УДК 517.988.8

Н. Ю. Бакаев

Об устойчивости метода Рунге—Кутты для абстрактных линейных уравнений

Построены оценки устойчивости разностных схем, аппроксимирующих с высоким порядком абстрактные линейные дифференциальные уравнения с постоянным оператором и полученных по методу Рунге — Кутты.

Побудовані оцінки стійкості різницевих схем, що апроксимують з високим порядком абстрактні лінійні диференціальні рівняння з постійним оператором і одержані методом Рунге — Кути.

1. В настоящей работе изучаются вопросы устойчивости двухслойных разностных схем, аппроксимирующих с высоким порядком по явно выделенной переменной задачу Коши для абстрактного линейного параболического уравнения с постоянным (т. е. не зависящим от явно выделенной переменной) оператором в банаховом пространстве. Исследование устойчивости схем высокого порядка аппроксимации для абстрактных линейных параболических уравнений с постоянным оператором ранее проводилось для некоторых конкретных схем в работах [1—5] и для схем из так называемого класса Паде в работе [6]. Методика исследования устойчивости, принятая в данной работе, опирается на общий подход к решению вопросов устойчивости разностных схем, предложенный в работе [7], и позволяет получить оценки устойчивости в довольно широком классе схем. Этот класс схем строится на основе известного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений метода Рунге—Кутты [8, 9]. Заметим, что приведенные ниже оценки легко переносятся на случай схем, построенных в [6] (хотя те и выпадают из изучаемого в данной работе класса при отличной от нуля неоднородности в исходном уравнении), и являются более сильными, чем соответствующие оценки из [6].

2. В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения

$$du/dt + Au = f(t), \quad 0 < t \leqslant T; \quad u(t=0) = u_0, \tag{1}$$

где $u = u(t)$ — искомая функция со значениями в E (решение задачи), A — некоторый линейный неограниченный оператор, действующий в E, $f(t)$ — известная функция со значениями в E, $u_0 \in E$ — начальное данное.

Введем аппроксимационное семейство банаховых пространств E_h (параметризованных при помощи скалярной или векторной величины h) и определим линейный оператор A_h, действующий в E_h и аппроксимирующий в некотором смысле оператор A в семействе пространств E_h. Для простоты будем считать, что оператор A_h ограничен в E_h при любом фиксированном h (так обычно и бывает на практике). Введем также функцию $F(t)$ со значениями из E_h, аппроксимирующую в семействе пространств E_h функцию $f(t)$ при каждом $t \in [0, T]$.

Поставим в соответствие задаче Коши (1) следующую аппроксимирующую ее задачу Коши в семействе пространств E_h:

$$dy/dt + A_h y = F(t), \quad 0 < t \leqslant T; \quad y(t=0) = y_0, \tag{2}$$

где $y = y(t) \in E_h$ — решение задачи, $y_0 \in E_h$ — аппроксимация начального данного $u_0 \in E$ в семействе пространств E_h.

Задачу (2), в свою очередь, аппроксимируем разностной схемой вида

$$\begin{gathered} y(t_{k+1}) = y(t_k) - \tau \sum_{j=1}^{\nu} b_j [A_h Y_j - F(t_k + c_j \tau)], \quad k = 0, 1, \ldots, T/\tau - 1, \\ y(t_0) = y_0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $Y_j \in E_h$ определяются из следующей системы уравнений:

$$Y_j = y(t_k) - \tau \sum_{l=1}^{\nu} a_{jl} [A_h Y_l - F(t_k + c_l \tau)], \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{4}$$

причем b_l, c_l, a_{jl}, j, $l = 1, 2, \ldots, \nu$, — коэффициенты, задающие схему. Легко видеть, что конструкция схемы (3), (4) основана на методе Рунге—Кутты [8, 9]. Основной целью данной работы является получение оценок устойчивости разностной схемы (3), (4) при некоторых вводимых ниже предположениях.

Если разностная схема (3), (4), рассматриваемая как система уравнений для определения $y(t_{k+1})$, корректно разрешима относительно $y(t_{k+1})$, то ее можно представить в каноническом виде

$$y(t_{k+1}) = [I - \tau\hat{A}]\, y(t_k) + \tau \sum_{j=1}^{\nu} \Omega_j F(t_k + c_j\tau), \quad k = 0, 1, \ldots, T/\tau - 1,$$
$$y(t_0) = y_0, \tag{5}$$

где $\hat{A}$ и Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, — некоторые (зависящие от τ и h) линейные ограниченные (при любых фиксированных $\tau \in (0, \tau_0]$ и h) операторы.

