УДК 517.518.83

М. И. Ганзбург

О нижней оценке наилучших приближений непрерывных функций

1. Пусть C^* — банахово пространство действительнозначных непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\|_{C^*}=\max\limits_{[0,2\pi)}|f|$; $\mathcal{T}_n$ — множество тригонометрических многочленов степени n; Z_+ — множество всех неотрицательных целых чисел; $E_n^*(f)=\inf\limits_{T\in\mathcal{T}_n}\|f-T\|_{C^*}$, $f\in C^*$, $n\in Z_+$.

Нижние оценки для $E_n^*(f)$ обычно доказываются с помощью неравенства

$$E_n^*(f)\geqslant\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}fd\mu\right|,\quad f\in C^*, \tag{1}$$

где μ — комплекснозначная мера на единичной окружности, ортогональная элементам из $\mathcal{T}_n$ и удовлетворяющая условию var $\mu\leqslant 1$. В частности, из (1) следует известная теорема Валле Пуссена (см., например, [1, с. 51]) и неравенство Ньюмена—Ривлина [2]

$$E_n^*(f)\geqslant\sup_{N\in Z_+}[2(N+1)]^{-1}\left|\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_{k+n+1}+\sum_{k=1}^{N}(N-k+1)a_{k+n+N+1}\right|, \tag{2}$$

где $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx$.

В настоящей статье, обобщая подход Ньюмена — Ривлина, получаем оценку $E_n^*(f)$ через наибольшее по модулю собственное число некоторой ганкелевой матрицы, составленной из коэффициентов Фурье функции f. В качестве следствий приведены неравенство для наилучших приближений периодических функций в интегральной метрике и обобщение неравенства (2) на произвольные функции из C^*. Кроме того, указаны нижние оценки для наилучших приближений непрерывных функций алгебраическими многочленами и целыми функциями экспоненциального типа.

2. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f\in C^*$ и $a_0/2+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ — ряд Фурье функции f. Тогда справедливо неравенство*

$$E_n^*(f)\geqslant\frac{1}{2}\sup_{N\in Z_+}\max_{\alpha\in[0,2\pi)}|\lambda_{n,N,\alpha}(f)|, \tag{3}$$

где $\lambda_{n,N,\alpha}$ — наибольшее по модулю собственное число ганкелевой матрицы $A=\{\cos\alpha a_{k+j+n+1}+\sin\alpha b_{k+j+n+1}\}_{k,j=0}^{N}$.

Доказательство. Определим весовую меру

$$d\mu_{n,N,\alpha}=\frac{1}{4\pi}\left\{e^{i[(n+1)x+\alpha]}\left(\sum_{k=0}^{N}u_k e^{ikx}\right)^2+e^{-i[(n+1)x+\alpha]}\left(\sum_{k=0}^{N}u_k e^{-ikx}\right)^2\right\}dx,$$

где $u_k\in R^1$, $0\leqslant k\leqslant N$, $\sum_{k=0}^{N}u_k^2=1$. Тогда $\operatorname{var}\mu_{n,N,\alpha}\leqslant 1$, и мера $\mu_{n,N,\alpha}$ ортогональна любой функции из $\mathscr{T}_n$. Применяя неравенство (1), получаем

$$E_n^*(f)\geqslant\left|\int_{-\pi}^{\pi}f\,d\mu_{n,N,\alpha}\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k,j=0}^{N}u_k u_j\left[\cos\alpha a_{k+j+n+1}+\sin\alpha b_{k+j+n+1}\right]\right|. \quad (4)$$

Взяв в правой части (4) супремум по всем u_k, $0\leqslant k\leqslant N$, $\sum_{k=0}^{N}u_k^2=1$, и используя известное экстремальное свойство собственных чисел симметричной матрицы (см., например, [3, с. 140]), имеем $E_n^*(f)\geqslant\frac{1}{2}\lambda_{n,N,\alpha}(f)$, $\alpha\in[0,2\pi)$, $N\in Z_+$. Отсюда следует справедливость неравенства (3). Теорема доказана.

3. Из теоремы 1 вытекают следующие результаты.

