УДК 517.946

В. Г. САМОЙЛЕНКО (Ин-т математики АН Украины, Киев),
Н. Н. ПРИТУЛА (Львов. ун-т), **У. С. СУЯРОВ** (Самарканд. ун-т),
кандидаты физ.-мат. наук

Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега — де Фриза

Для нелинейной динамической системы, ассоциированной с инверсным уравнением Кортевега — де Фриза $u_t = v$, $v_t = p$, $p_t = u_x + uv$ установлена полная интегрируемость по Лиувиллю, в частности, найдены гамильтонова форма записи, бесконечная иерархия инволютивных законов сохранения, согласованная имплектическая пара нетеровых операторов и представление типа Лакса.

Для нелінійної динамічної системи, асоційованої з інверсним рівнянням Кортевега — де Фріза $u_t = v$, $v_t = p$, $p_t = u_x + uv$ встановлено повну інтегровність за Ліувілем, зокрема, знайдено гамільтонову форму запису, нескінченну ієрархію інволютивних законів збережен-ня, погоджену імплектичну пару нетерових операторів і представлення типу Лакса.

1. Законы сохранения. Исследованию нелинейной динамической системы Кортевега — де Фриза

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \tag{1}$$

($t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционный параметр, $u \in M \simeq C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ — бесконечномерное l-периодическое функциональное многообразие, $0 < l < \infty$) посвящено большое количество работ, в которых, в частности, на основе метода изоспектральных деформаций Лакса установлена его полная интегрируемость по Лиувиллю (см., например, [1, 2]). Определенный теоретический интерес представляет исследование полной интегрируемости инверсного уравнения КдФ, получаемого из уравнения (1) с помощью отображения инверсии $\mathbb{R}^1 \ni x \rightleftarrows t \in \mathbb{R}^1$. Полученная таким образом новая динамическая система представима в виде $u_t = v$, $v_t = p$, $p_t = u_x + uv$ или

$$w_t = \begin{pmatrix} u \\ p \\ v \end{pmatrix}_t = K[w] = K[u, p, v] = \begin{pmatrix} v \\ u_x + uv \\ p \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $K: M \to T(M)$ — гладкое по Фреше полиномиальное векторное поле, заданное на бесконечномерном функциональном многообразии $M \simeq C_l^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^3)$.

Используя градиентно-голономный алгоритм исследования интегрируемости нелинейных динамических систем [3—6], покажем, что инверсная динамическая система КдФ (2) обладает на многообразии M стандартным представлением типа Лакса и является вполне интегрируемым гамильтоновым потоком.

Изучим вначале задачу о существовании бесконечной иерархии законов сохранения для динамической системы (2). С этой целью рассмотрим уравнение Лакса [7]

$$\varphi_t + K'^*\varphi = 0, \tag{3}$$

где $\varphi \in T^*(M)$, штрих обозначает производную Фреше нелинейного локального функционала $K[u, p, v]$, $*$ — сопряжение относительно стандартной билинейной формы на $T^*(M) \times T(M)$,

$$K'^* = \begin{Vmatrix} 0 & v-\partial & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & u & 0 \end{Vmatrix}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Уравнение (3) допускает асимптотическое решение в виде

$$\varphi(x, t; \lambda) = (1, b(x, t; \lambda), c(x, t; \lambda))^\tau \exp[z(\lambda)x + \omega(\lambda)t + \partial^{-1}\sigma(x, t; \lambda)], \tag{4}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^1$ — параметр, τ — знак транспонирования, $z(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ — «дисперсионные» функции, учитывающие явную зависимость вектора $\varphi \in T^*(M)$ от комплексного параметра λ,

$$\partial^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{x_0}^{x}(\cdot)\,dx - \int\limits_{x}^{x_0+l}(\cdot)\,dx\right]$$

— оператор «обратного» дифференцирования, $\partial\cdot\partial^{-1} = 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ — произвольная фиксированная точка. Справедливы асимптотические при $|\lambda| \to \infty$ разложения

$$b(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j=2}^{\infty} b_j[u, p, v]\,\lambda^{-j},$$

$$c(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} c_j[u, p, v]\,\lambda^{-j},$$

$$\sigma(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j[u, p, v]\,\lambda^{-j}.$$

Подставляя выражение (4) в уравнение Лакса (3) при $|\lambda| \to \infty$, находим представление

$$\varphi(x, t; \lambda) = (1, b(x, t; \lambda), c(x, t; \lambda))^\tau \exp[\lambda^3 x + \lambda t + \partial^{-1}\sigma(x, t; \lambda)] \tag{5}$$