Для простейшей склярной задачи

$$dv/dt + \lambda v = \varphi(t), \quad 0 < t \leqslant T; \quad v(t = 0) = v_0 \tag{6}$$

(где $v = v(t)$ — комплекснозначная функция, являющаяся решением задачи, λ — комплексный параметр, v_0 и $\varphi(t)$ — исходные данные задачи со значениями в поле комплексных чисел) разностная схема (5) переходит в следующую:

$$v(t_{k+1}) = [1 - \alpha(\lambda\tau)\, v(t_k) + \tau \sum_{j=1}^{\nu} \omega_j(\lambda\tau)\, \varphi(t_k + c_j\tau), \quad k = 0, 1, \ldots, T/\tau - 1,$$
$$v(t = 0) = v_0. \tag{7}$$

Определение 1. *Введенные соотношениями* (7) *функции* $\alpha(z)$ *и* $\omega_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, *будем называть соответственно символом генератора схемы и корректирующими символами.*

Определение 2. *Пусть связное замкнутое множество* Λ *точек на комплексной плоскости является объединением круга*

$$\{z; |z - 1| \leqslant \gamma_0\}, \quad \gamma_0 = \text{const} < 1$$

и конечного множества секторов вида

$$\{z; |\arg(z - \zeta_l) - \arg(1 - \zeta_l)| \leqslant \beta_0, |z - \zeta_l| \leqslant \delta_0\}, \quad l = 1, 2, \ldots, M,$$
$$\beta_0 = \text{const} < \pi/2, \quad \delta_0 = \text{const} < \min[2\cos\beta_0; 1],$$

где ζ_l, $l = 1, 2, \ldots, M$, — *конечный набор точек на окружности* $\{z; |z - 1| = 1\}$, *причем* $\zeta_1 = 0$. *В случае* $M = 1$ *будем говорить, что* Λ — *множество с конфигурацией типа* (Λ_2), *а в случае* $M = 2$ — *множество с конфигурацией типа* (Λ_1^*).

Определение 3. *Будем говорить, что разностная схема* (3), (4) *принадлежит типу* $RK(\varphi)$ *для некоторого значения параметра* φ $(0 < \varphi < \pi/2)$, *если*

1) *собственные числа матрицы* $((a_{jl}))$ *локализованы в секторе* $\{z; |\arg z| < \pi - \varphi\} \cup \{0\}$;

2) *выполняется условие* $\sum_{j=1}^{\nu} b_j = 1$;

3) *для любого фиксированного числа* $\delta_1 > 0$ *существуют числа* $\tau_0 > 0$, $\delta_2 > 0$, *а также фиксированное множество* S_0 *с конфигурацией типа* (Λ_2) *такие, что отображение* $w = \alpha(\tau z)$ ($\alpha(z)$ — *символ генератора схемы*) *при* $0 < \tau \leqslant \tau_0$ *переводит множество*

$$S = \{z; |z| \leqslant \delta_1\} \cup \{z; |\arg z| \leqslant \varphi\}$$

в множество U_0, *относительно которого предполагается, что оно может выходить за пределы множества* $\operatorname{Int} S_0$ *лишь в пределах круга* $\{w; |w| \leqslant \delta_2\tau\}$.

Определение 4. *Будем говорить, что разностная схема* (3), (4) *принадлежит типу* $RK^*(\varphi)$, $0 < \varphi < \pi/2$, *если*

1) *выполняются пп.* 1 *и* 2 *определения* 3;

2) *имеет место соотношение* $|1 - \bar{\zeta}| = 1$, *где* $\bar{\zeta} = \lim_{|z| \to \infty} \alpha(z)$;

3) *для любого фиксированного* $\delta_1 > 0$ *существуют* $\tau_0 > 0$, $\delta_2 > 0$, *а также фиксированное множество* S_1 *с конфигурацией типа* (Λ_1^*), *для ко-*

торого $\zeta_2 = \bar{\zeta}$ ($\bar{\zeta}$ *определено выше*), *такие, что отображение* $w = \alpha(\tau z)$ *при* $0 < \tau \leqslant \tau_0$ *переводит множество*

$$S = \{z; |z| \leqslant \delta_1\} \cup \{z; |\arg z| \leqslant \varphi\}$$

в множество U_1, *относительно которого предполагается, что оно может выходить за пределы множества* $\operatorname{Int} S_1$ *лишь в пределах множества* $\bigcup_{l=1}^{2} \{w; |w - \beta_l| \leqslant \delta_2 \tau\}$.