Следствие 1. *Имеет место неравенство*

$$E_n^*(f)\geqslant\sup_{N\in Z_+}\max_{\alpha\in[0,2\pi)}\left[2(N+1)\right]^{-1}\left|\sum_{k=0}^{N}(k+1)\left(\cos\alpha a_{k+n+1}+\sin\alpha b_{k+n+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{N}(N-k+1)\left(\cos\alpha a_{k+n+N+1}+\sin\alpha b_{k+n+N+1}\right)\right|. \quad (5)$$

Доказательство. Неравенство (5) следует из соотношения (3) и неравенства $\lambda_{n,N,\alpha}\geqslant\left|\sum_{i,j=0}^{N}u_i u_j(\cos\alpha a_{i+j+n+1}+\sin\alpha b_{i+j+n+1})\right|$, где $u_k=(N+1)^{-1/2}$, $k=0,\ldots,N$.

При $b_k=0$, $0\leqslant k<\infty$, из (5) следует (2).

Пусть $C(a,b)$ — банахово пространство действительнозначных непрерывных на $[a,b]$ функций f с нормой $\|f\|_{C(a,b)}=\max_{[a,b]}|f|$; $\mathscr{P}_n$ — множество алгебраических многочленов степени n; $E_n(f)=\inf_{P\in\mathscr{P}_n}\|f-P\|_{C(-1,1)}$, $f\in C(-1,1)$, $n\in Z_+$.

Следствие 2. *Пусть $f\in C(-1,1)$ и $a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\arccos x$ — ряд Фурье — Чебышева функции f. Тогда справедливо неравенство*

$$E_n(f)\geqslant\frac{1}{2}\sup_{N\in Z_+}|\lambda_{n,N}(f)|, \quad (6)$$

где $\lambda_{n,N}(f)=\lambda_{n,N,0}(f_1)$, $f_1(x)=f(\cos x)$, $x\in[0,2\pi)$.

Пусть L_1^* — банахово пространство действительнозначных измеримых 2π-периодических функций f с нормой $\|f\|_{L_1^*}=\int_{-\pi}^{\pi}|f|\,dx$; $E_n^*(f)_1=\inf_{T\in\mathscr{T}_n}\|f-T\|_{L_1^*}$, $f\in L_1^*$, $n\in Z_+$.

Следствие 3. *Пусть $f\in L_1^*$ и $a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ — ряд*

Фурье функции f. Тогда справедливо неравенство

$$E_n^*(f)_1 \geqslant \frac{1}{2}\sup_{N\in Z_+}\max_{\alpha\in[0,2\pi)}|\lambda^{(1)}_{n,N,\alpha}(f)|, \tag{7}$$

где $\lambda^{(1)}_{n,N,\alpha}(f)$ — наибольшее по модулю собственное число ганкелевой матрицы $\{(\cos\alpha a_{k+j+n+1}+\sin\alpha b_{k+j+n+1})/(k+j+n+1)\}_{k,j=0}^N$.

Доказательство. Пусть $T_n = a_0'/2+\ldots$ — многочлен из $\mathscr{T}_n$, удовлетворяющий равенству $\|f-T_n\|_{L_1^*}=E_n^*(f)_1$. Полагая $h(x)=$
$=\int_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt$, $Q_n(x)=\int_0^x\left[T_n(t)-\frac{a_0'}{2}\right]dt$, имеем $h\in C^*$, $Q_n\in\mathscr{T}_n$. Обозначая $F_n=f-T_n$, $E_+=\{t\in[0,2\pi):F_n(t)\geqslant 0\}$, $E_-=\{t\in[0,2\pi):F_n(t)<0\}$, получаем

$$E_n^*(h)\leqslant\max_{[0,2\pi]}|h-Q_n|=\max_{x\in[0,2\pi)}\left|\int_0^x F_n dt-\frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_n(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{x\in[0,2\pi)}\max\left\{\left|\int_{E_+}F_n dt-\frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_n(t)\,dt\right|,\ \left|\int_{E_-}F_n dt-\frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_n(t)\,dt\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left\{\left|\int_{E_+}F_n dt\right|,\left|\int_{E_-}F_n dt\right|\right\}.$$

Следовательно, доказано неравенство

$$E_n^*(h)\leqslant E_n^*(f)_1. \tag{8}$$

Из неравенств (3), (8) имеем

$$E_n^*(f)_1\geqslant\frac{1}{2}\sup_{N\in Z_+}\max_{\alpha\in[0,2\pi)}|\lambda_{n,N,\alpha}(h)|. \tag{9}$$

Так как $\lambda_{n,N,\alpha}(h)=\lambda^{(1)}_{n,N,\alpha+\pi/2}(f)$, то из (9) следует справедливость (7).

4 Получим теперь непериодический аналог неравенства (3).