и бесконечную систему рекуррентных соотношений

$$\delta_{j,-1} + \partial^{-1}(\sigma_j)_t + vb_j - (b_j)_x - b_{j+3} - \sum_k b_{j-k}\sigma_k = 0,$$

$$(b_j)_t + \sum_k (b_k)_x b_{j-k} + \sum_k b_{j+3-k}b_k + \sum_{k,s} b_{j-k}b_{k-s}\sigma_s -$$

$$- v\sum_k b_{j-k}b_k + c_j = 0, \quad k, s, j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$(c_j)_t + \sum_k (b_k)_x c_{j-k} + \sum_k c_{j+3-k}b_k + \delta_{j,0} + ub_j +$$

$$+ \sum_{k,s} c_{j-k}b_{k-s}\sigma_s - v\sum_k c_{j-k}b_k = 0,$$

откуда можно определить в явном виде локальные функционалы $\sigma_j = \sigma_j[u,p,v]$, $j\in\mathbb{Z}_+$, первые из которых записываются следующим образом:

$$\sigma_1=\frac{p}{3}-\frac{u^2}{6},\quad b_1=0,\quad c_1=-1,\quad \sigma_2=\frac{2}{3}u_x,\quad b_2=1,\quad c_2=0,$$

$$\sigma_3=\frac{v^2}{18}-\frac{up}{9}+\frac{u^3}{27},\quad b_3=0,\quad c_3=-\frac{2}{3}u,\quad \sigma_4=\frac{1}{9}uu_x,$$

$$b_4=\frac{u}{3},\quad c_4=0,\quad \sigma_5=\frac{1}{18}\left(u^2p-p^2-\frac{1}{3}u^4-uv_x+u_xv\right),$$

$$b_5=\frac{v}{5},\quad c_5=-\frac{1}{6}u^2,\ldots:$$

Учитывая представление (5), находим, что все функционалы

$$\gamma_j=\partial_{(l)}^{-1}(\sigma_j[u,p,v])=\int\limits_0^l \sigma_j[u,p,v]\,dx,\quad j\in\mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

являются законами сохранения для динамической системы (2), причем в силу построения функционально независимыми.

Используя (6), (7), вычисляем выражения для $\operatorname{grad}\gamma_j$, $j=0,1,\ldots$:

$$\operatorname{grad}\gamma_0=\operatorname{grad}\gamma_2=\operatorname{grad}\gamma_4=(0,0,0)^\tau,$$

$$\operatorname{grad}\gamma_1=\left(-\frac{u}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)^\tau,\quad \operatorname{grad}\gamma_3=\frac{1}{9}(u^2-p,\ -u,\ v)^\tau, \tag{7}$$

$$\operatorname{grad}\gamma_5=\frac{1}{9}\left(up-u^3-v_x,\ \frac{1}{2}u^2-p,\ u_x\right)^\tau,\ldots.$$

2. Семейство имплектических пар нетеровых операторов. Кососимметрический оператор $\mathcal{A}: T^*(N)\to T(N)$, N — некоторое функциональное многообразие, называется *имплектическим*, если функционал $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{A}}=\left(\frac{\delta(\cdot)}{\delta u},\ \mathcal{A}\frac{\delta(\cdot)}{\delta u}\right)$, где $u\in N$, $\frac{\delta}{\delta u}$ — вариационная производная, удовлетворяет обычному тождеству Якоби, и оператор $\mathcal{A}$ называется *нетеровым* для динамической системы $u_t=K[u]$, $u\in N$, если справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}=\frac{\partial\mathcal{A}(u,x;t)}{\partial t}+\mathcal{A}'\cdot K=\mathcal{A}K'^*+K'\cdot\mathcal{A}, \tag{8}$$

где K' — производная Фреше функционала $K[u]$.

