{4}\right\}$ сверху. Как и выше, имеем

$$P\left\{\sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{\xi_i}{i} < -\frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant 2e^{-\frac{k\varepsilon}{8Ln^\beta} + \frac{\varepsilon(1+4Q)}{2n^{2\beta}} k + 2e(l+1)\varphi(n^\beta)} =$$

$$= 2\exp\left\{-\frac{4k}{n^\beta C_1} + 2e(l+1)\varphi(n^\beta)\right\}, \qquad (10)$$

$$\sum_{k=\delta n}^{n-1} P\left\{\sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{\xi_i}{i} < -\frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant 2e^{2e(l+1)\varphi(n^\beta)} \sum_{k=\delta n}^{n-1} \int_{k-1}^{k} e^{-\frac{4k}{n^\beta C_1}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^\beta C_1}{2} e^{-\frac{4(\delta n-1)}{n^\beta C_1} + 2en^{1-\beta}\varphi(n^\beta)} = \frac{n^\beta C_1}{2} e^{-\frac{(\delta n-1)C_2\varepsilon}{n^\beta}}. \qquad (11)$$

Из (4), (9),)11) и леммы 2 получаем

$$P\{x_n - \theta > \varepsilon\} \leqslant \frac{n^\beta C_1}{2} e^{-\frac{(\delta n-1)}{n^\beta} C_2\varepsilon}.$$

Аналогично

$$P\{x_n - \theta < -\varepsilon\} \leqslant \frac{n^\beta C_1}{2} e^{-\frac{(\delta n-1)}{n^\beta} C_2\varepsilon},$$

т. е.

$$P\{|x_n - \theta| > \varepsilon\} \leqslant n^\beta C_1 e^{-\frac{(\delta n-1)}{n^\beta} C_2\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

1. *Robbins H., Monro S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Statist.— 1951.— **22**.— P. 400—407.
2. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация.— М. : Мир, 1972.— 295 с.
3. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание.— М.: Наука, 1972.— 304 с.
4. *Гапошкин В. Ф., Красулина Т. Г.* О законе повторного логарифма в процессах стохастической аппроксимации // Теория вероятностей и ее применения.— 1974.— **19**, № 4.— С. 879—886.
5. *Анисимов В. В., Анисимова З. П.* О сходимости случайных процессов, порожденных процедурой типа Роббинса — Монро // Аналитические методы в теории вероятностей.— Киев : Наук. думка, 1979.— С. 104—108.
6. *Komlos J., Revesz P.* On the convergence of the Robbins — Monro procedure // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1972.— **25**, N 1.— P. 35—47.
7. *Woodrofe H.* Normal approximations and large deviations for the Robbins — Monro process // Ibid. — **21**, N 4.— P. 329—338.
8. *Бондарев Б. В.* Неравенства больших уклонений для непрерывных процедур стохастической аппроксимации // Теория случайн. процессов.— 1981.— Вып. 9.— С. 20—25.
9. *Бородин А. И.* Процедура стохастической аппроксимации при наблюдениях, удовлетворяющих условию слабой зависимости // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— **24**, № 1.— С. 34—51.
10. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М. : Наука, 1965.— 524 с.
11. *Биллингсли Г.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.
12. *Philipp W.* The remainder in the central limit theorem for mixing stochastic process // Ann. Math. Statist.— 1969.— **40**, N 2.— P. 601—609.

Донец. ун-т

Получено 18.02.87