Пусть C — пространство непрерывных ограниченных на действительной оси R^1 действительнозначных функций f с нормой $\|f\|_C=\sup_{R^1}|f|$; $L_q(\Omega)$—пространство измеримых на $\Omega\subset R^1$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{L_q(\Omega)}=\left(\int_\Omega|f|^q dx\right)^{1/q}$, $1\leqslant q<\infty$; B_σ — множество всех целых функций экспоненциального типа σ; $A_\sigma(f)=\inf_{g\in B_\sigma}\|f-g\|_C$, $f\in C$, $\sigma>0$. Обозначим через $\hat f(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{R^1}f(t)\,e^{-ixt}dt$ — преобразование Фурье функции $f\in L_2(R^1)$ (или $f\in L_1(R^1)$); кроме того, положим $f_\alpha(x)=\pi^{-1}\int_{R^1}f(t)\cos(xt+\alpha)\,dt$, $f\in L_1(R^1)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f\in C\cap L_1(R^1)$ (или $f\in C\cap L_2(R^1)$). Тогда справедливо неравенство*

$$A_\sigma(f)\geqslant\frac{1}{2}\sup_{T\geqslant 0}\sup_{\alpha\in[0,2\pi)}|\lambda_{\sigma,T,\alpha}(f)|, \tag{10}$$

где $\lambda_{\sigma,T,\alpha}$ — наибольшее по модулю собственное число интегрального оператора $Ah(x)=\int_0^T f_\alpha(x+y+\sigma)\,h(y)\,dy$, $h\in L_2(0,T)$, $x\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть $h \in L_2(R^1)$, $\|h\|_{L_2(R^1)} = 1$, $\operatorname{supp} h \subset [0, T]$. Полагая $F(x) = \frac{1}{2}\{e^{i(\sigma x+\alpha)}(\hat{h}(-x))^2 + e^{-i(\sigma x+\alpha)}(\hat{h}(x))^2\}$, имеем $F \in L_1(R^1) \cap \cap B_{2T}$, следовательно, $F \in L_1(R^1) \cap L_2(R^1)$, и в силу формулы Планшереля $\|F\|_{L_1(R^1)} \leqslant \|h\|^2_{L_2(R^1)} = 1$. Далее имеем

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{e^{i\alpha}\int_{R^1} h(t)\,h(y-t-\sigma)\,dt + e^{-i\alpha}\int_{R^1} h(t)\,h(-y-t-\sigma)\,dt\right\}.$$

Отсюда получаем $\hat{F}(y) = 0$ $\forall y \in (-\sigma, \sigma)$. Следовательно, в силу теоремы Пэли — Винера при всех $g \in B_\sigma \cap L_2(R^1)$ имеем

$$\int_{R^1} gF\,dx = 0. \tag{11}$$

Докажем, что равенство (11) выполняется при всех $g \in B_\sigma \cap C$. Для произвольного $g \in B_\sigma \cap C$ полагая $g_1(x) = g[(1-2\varepsilon)x]\cdot\sin^2\varepsilon x/(\varepsilon x)^2$, $\varepsilon > 0$, получаем

$$\left|\int_{R^1} gF\,dx\right| \leqslant \left|\int_{R^1}(g-g_1)F\,dx\right| + \left|\int_{R^1} g_1F\,dx\right| = I_1 + I_2. \tag{12}$$

Так как $g_1 \in B_\sigma \cap L_2(R^1)$, то

$$I_2 = 0. \tag{13}$$

Далее

$$I_1 \leqslant \int_{R^1}|g(x) - g[(1-2\varepsilon)x]|\,|F(x)|\,dx + \int_{R^1}|(1-(\sin^2\varepsilon x/(\varepsilon x)^2)\times$$

$$\times\, g((1-2\varepsilon)x)\,F(x)|\,dx = I_1' + I_1''. \tag{14}$$

Применяя неравенство Бернштейна, находим

$$I_1' \leqslant \int_{|x|\leqslant\varepsilon^{-1/2}} + \int_{|x|>\varepsilon^{-1/2}} \leqslant 2\sigma\sqrt{\varepsilon}\,\|g\|_C\int_{R^1}|F|\,dx + 2\,\|g\|_C\int_{|x|>\varepsilon^{-1/2}}|F|\,dx. \tag{15}$$

Используя неравенство $\tau - \sin\tau \leqslant \tau^3/6$, $\tau > 0$, имеем

$$I_1'' \leqslant \int_{|x|\leqslant\varepsilon^{-1/2}} + \int_{|x|>\varepsilon^{-1/2}} \leqslant \frac{\varepsilon^{3/2}\,\|g\|_C}{3}\int_{R^1}|F|\,dx + 2\,\|g\|_C\int_{|x|>\varepsilon^{-1/2}}|F|\,dx. \tag{16}$$

Из неравенств (12)—(16) в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ следует справедливость (11) при всех $g \in B_\sigma \cap C$.