Имплектический оператор A удовлетворяет тождеству

$$(a,(\mathcal{A}'\cdot\mathcal{A}b)c)+(b,(\mathcal{A}'\mathcal{A}\cdot c)a)+(c,(\mathcal{A}'\cdot\mathcal{A}a)b)=0,\quad \forall a,b,c\in T^*(N).$$

Если динамическая система $u_t=K[u]$ обладает двумя имплектическими и нетеровыми операторами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ (обозначают «$(\mathcal{L},\mathcal{M})$-пара») и существует обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$, то оператор $\Lambda\doteq\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}: T^*(N)\to T^*(N)$ называют *рекурсионным*. Рекурсионный Λ и имплектические операторы играют важную роль в теории вполне интегрируемых динамических систем и позволяют, например, для исследуемой динамической системы определить скобку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}\in\{\mathcal{L},\mathcal{M}\}$, найти ее гамильтонову (бигамильтонову) форму записи $\frac{du}{dt}=\{H_{\mathcal{A}},u\}_{\mathcal{A}}=-\mathcal{A}\operatorname{grad}H_{\mathcal{A}}$, где $H_{\mathcal{A}}$ — гамильтониан рассматриваемой динамической системы, $A\in\{\mathcal{L},\mathcal{M}\}$, получить в явном виде их законы сохранения [3].

Динамическая система $u_t = K[u]$, $u \in N$, называется *вполне интегрируемой*, если существует пара имплектических и нетеровых операторов $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ на многообразии N таких, что рекурсионный оператор $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$ удовлетворяет уравнению типа Лакса

$$\frac{d}{dt}\Lambda = [\Lambda, K'^*]$$

либо билинейный оператор $[\Lambda^{*\prime}, \Lambda^*] : T(N) \times T(N) \to T(N)$ является симметричным на $T(N)$ (*условие согласованности*).

Покажем, что динамическая система (2) бигамильтонова [7, 8, 3], т. е. справедливы представления

$$w_t = K[w] = -\mathscr{L}\,\mathrm{grad}\, H = -\mathscr{M}\,\mathrm{grad}\,\tilde{H},$$

где $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ — имплектические операторы, H, $\tilde{H}$ — функционалы Гамильтона для динамической системы (2) на M.

Для нахождения операторов $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ в явном виде воспользуемся уравнением (8) и идеями теории возмущений [3]. Будем считать, что точка $w = (u, p, v)^\tau \in M$ имеет первый порядок малости относительно малого параметра $\varepsilon > 0$: $u = \varepsilon u_1$, $p = \varepsilon p_1$, $v = \varepsilon v_1$. Тогда представляя $\mathscr{A}$ и K с помощью разложений $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \varepsilon\mathscr{A}_1 + \ldots$, $K = \varepsilon K^{(1)} + \varepsilon^2 K^{(2)} + \ldots$, обозначая $K^{(j+1)\prime} = K_j'$, $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_0} + \varepsilon\frac{d}{dt_1} + \ldots$, подставляя данные выражения в уравнение вида (8) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, находим ($\mathscr{A} \in \{\mathscr{L}, \mathscr{M}\}$)

$$\mathscr{L}_0 K_0'^* + K_0'\cdot\mathscr{L}_0 = 0, \quad \frac{d\mathscr{L}_1}{\partial t_0} = \mathscr{L}_0 K_1'^* + \mathscr{L}_1 K_0'^* + K_0'\cdot\mathscr{L}_1 + K_1'\cdot\mathscr{L}_0,$$
$$\frac{d\mathscr{L}_2}{dt_0} = \mathscr{L}_0 K_2'^* + \mathscr{L}_1 K_1'^* + \mathscr{L}_2 K_0'^* + K_0'\cdot\mathscr{L}_2 + K_1'\cdot\mathscr{L}_1 + K_2'\cdot\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1'\cdot K^{(2)}, \ldots, \tag{9}$$

где

$$K_0' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \partial & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad K_0'^* = \begin{Vmatrix} 0 & -\partial & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$K_1' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0. \end{Vmatrix}, \quad K_1'^* = \begin{Vmatrix} 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Умножая уравнения (9) на вектор $\varphi^{(0)} \in T^*(M)$, удовлетворяющий уравнению вида (3)

$$\frac{d\varphi^{(0)}}{dt_0} + K_0'^*\cdot\varphi^{(0)} = 0,$$

последовательно получаем

$$\frac{d}{dt_0}(\mathscr{L}_0\varphi^{(0)}) = K_0'\cdot(\mathscr{L}_0\varphi^{(0)}),$$
$$\frac{d}{dt_0}(\mathscr{L}_1\varphi^{(0)}) - K_0'\cdot(\mathscr{L}_1\varphi^{(0)}) = \mathscr{L}_0(K_1'^*\varphi^{(0)}) + K_1'\cdot(\mathscr{L}_0\varphi^{(0)}). \tag{10}$$