Определение 5. *Пусть заданы семейство банаховых пространств* E_h *и для каждого* h — *линейный ограниченный оператор* $B_h : E_h \to E_h$. *Будем называть оператор* B_h *равномерно (по* h*) сильно полупозитивным с углом* φ, $0 \leqslant \varphi < \pi/2$, *если*

$$\| R(\lambda, B_h) \|_{E_h} \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|} \quad \forall \lambda : |\arg \lambda| \geqslant \varphi, |\lambda| \geqslant \bar{\delta},$$

где константы C_0 *и* $\bar{\delta}$ *не зависят от* h.

Определение 6. *Для произвольной рациональной функции* $\eta(z)$ *определим целый параметр* $\deg[\eta(z)]$ *по формуле* $\deg[\eta(z)] = m - n$, *где пара* (m, n) *задает степень функции* $\eta(z)$ [10].

3. Перейдем к изложению результатов работы. Вначале сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть для некоторого значения* φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, *разностная схема* (3), (4) *является схемой типа* $RK(\varphi_0)$, *а оператор* A_h *является равномерно по* h *полупозитивным с углом* φ_0. *Пусть также выполнено условие*

$$\deg\left[\sum_{r=1}^{\nu} b_r g_{rj}(z)\right] \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{8}$$

где $g_{rj}(z)$ — *элементы матрицы, обратной к матрице* $(([\delta_{rj} + z a_{rj}]))$, δ_{jl} — *символ Кронекера. Тогда операторы* $\alpha(\tau A_h)$ *и* $\omega_j(\tau A_h)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, *существуют и равномерно по* τ *и* h *ограничены в* E_h *при* $\tau \in (0, \tau_0)$ *для достаточно малого* $\tau_0 > 0$ *(здесь и далее функции от оператора* (τA_h) *понимаются в смысле функционального исчисления замкнутых операторов* [11]). *Кроме того, имеет место оценка*

$$\| R(\lambda, \alpha(\tau A_h)) \|_{E_h} \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|},$$

$$\forall \lambda : \lambda \bar{\in} \operatorname{Int} \bar{S}_0, \ |\lambda| \geqslant \delta_0 \tau, \ \forall \tau \in (0, \tau_0], \ \forall h$$

с некоторыми не зависящими от λ, τ, h *неотрицательными константами* C_1, δ_0, *где* $\bar{S}_0$ — *некоторое фиксированное множество с конфигурацией типа* (Λ_2).

Лемма 2. *Пусть для некоторого значения* φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, *разностная схема* (3), (4) *является схемой типа* $RK^*(\varphi_0)$, *а оператор* A_h *является равномерно по* h *полупозитивным с углом* φ_0. *Пусть также выполнено условие* (8). *Тогда операторы* $\alpha(\tau A_h)$ *и* $\omega_j(\tau A_h)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, *существуют и равномерно по* τ *и* h *ограничены в* E_h *при* $\tau \in (0, \tau_0]$ *для достаточно малого* $\tau_0 > 0$. *Кроме того, имеет место оценка*

$$\| R(\lambda, \alpha(\tau \alpha_h)) \|_{E_h} \leqslant C_2 [|\lambda|^{-1} + |\lambda - \bar{\zeta}|^{-1}],$$

$$\forall \lambda : \lambda \bar{\in} \operatorname{Int} \bar{S}_1, \ |\lambda| \geqslant \bar{\delta}_0 \tau, \ |\lambda - \bar{\zeta}| \geqslant \bar{\delta}_0 \tau, \ \forall \tau \in (0, \tau_0], \ \forall h$$

с некоторыми не зависящими от λ, τ, h *неотрицательными константами* C_2, $\bar{\delta}_0$, *где* $\bar{S_1}$ — *некоторое фиксированное множество с конфигурацией типа* (Λ_1^*).