Следовательно, мера μ, определяемая соотношением $d\mu = F dx$, ортогональна элементам из $B_\sigma \cap C$ и $\operatorname{var}\mu \leqslant 1$. Применяя непериодический аналог (1), получаем

$$A_\sigma(f) \geqslant \left|\int_{R^1} fF\,dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{R^1}\int_{R^1} f_{-\alpha}(x+y+\sigma)\,h(x)\,h(y)\,dx\,dy\right|. \tag{17}$$

Взяв супремум в правой части (17) по $h \in L_2(0, T)$, $\|h\|_{L_2(0,T)} = 1$, и использовав известное экстремальное свойство собственных значений интегральных операторов с симметричным ядром (см., например, [4, с. 166]), будем иметь $A_\sigma(f) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{\sigma,T,-\alpha}$. Отсюда следует справедливость неравенства (10). Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть $f \in C \cap L_1(R^1)$ — четная функция, и f_α при $\alpha = 0$ удовлетворяет условию: f_0 неотрицательна и не возрастает на (σ, ∞). Тогда имеет место неравенство*

$$A_\sigma(f) \geqslant \frac{1}{4}\sup_{T\geqslant 0} Tf_0(\sigma+T). \tag{18}$$

Доказательство. Положив $h_T(x) = \begin{cases} T^{-1/2}, & x \in [0, T], \\ 0, & x \in R^1 \setminus [0, T], \end{cases}$ имеем

$$\lambda_{T,\sigma,0}(f) \geqslant \Big| \int\limits_{R^1} \int\limits_{R^1} f_0(x + y + \sigma) h_T(x) h_T(y)\, dx dy \Big| = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_y^{y+T} f_0(z + \sigma)\, dz dy =$$

$$= \frac{1}{T} \Big| \int\limits_0^T y f_0(y + \sigma)\, dy + \int\limits_0^T (T - y) f_0(y + \sigma + T)\, dy \Big|. \tag{19}$$

Последнее равенство получено с помощью интегрирования по частям.

Используя условия, налагаемые на f_0, из (19) получаем

$$\lambda_{T,\sigma,0} \geqslant \frac{1}{T} \int\limits_0^T y f_0(y + \sigma)\, dy \geqslant \frac{1}{2} T f_0(\sigma + T). \tag{20}$$

Из неравенств (10), (20) следует справедливость соотношения (18).

Периодический аналог неравенства (18) доказан в [2]. Следует также отметить, что из неравенств (10), (19) вытекает непериодический аналог соотношения (2).

5. Приведем некоторые примеры и замечания.

А. Из теоремы Штурма [3, с. 146] следует, что величины $\lambda_{n,N,0}$ монотонно возрастают по N, и верхнюю грань в (6) целесообразно заменить на $\lim\limits_{N\to\infty}$. Аналогичную замену можно произвести и в неравенствах (3), (7), например, в случае четных (или нечетных) f.

Б. Справедливы равенства

$$E_n(f_a) = (a - \sqrt{a^2 - 1})^n / (a^2 - 1) = \lim_{N\to\infty} \lambda_{n,N}(f_a), \tag{21}$$

где $f_a(x) = (x - a)^{-1}$, $a > 1$. Левое равенство (21) получено Чебышевым (см., например, [5, с. 70]). Правое соотношение (21) нетрудно получить, используя равенство (см., например, [6, с. 427])

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_{n,N}(f_a) = \lim_{N\to\infty} \lim_{m\to\infty} [\operatorname{Sp} A_N^{k_m}]^{1/k_m}, \quad k_m = 2^m,$$

где $A_N = \{2(a^2 - 1)^{-1/2} (a - \sqrt{a^2 - 1})^{k+j+n+1}\}_{k,j=0}^N$.