Учитывая l-периодичность многообразия M, для нахождения решений уравнений (10) можно воспользоваться разложением в ряд Фурье. Запишем функции w, $\varphi^{(0)}$ следующим образом:

$$u_1 = \sum_{k(\pm)} u_{1,k(\pm)}\psi_{k(\pm)} + \sum_{k(0)} u_{1,k(0)}\psi_{k(0)},$$

$$p_1 = \sum_{k(\pm)} \beta_{\pm}^2 k^2(\pm)\, u_{1,k(\pm)}\psi_{k(\pm)} + \sum_{k(0)} k^2(0)\, u_{1,k(0)}\psi_{k(0)},$$

$$v_1 = \sum_{k(\pm)} \beta_{\pm} k(\pm)\, u_{1,k(\pm)}\psi_{k(\pm)} + \sum_{k(0)} k(0)\, u_{1,k(0)}\psi_{k(0)}, \tag{11}$$

$$\varphi_1^{(0)} = -\sum_{k(\pm)} \beta_{\pm} k(\pm)\, \varphi_{3,k(\pm)}^{(0)}\psi_{k(\pm)} - \sum_{k(0)} k(0)\, \varphi_{3,k(0)}^{(0)}\psi_{k(0)},$$

$$\varphi_2^{(0)} = -\sum_{k(\pm)} (\beta_{\pm} k(\pm))^{-1} \varphi_{3,k(\pm)}^{(0)}\psi_{k(\pm)} - \sum_{k(0)} (k(0))^{-1} \varphi_{3,k(0)}^{(0)}\psi_{k(0)},$$

$$\varphi_3^{(0)} = \sum_{k(\pm)} \varphi_{3,k(\pm)}^{(0)}\psi_{k(\pm)} + \sum_{k(0)} \varphi_{3,k(0)}^{(0)}\psi_{k(0)},$$

где введены обозначения: $\beta_{\pm} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$, $\psi_{k(\pm)} = \exp(k^3x + \beta_{\pm}kt)$, $\psi_{k(0)} = \exp(k^3x + kt)$, числа $u_{1,k(\pm)}$, $\varphi_{3,k(\pm)}^{(0)}$, $u_{1,k(0)}$, $\varphi_{3,k(0)}^{(0)} \in \mathbb{C}^1$ — постоянны и произвольны, $k \in (2\pi i/l)\,\mathbb{Z}$, и использованы равенства $\varphi_{t_0}^{(0)} = -K_0'^{*} \times \varphi^{(0)}$, $w_{1,t_0} = K_0' \cdot w_1$. Подставляя последовательно разложения (11) в уравнения (10), используя соотношение $\mathscr{L}_0\varphi^{(0)} = \alpha^{(0)}$, где $\varphi^{(0)} = (\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)})^\tau$, $\alpha^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)})^\tau \equiv (u_1, p_1, v_1)^\tau$ имеют вид (11), $\mathscr{L}_0 = \| \mathscr{L}_0^{(ij)} \|$, $i, j = 1, 2, 3$, — искомый оператор, после некоторых вычислений находим, что линейное пространство решений для оператора $\mathscr{L}_0$ является трехмерным по каждому дифференциальному порядку его степени. При этом пространство имеет только два алгебраически независимых базисных элемента, которые и порождают имплектическую пару нетеровых операторов для рассматриваемой динамической системы (2). Получаем один из возможных операторов в следующем виде [9]:

$$\mathscr{L}_0 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \partial & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Для нахождения оператора $\mathscr{L}_1 = \| \mathscr{L}_1^{(ij)} \|$, $i, j = 1, 2, 3$, необходимо решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение (10). Обозначая $\mathscr{L}_1\varphi^{(0)} = \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\tau$ и используя явный вид операторов $\mathscr{L}_0$, K_1', $K_1'^{*}$, получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dt_0}\theta_1 - \theta_3 = -u_1\varphi_2^{(0)} \equiv g_1,$$

$$\frac{d}{dt_0}\theta_2 - (\theta_1)_x = = v_1\varphi_3^{(0)} + u_1\varphi_1^{(0)} \equiv g_2, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt_0}\theta_3 - \theta_2 = v_1\varphi_2^{(0)} \equiv g_3,$$

откуда находим уравнение

$$\frac{d^3}{dt_0^3}\theta_1 - (\theta_1)_x = \frac{d^2}{dt_0^2} g_1 + \frac{d}{dt_0} g_3 + g_2,$$