Леммы 1 и 2 доказываются на основе интегрального представления функций от оператора (τA_h) через резольвенту $R(z, \tau A_h)$ оператора

(τA_h) с учетом того, что функции $\alpha(z)$ и $\omega_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, являются рациональными.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены предположения леммы* 1, *то схема* (3), (4) *представима в виде* (5) *при* $\hat{A} = \tau^{-1}\alpha(\tau A_h)$, $\Omega_j = \omega_j(\tau A_h)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, *и для нее справедлива оценка устойчивости*

$$\| [\hat{A} + \bar{\mu} I]^{\xi} y(t_k) \|_{E_h} \leqslant \frac{M_1}{[(k+1)\tau]^{\xi}} \| y_0 \|_{E_h} +$$
$$+ M_2 \tau \sum_{l=1}^{k} [(k-l+1)\tau]^{-\xi} \max_{j=1,2,\ldots,\nu} \| F(t_{l-1} + c_j \tau) \|_{E_h},$$
$$k = 1, 2, \ldots, T/\tau, \quad \forall \tau \in (0, \tau_0], \quad \forall h, \quad \forall \xi \in [0, 1]$$

с некоторыми неотрицательными константами M_1, M_2, $\bar{\mu}$, *не зависящими от* t_k, τ, h, ξ.

Теорема 1 следует из результатов леммы 1 и работы [7].

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения леммы* 2 *и, кроме того, корректирующие символы* $\omega_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, *представимы в виде*

$$\omega_j(z) = [1 - \bar{\zeta}^{-1}\alpha(z)] H_j(z), \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{9}$$

где $H_j(z)$ — *рациональные функции, такие, что* $\deg[H_j(z)] \leqslant 0$, *и полюсы функций* $H_j(z)$ *расположены вне замкнутого сектора* $\{z; |\arg z| \leqslant \varphi_0\}$.

Тогда схема (3), (4) *представима в виде* (5) *при* $\hat{A} = \tau^{-1}\alpha(\tau A_h)$.

Если же в схему (3), (4) *ввести оператор сглаживания по начальным данным в виде* $y(t_0) = [I - \bar{\zeta}^{-1}\alpha(\tau A_h)] y_0$, *то для скорректированной таким образом схемы справедлива оценка устойчивости*

$$\| [\hat{A} + \bar{\mu} I]^{\xi} y(t_k) \|_{E_h} \leqslant \frac{\overline{M}_1}{[(k+1)\tau]^{\xi}} \| y_0 \|_{E_h} +$$
$$+ \overline{M}_2 \tau \sum_{l=1}^{k} [(k-l+1)\tau]^{-\xi} \max_{j=1,2,\ldots,\nu} \| F(t_{l-1} + c_j \tau) \|_{F_h},$$
$$k = 1, 2, \ldots, T/\tau, \quad \forall \tau \in (0, \tau_0], \quad \forall h, \quad \forall \xi \in [0, 1] \tag{10}$$

с некоторыми неотрицательными константами $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, $\bar{\mu}$, *независящими от* t_k, τ, h, ξ. *Если вместо условия* (9) *требовать более слабое условие* (8), *то справедливость оценки* (10) *удается установить лишь при* $\xi = 0$, *но зато без введения оператора сглаживания.*

Теорема 2 следует из результатов леммы 2 и работ [7, 12].

4. В качестве примера рассмотрим методы Рунге—Кутты оптимального порядка [8, 9], для которых коэффициенты a_{lj} и b_j, $l, j = 1, 2, \ldots, \nu$, определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_{lj} c_j^{k-1} = k^{-1} c_l^k, \quad k, l = 1, 2, \ldots, \nu,$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} b_j c_j^{k-1} = k^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu,$$

где $c_j = \sum_{l=1}^{\nu} a_{jl}$ являются нулями полинома Лежандра ν-й степени $P_\nu(2c - 1)$.