В. Выполняются соотношения

$$A_\sigma(f_1) = \exp(-\sigma) = \sup_{T\geqslant 0} \lambda_{\sigma,T,0}(f_1), \tag{22}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} (\sigma \exp(-\sigma))^{-1} A_\sigma(f_2) = 4^{-1} = \lim_{\sigma\to\infty} (\sigma \exp(-\sigma))^{-1} \sup_{T\geqslant 0} \lambda_{\sigma,T,0}(f_2) =$$

$$= \lim_{\sigma\to\infty} (\sigma(\exp(-\sigma))^{-1} (2 + \sigma + ((1 + \sigma)^2 + 1)^{1/2}))/8, \tag{23}$$

где $f_k(x) = (x^2 + 1)^{-k}$, $k = 1, 2$. Левые равенства (22), (23) доказаны Бернштейном [7], а правые соотношения (22), (23) получены с помощью решений соответствующих интегральных уравнений.

Г. Из соотношений (21)—(23) следует, что константа $C = 0{,}5$ в неравенствах (3), (6), (10) для некоторых функций может быть заменена на $C = 1$. Можно предположить, что константа $C = 1$ является наилучшей в указанных неравенствах.

Д. Используем неравенство (18) для решения задачи об оценке нормы функции из B_T, наименее уклоняющейся от нуля.

Пусть $D_{T,N}$ — класс функций g_T из B_T, удовлетворяющих неравенству $|g_T(x)| \leqslant C_1(1 + |x|)^{-N}$ $\forall x \in R^1$, где $C_1 = C_1(g_T)$ — некоторая константа и $N \geqslant 0$ — целое число. Имеют место следующие утверждения:

1) если $g_T \in D_{T,N}$, то

$$A_\sigma(g_T) \leqslant C_2(1 - \sigma/T)^N \quad \forall \sigma \in (0, T); \tag{24}$$

2) для функции $g_{T,0}(x) = (xT)^{-N+1/2} J_{N-1/2}(xT) \in D_{T,N}$ имеем

$$A_\sigma(g_{T,0}) \geqslant C_3 (1-\sigma/T)^N \quad \forall \sigma \in (0, T). \tag{25}$$

Здесь C_2, $C_3 > 0$, константы, не зависящие от σ, T, а J_ν — функция Бесселя порядка ν.

В случае $N = 0$ неравенство (24) тривиально, а неравенство (25) известно [5, с. 227]. Достаточно доказать соотношения (24), (25) при $N \geqslant 1$, $T = 1$, $\sigma \in (0, 1)$.

Используя формулу Тейлора, имеем

$$A_\sigma(g_1) \leqslant \sup_{x \in R^1} | g_1(x) - \sum_{k=0}^{N-1} (g_1^{(k)}(\sigma x)((1-\sigma)x)^k (k!)^{-1}) | \leqslant$$

$$\leqslant (N!)^{-1} (1-\sigma)^N \sup_{x \in R^1} (|x|^N \max_{\sigma|x| \leqslant t \leqslant |x|} |g_1^{(N)}(t)|) \leqslant C_4 \min(1, ((1-\sigma)/\sigma)^N), \tag{26}$$

и неравенство (24) доказано; последнее неравенство в (26) следует из принадлежности $g_1^{(k)} \in D_{1,N}$, которая вытекает из ограниченности функции $(x^N g_1(x))^{(k)}$, $k \geqslant 0$, на R^1, если воспользоваться индукцией по k.

Далее $\hat{g}_{1,0}(x) = C_5 (1-x^2)^{N-1}$ и, используя неравенство (18), получаем $A_\sigma(g_{1,0}) \geqslant 4^{-1} C_5 \max_{0 \leqslant T \leqslant 1-\sigma} T(1-(\sigma+T)^2)^{N-1} \geqslant 3^{N-1} \cdot 2^{-2N-1} \cdot C_5 (1-\sigma)^N$, где C_5 зависит лишь от N. Неравенство (25) доказано.

Отметим, что рассмотренная задача является аналогом задачи [2] о приближении в $C(-1, 1)$ монома x^n многочленами степени $k < n$.

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
2. *Newman D. J., Rivlin T. J.* Approximation of monomials by lower degree polynomials // Aequat. math.— 1976.— **14**, N 3.— P. 451—455.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1969.— 368 с.
4. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям.— М. : Физматгиз, 1959. — 232 с.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.— 408 с.
6. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики.— М. : Физматгиз, 1963.— 659 с.
7. *Бернштейн С. Н.* Новый вывод и обобщение некоторых формул наилучшего приближения // Собр. соч.— М. : Изд-во АН СССР, 1954.— Т. 2.— С. 402—404.

НПО «Черметмеханизация», Днепропетровск

Получено 14.11.86