решение которого позволяет определить, что

$$\mathscr{L}_1^{(11)}\varphi_1^{(0)} = 0, \quad \mathscr{L}_1^{(12)}\varphi_2^{(0)} = 0, \quad \mathscr{L}_1^{(13)}\varphi_3^{(0)} = 0. \tag{13}$$

Аналогично из (12) имеем

$$\frac{d^3}{dt_0^3}\theta_2-(\theta_2)_x=\frac{d^2}{dt_0^2}g_2+\frac{d}{dt_0}g_{1,x}+g_3,$$

$$\frac{d^3}{dt_0^3}\theta_3-(\theta_3)_x=\frac{d^2}{dt_0^2}g_3+\frac{d}{dt_0}g_2+g_{1,x},$$

откуда вытекает

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_1^{(21)}\varphi_1^{(0)}=0,\quad \mathcal{L}_1^{(22)}\varphi_2^{(0)}=0,\quad \mathcal{L}_1^{(23)}\varphi_3^{(0)}=-u_1\varphi_3^{(0)},\\ \mathcal{L}_1^{(31)}\varphi_1^{(0)}=0,\quad \mathcal{L}_1^{(32)}\varphi_2^{(0)}=u_1\varphi_2^{(0)},\quad \mathcal{L}_1^{(33)}\varphi_3^{(0)}=0.\end{gathered}\tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) получаем

$$\mathcal{L}_1=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&-u_1\\0&u_1&0\end{Vmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{L}_2$ определяется из уравнения

$$\frac{d}{dt_0}(\mathcal{L}_2\varphi^{(0)})-K_0'\cdot(\mathcal{L}_2\varphi^{(0)})=\mathcal{L}_1K'^{*}\cdot\varphi^{(0)}+K_1'\cdot\mathcal{L}_1\varphi^{(0)}-(\mathcal{L}_1'\cdot K^{(2)})\varphi^{(0)},\tag{15}$$

где $K^{(2)}=(0,u_1v_1,0)^{\tau}$.

Вычисляя правую часть уравнения (15), находим $\mathcal{L}_2\equiv 0$. Полагая $\mathcal{L}_3\equiv\mathcal{L}_4\equiv\ldots\equiv 0$, получаем оператор $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L}=\begin{Vmatrix}0&0&-1\\0&\partial&-u\\1&u&0\end{Vmatrix}.\tag{16}$$

В силу тождественного выполнения условия (8) имплектический оператор $\mathcal{L}$ является нетеровым.

Аналогичным образом находим второй имплектический оператор

$$\mathcal{M}=\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}0&3\partial-v&-u\\3\partial+v&2(\partial u+u\partial)&p-u^2\\u&u^2-p&-3\partial\end{Vmatrix},\tag{17}$$

причем оператор

$$\mathcal{M}_0=\begin{Vmatrix}0&\partial&0\\\partial&0&0\\0&0&-\partial\end{Vmatrix}$$

удовлетворяет первому из уравнений системы (10). Если в качестве решения указанного уравнения рассмотреть оператор

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0=9\begin{Vmatrix}\partial&0&0\\0&0&-\partial^2\\0&\partial^2&0\end{Vmatrix},$$

то после ряда выкладок получим еще один из возможных имплектических операторов

$$\widetilde{\mathcal{M}}=\widetilde{\mathcal{M}}_0+\begin{Vmatrix}0&6\partial u&3p-u^2\\6u\partial&(\partial u^2+u^2\partial)+4u\partial u-3(\partial p+p\partial)&3up-u^3-3v\partial\\u^2-3p&u^3-3up-3\partial v&-3(u\partial+\partial u)\end{Vmatrix}+$$

$$+\begin{Vmatrix} -v\partial^{-1}v & v\partial^{-1}u\partial - v\partial^{-1}uv & -v\partial^{-1}p \\ -uv\partial^{-1}v - \partial u\partial^{-1}v & \partial u\partial^{-1}u\partial - \partial u\partial^{-1}uv + \\ & + uv\partial^{-1}u\partial - uv\partial^{-1}uv & -\partial u\partial^{-1}p - uv\partial^{-1}p \\ -p\partial^{-1}v & p\partial^{-1}u\partial - p\partial^{-1}uv & -p\partial^{-1}p \end{Vmatrix}, \quad (18)$$

который может быть представлен с помощью формулы $\tilde{\mathcal{M}} = 9\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, где оператор $\mathcal{M}$ задан выражением (17), а оператор

$$\mathcal{L}^{-1} = \begin{Vmatrix} u\partial^{-1}u & -u\partial^{-1} & 1 \\ -\partial^{-1}u & \partial^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

является обратным к имплектическому оператору $\mathcal{L}$, записанному в виде (16).