Для таких методов имеет место соотношение

$$\alpha(z) = 2 \sum_{k=0}^{\nu}{}' \frac{(2\nu - k)!}{k!(\nu - k)!} z^k \left[\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(2\nu - k)!}{k!(\nu - k)!} z^k \right]^{-1}, \tag{11}$$

где штрих у знака суммы показывает, что суммирование ведется только по нечетным k. При этом рациональная функция $[1-\alpha(z)]$ является аппроксимацией Паде экспоненциальной функции $\exp(-z)$ порядка (ν, ν) [13]. Из (11) нетрудно получить, что при четных ν соответствующая схема (3), (4) принадлежит типу $RK(\varphi_0)$, а при нечетных ν — типу $RK^*(\varphi_0)$ для любого фиксированного $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$. Отметим, что для нечетных ν выполняется равенство $\bar{\zeta}=2$. Поэтому в случае нечетных ν

$$[1-\bar{\zeta}^{-1}\alpha(z)] = \sum_{k=0}^{\nu}{}'' \frac{(2\nu-k)!}{k!\,(\nu-k)!} z^k \left[\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(2\nu-k)!}{k!\,(\nu-k)!} z^k\right]^{-1},$$

где двойной штрих у суммы показывает, что суммирование ведется только по четным k.

Таким образом, при четных ν применима теорема 1 данной работы, а при нечетных ν — теорема 2.

Аналогичным образом можно показать, например, что схемы Рунге—Кутты, для которых $[1-\alpha(z)]$ совпадает с аппроксимацией Паде функции $\exp(-z)$ порядка $(\nu, \nu-1)$, принадлежат типу $RK(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, и к ним применима теорема 1.

В работе [6] был рассмотрен класс схем (так называемый класс Паде), близкий к схемам Рунге—Кутты оптимального и почти оптимального порядка, разобранным выше, и отличающийся способом аппроксимации неоднородности в дифференциальном уравнении. В случае равной нулю неоднородности схемы класса Паде идентичны соответствующим схемам Рунге—Кутты, и полученные в настоящей работе оценки являются лучшими, чем те, что даны в работе [6]. Если неоднородность в дифференциальном уравнении отлична от нуля, то схемы класса Паде уже не совпадают с соответствующими схемами Рунге—Кутты по причине различного способа аппроксимации неоднородности. Однако применение теории устойчивости, развитой в [7, 12], позволяет получить для схем класса Паде и в случае отличной от нуля неоднородности оценки устойчивости типа тех, что обеспечены результатами теорем 1, 2, и которые лучше оценок, выведенных в [6].

1. *Соболевский П. Е.* Об устойчивости и сходимости схемы Кранка — Николсона // Вариационно-разностные методы в математической физике.— Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1973.— С. 146—151.
2. *Соболевский П. Е.* О разностной схеме Кранка—Николсон для параболических уравнений // Нелинейные колебания и теория управления.— Ижевск: Удмурт. ун-т, 1978.— С. 98—106.
3. *Алибеков Х. А., Соболевский П. Е.* Об устойчивости разностных схем для параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1977.— **232**, № 4.— С. 737—740.
4. *Алибеков Х. А., Соболевский П. Е.* Об устойчивости и сходимости разностных схем высокого порядка аппроксимации для параболических уравнений. I.— Воронеж, 1976.— 30 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2851-76 Деп.
5. *Алибеков Х. А., Соболевский П. Е.* Об устойчивости и сходимости разностных схем для параболических уравнений // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 6.— С. 627—634.
6. *Алибеков Х. А., Соболевский П. Е.* Об одном способе построения схем класса Паде и их исследовании в C-норме.— Воронеж, 1982.— 51 с.—Деп. в ВИНИТИ, № 4737-82 Деп.
7. *Бакаев Н. Ю.* Теория устойчивости разностных схем в произвольных нормах // Докл. АН СССР.— 1987.— **297**, № 2.— С. 275—279.
8. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1978.— 464 с.
9. *Современные* численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта.— М. : Мир, 1979.— 312 с.
10. *Долженко Е. П., Куликов Вик. С.* Рациональная функция // Мат. энциклопедия.— 1984.— **4**.— С. 917—919.
11. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций // М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М. : Наука, 1966.— 500 с.
12. *Бакаев Н. Ю.* Устойчивость разностных схем для параболических уравнений в произвольных нормах. Ч. 2 // ВАНТ. Сер. Методики и программы числ. решений задач мат. физики.— 1987.— Вып. 2.— С. 29—34.
13. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде.— М. : Мир, 1986.— 504 с.

Москва Получено 23.01.89