Отметим, что в рамках градиентно-голономного алгоритма [2], используя явный вид операторов (16), (17), (18), для динамической системы (2) можно получить два представления типа Лакса, которые будут калибровочно-эквивалентными.

Представим наследственно рекурсионный оператор Λ в виде $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, причем операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ для $j = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют равенствам

$$\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,\gamma_{j+2} = \mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,\gamma_j. \quad (19)$$

В силу согласованности ($\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$)-пары (16), (17) все операторы $\mathcal{M} = \mathcal{L}\Lambda^n$, $n \in Z$, являются имплектическими и нетеровыми операторами для динамической системы (2), причем рекурсионный оператор Λ удовлетворяет уравнению Лакса $\Lambda'\cdot K = [\Lambda, K'^*]$, а также условию согласованности и представим в следующем виде:

$$\Lambda = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -2u - u\partial^{-1}v & u\partial^{-1}u\partial - u\partial^{-1}uv - u^2 - p & -u\partial^{-1}p - 3\partial \\ 3 + \partial^{-1}v & -\partial^{-1}u\partial + \partial^{-1}uv + 2u & \partial^{-1}p \\ 0 & -3\partial + v & u \end{Vmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, динамическая система (2) обладает бесконечной иерархией функционально независимых инволютивных относительно скобок Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{L}}$, $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{M}}$ законов сохранения $\gamma_{2j+1} \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, где $\mathrm{grad}\,\gamma_{2j+1} = \Lambda^j\,\mathrm{grad}\,\gamma_1$, причем

$$\{H, \gamma_j\}_{\mathcal{L}} = \{\tilde{H}, \gamma_j\}_{\mathcal{M}} = 0,$$
$$H = 9\gamma_3 = \partial_{(l)}^{-1}\left(-up + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}u^3\right), \qquad \tilde{H} = 3\gamma_1 = \partial_{(l)}^{-1}\left(p - \frac{u^2}{2}\right). \quad (21)$$

Утверждение 1. *Динамическая система* (2) *бигамильтонова, т. е. представима в виде*

$$w_t = -\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,H = -\mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,\tilde{H},$$

где H, $\tilde{H} \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ — *функционалы Гамильтона* (21) *на многообразии* $M \simeq C_l^\infty(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^3)$; $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ — *пара имплектических операторов вида* (16), (15) *соответственно, факторизующая оператор* Λ *вида* (20).

3. Представление типа Лакса. Покажем, что динамическая система (2) в действительности обладает стандартным представлением типа Лакса, позволяющим проинтегрировать ее методом обратной задачи [1] в явном виде.

Если $L = L[u, p, v; \lambda]$ — L-оператор в представлении Лакса для (2), $S = S(x_0; \lambda)$, $x_0 \in R^1$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$,— его матрица монодромии, то для градиента $\varphi(\lambda) = \operatorname{grad} S(x_0; \lambda)$ справедливо соотношение [3] вида

$$\lambda^q \mathscr{L}^{(n)} \varphi(\lambda) = \mathscr{L}^{(n+1)} \varphi(\lambda), \tag{22}$$

где $q = 2$; λ^2 — собственное значение рекурсионного оператора (20) $\Lambda : T^*(M) \to T^*(M)$. Матрица монодромии $S(x; \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} S = [\mathcal{A}, S]. \tag{23}$$

Здесь мы представили L-оператор Лакса в следующем $(m \times m)$-матричном виде, $m \in Z_+$:

$$L = 1 \frac{d}{dx} - \mathcal{A}[u, p, v, \lambda], \quad \operatorname{tr} \mathcal{A}[u, p, v; \lambda] = 0, \tag{24}$$

где $\mathcal{A}[u, p, v; \lambda]$ — локальный матричнозначный гладкий по Фреше функционал на многообразии M, зависящий от «спектрального параметра» $\lambda \in C^1$. Порядок $m \in Z_+$ матрицы $\mathcal{A}[u, p, v; \lambda]$ в (24) определяется в соответствии с формулой $m^2 - 1 = \nu + 3$, где $\nu + 3$ — минимальный порядок матричного линейного дифференциального уравнения первого порядка для вектора $\tilde{\varphi}(\lambda) \in T^*(M) \times C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^\nu)$, которое эквивалентно уравнению (22). Реализация этих свойств в рамках градиентного алгоритма [4] позволяет построить матрицу $\mathcal{A}[u, p, v; \lambda]$ в явном виде и тем самым получить L-оператор в продставлении Лакса для (2). Вычисляя из соотношения (24) функцию $\varphi(\lambda) \in T^*(M)$, из (22), (23) находим следующие уравнения:

$$\begin{gathered}
-\lambda^2 \mathcal{A}_v = [\mathcal{A}_p, \mathcal{A}] + \frac{d}{dx} \mathcal{A}_p - \frac{1}{3} v \mathcal{A}_p - \frac{1}{3} u \mathcal{A}_v, \\
\lambda^2 \left([\mathcal{A}_p, \mathcal{A}] + \frac{d}{dx} \mathcal{A}_p - u \mathcal{A}_v \right) = [\mathcal{A}_u, \mathcal{A}] + \frac{d}{dx} \mathcal{A}_u + \frac{1}{3} v \mathcal{A}_u + \frac{2}{3} u_x \mathcal{A}_p + \\
+ \frac{4}{3} u [\mathcal{A}_p, \mathcal{A}] + \frac{4}{3} u \frac{d}{dx} \mathcal{A}_p + \frac{1}{3} p \mathcal{A}_v - \frac{1}{3} u^2 \mathcal{A}_v, \qquad (25) \\
\lambda^2 (\mathcal{A}_u + u \mathcal{A}_p) = \frac{1}{3} v \mathcal{A}_u + \frac{1}{3} u^2 \mathcal{A}_p - \frac{1}{3} p \mathcal{A}_p - [\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] - \frac{d}{dx} \mathcal{A}_v.
\end{gathered}$$

При выводе уравнений (25) мы учли, что в силу (16), (17) справедливо соотношение $\mathcal{A}[u, p, v; \lambda] = \mathcal{A}(u, p, v; \lambda)$, а также равенство [4]

$$\lambda^2 \mathscr{L} \operatorname{tr}(S \vec{a}[\mathcal{A}]) = \mathcal{M} \operatorname{tr}(S \vec{a}[\mathcal{A}]),$$

где $\vec{a}[\mathcal{A}] = (\mathcal{A}_u, \mathcal{A}_p, \mathcal{A}_v)^\tau$.

Согласно соотношению (19) для порядка матрицы $\mathcal{A}[u, p, v; \lambda]$ в (24) справедливо равенство $m^2 - 1 = 3$, т. е. $m = 2$. Представим искомую матрицу $\mathcal{A}(u, p, v; \lambda)$ следующим образом:

$$\mathcal{A}(u, p, v; \lambda) = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a \end{Vmatrix} = aL_0 + bL_+ + cL_-,$$

где L_0, L_+, $L_- \in \mathrm{sl}(2; \mathbb{R})$ и имеет вид

$$L_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad L_+ = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad L_- = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Так как (24) справедливо при всех u, p, v, то, следовательно, $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}_v = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}_p = 0$ и соотношения (25) примут вид

$$-\lambda^2\mathcal{A}_v=[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}]-\frac{1}{3}v\mathcal{A}_p-\frac{1}{3}u\mathcal{A}_v,$$

$$\lambda^2([\mathcal{A}_p,\mathcal{A}]-u\mathcal{A}_v)=[\mathcal{A}_u,\mathcal{A}]+\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_u+\frac{1}{3}v\mathcal{A}_u+$$

$$+\frac{2}{3}u_x\mathcal{A}_p+\frac{4}{3}u[\mathcal{A}_p,\mathcal{A}]+\frac{1}{3}p\mathcal{A}_v-\frac{1}{3}u^2\mathcal{A}_v, \tag{26}$$

$$\lambda^2(\mathcal{A}_u+u\mathcal{A}_p)=\frac{1}{3}u\mathcal{A}_u+\frac{1}{3}u^2\mathcal{A}_p-\frac{1}{3}p\mathcal{A}_p-[\mathcal{A}_v,\mathcal{A}].$$

Для решения соотношений (26) предположим, что матрица $\mathcal{A}(u,p,v;\lambda)$ принадлежит некоторой подалгебре Ли $\mathcal{A}$ алгебры $\mathrm{Sl}(2;\mathbb{R})$. Разлагая матрицу $\mathcal{A}(u,p,v;\lambda)$ по базису L_+, L_-, L_0, где $[L_+\,L_-]=L_0$, $[L_0,L_\pm]=\pm 2L_0$, имеем

$$\mathcal{A}(u,p,v;\lambda)=a(u,p,v;\lambda)L_0+b(u,p,v;\lambda)L_++c(u,p,v;\lambda)L_-. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), получаем соотношения для неизвестных элементов искомой матрицы $\mathcal{A}(u,p,v;\lambda)$, откуда находим

$$a=-\frac{\lambda^3}{2}+\frac{\lambda u}{2}-\frac{v}{6},\quad b=\frac{1}{6}\left(-\lambda^2u-p+\lambda v+\frac{1}{3}u^2\right),\quad c=\frac{1}{3}u-\lambda^2.$$

Таким образом, L-оператор Лакса записывается в следующем виде:

$$L=1\frac{d}{dx}-\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-3\lambda^3+\lambda u-v & -\lambda^2u-p+\lambda v+\frac{1}{3}u^2\\ 2u-6\lambda^2 & 3\lambda^3-\lambda u+v\end{matrix}\right\|. \tag{28}$$

С L-оператором Лакса (28) ассоциирована бесконечная иерархия инволютных вполне интегрируемых гамильтоновых потоков $\alpha_j\in\mathrm{T}(M)$, $j\in\mathbb{Z}$, где

$$\alpha_j=\Lambda^{*j}\alpha_0,\quad \alpha_0\equiv(u_x,\ p_x,\ v_x)^\tau, \tag{29}$$

которые именуются высшими инверсными уравнениями Кортевега — де Фриза. В частности, из (29) имеем

$$\alpha_{-1}[w]=\alpha_{-1}[(u,p,v)^\tau]=K[u,p,v]=(v,u_x+uv,p)^\tau,$$

$$\alpha_1[w]=\alpha_1[(u,p,v)^\tau]=\frac{1}{3}\Big(3p_x-2uu_x-vp+\frac{1}{2}u^2v,$$

$$\frac{1}{2}u^2u_x-2pu_x+up_x+3v_{xx}+\frac{1}{2}vu^3-upv+vv_x, \tag{30}$$

$$3u_{xx}+uv_x-p^2+\frac{1}{2}u^2p\Big)^\tau.$$

Следует отметить, что нелинейная «инверсная» динамическая система $w_t=(u,\ p,\ v)_t^\tau=\alpha_1[(u,\ p,\ v)^\tau]$ является новым вполне интегрируемым гамильтоновым потоком, который представляет интерес для приложений в гидродинамике, физике плазмы и других областях.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2. *Динамические системы* $w_t=\alpha_{-1}[w]=K[w]$ *и* $w_t=\alpha_1[w]$, *где* $\alpha_{-1}[w]$ *и* $\alpha_1[w]$ *заданы формулами в* (30), *обладают* L-*оператором Лакса вида* (28) *и являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю бигамильтоновыми потоками с имплектической* $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ *парой вида* (16), (17).

В заключение отметим, что полученные нами симплектические структуры являются структурами типа Дубровина — Новикова [10, 11].

1. *Теория* солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 342 с.
2. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функцион. анализ. и его прил.— 1971.— 5, № 4.— С. 18—27.
3. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
4. *Прикарпатский А. К.* Градиентный алгоритм построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем // Докл. АН СССР.— 1986.— 287, № 4.— С. 827—832.
5. *Боголюбов Н. Н.* (*мл.*), *Прикарпатский А. К.* Полная интегрируемость нелинейных систем Ито и Бенни — Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса // Теорет. и мат. физика.— 1986.— 67, № 3.— С. 410—425.
6. *Lax P. D.* Periodic solutions of the Korteweg-de Vries equation // Commun. Pure Appl. Math.— 1975.— 28, N 1.— P. 141—188.
7. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equations // J. Math. Phys.— 1978.— 19, N 3.— P. 1156—1162.
8. *Fuchsteiner B.*, *Fokas A. S.* Symplectic structures, their Backlund Transformations and hereditary summetries // Physica D.— 1981.— 4, N 1.— P. 47—66.
9. *Самойленко В. Г.*, *Притула Н. Н.*, *Суяров У. С.* Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега — де Фриза.— Киев, 1989.— 27 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т launch математики; 89.71).
10. *Дубровин Б. А.*, *Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР.— 1984.— 279, № 2.— С. 294—297.
11. *Мохов О. И.* О гамильтоновой структуре эволюции по пространственной переменной x для уравнения Кортевега — де Фриза // Успехи мат. наук.— 1990.— 45, № 1.— С. 181—182.

Получено 20.04.90