УДК 519.21

В. С. КОРОЛЮК, акад. АН Украины (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями

Для автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости при наличии функции Ляпунова, обеспечивающей устойчивость стационарно усредненной системы.

Для автономної динамічної системи зі швидкими марківськими переключеннями встановлюються достатні умови асимптотичної стійкості за наявністю функції Ляпунова, що забезпечує стійкість стаціонарно усередненої системи.

Впервые устойчивость исходной динамической системы, удовлетворяющей принципу усреднения, при условии устойчивости усредненной системы установлена Н. Н. Боголюбовым [1] (см. также [2]). Анализ устойчивости дифференциально-разностной системы со случайными возмущениями по усредненной системе имеется в работе [3].

В данной статье при исследовании устойчивости исходной стохастической системы используется мартингальный подход, развитый в работах [4, 5] при изучении систем со случайными возмущениями в условиях диффузионной аппроксимации.

1. Постановка задачи. Исходная автономная динамическая система с быстрыми марковскими переключениями задается системой эволюционных дифференциальных уравнений

$$dU^\varepsilon(t)/dt = C(U^\varepsilon(t),\ X^\varepsilon(t)),\ U^\varepsilon(0) = u_0, \tag{1}$$

в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$U^\varepsilon(t) := (u_k^\varepsilon(t);\quad k = \overline{1, d})$$

со скоростями, задаваемыми вектор-функцией $C(u, x) := (c_k(u, x);\ k = \overline{1, d})$, зависящей от параметра $x \in \mathbf{X}$.

Быстрые марковские переключения задаются однородным скачкообразным равномерно эргодическим марковским процессом $X^\varepsilon(t) := X(t/\varepsilon)$ в измеримом фазовом пространстве $(X, \mathfrak{X})$. Производящий оператор $\mathbf{Q}$ процесса $X(t)$ задается ядром $Q(x, A)$, $x \in \mathbf{X}$, $A \in \mathfrak{X}$, $q(x) := Q(x, \mathbf{X})$:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) := \int_{\mathbf{X}} Q(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]. \tag{2}$$

Стационарное распределение $\pi(dx)$ определяется соотношением

$$\int_A q(x)\pi(dx) = \int_{\mathbf{X}} \pi(dy) Q(y, A),\ A \in \mathfrak{X}. \tag{3}$$

Производящий оператор (2) эргодического марковского процесса порождает потенциальный ограниченный оператор R_0 [6]

$$\mathrm{R}_0\varphi(x) := \int_{\mathrm{X}} \mathrm{R}_0(x, dy)\,\varphi(y), \tag{4}$$

обладающий следующими свойствами:

$$\mathbf{Q}\mathrm{R}_0\varphi(x) = \mathrm{R}_0\mathbf{Q}\varphi(x) = \varphi(x) \tag{5}$$

для функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathrm{X}} \pi(dx)\,\varphi(x) = 0,$$

а также выполняется условие ортогональности

$$\int_{\mathrm{X}} \pi(dx)\,R_0\varphi(x) = 0. \tag{6}$$

Известно (см., например, [7, с. 120]), что соответствующая стационарно усредненная система задается детерминированным эволюционным уравнением

$$dU(t)/dt = C(U(t)),\ U(0) = u_0, \tag{7}$$

в котором скорость эволюции определяется соотношением

$$C(u) := \int_{\mathrm{X}} \pi(dx)\,C(u, x). \tag{8}$$

Наша задача — получить достаточные условия, при которых существование функции Ляпунова $V(u)$ для усредненной системы (7) обеспечивают асимптотическую устойчивость решений исходной системы (1) при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

В анонсированной работе автора [8] приведенные условия весьма далеки от естественных.

2. Формулировка результата. Для сокращения записи векторных и матричных операций введем обозначения: для скалярного произведения вектор-строки $c^* := (c_k;\ k = \overline{1, d})$ на вектор-столбец $v := (v_k;\ k = \overline{1, d})$:

$$c^*v := \sum_{k=1}^{d} c_k v_k;$$

для умножения вектор-строки c^* на матрицу $W := [w_{kr};\ k, r = \overline{1, d}]$ слева

$$c^*W := \left(\sum_{k=1}^{d} c_k w_{kr};\ r = \overline{1, d}\right).$$

В частности, $c^*Wv := \sum_{k,r=1}^{d} c_k w_{kr} v_r$ — скалярная величина, а $cv^* := [c_k v_r;\ k, r = \overline{1, d}]$ — матрица.

Кроме того, введем «скалярное» произведение матриц

$$C^0 \cdot W := \sum_{k,r=1}^{d} c^0_{kr} w_{kr}.$$

Для формулировки результата нам понадобятся матрица скоростей

$$C^0(u, x) := C(u, x)\,\mathrm{R}_0 C^*(u, x) \tag{9}$$

и вектор ускорений

$$C^1(u, x) := C^*(u, x)\, R_0 C'(u, x); \tag{10}$$

где

$$C'(u, x) := [\partial c_k(u, x)/\partial u_r;\ k, r = \overline{1, d}].$$

Теорема. *Пусть существует функция Ляпунова $V(u)$ для усредненной системы (7), производная которой в силу системы (7)*

$$\dot{V}(u) := \sum_{k=1}^{d} c_k(u)\, \partial V(u)\, \partial u_k =: C^*(u)\, V'(u) \tag{11}$$

удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(u) \leqslant -cV(u), \quad c > 0. \tag{12}$$

Предполагается также, что $V(u)$ дважды непрерывно дифференцируема, а скорости $C(u, x)$, $x \in \mathbf{X}$, непрерывно дифференцируемы по u с равномерно (по $x \in X$) ограниченными производными.

Кроме того, поэлементные мажоранты матрицы скоростей

$$C^0(u) := \max_x |C^0(u, x)| \tag{13}$$

и вектора ускорений

$$C^1(u) := \max_x |C^1(u, x)| \tag{14}$$

удовлетворяют неравенству

$$|C^0(u) \cdot |V''(u)| + C^{1*}(u)\, |V'(u)|| \leqslant cV(u). \tag{15}$$

Тогда для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ решение исходной системы (1) асимптотически устойчиво

$$\mathcal{P}\{\lim_{t\to\infty} U^\varepsilon(t) = 0\} = 1. \tag{16}$$

В частности, для линейной системы

$$dU^\varepsilon(t)/dt = C(X(t/\varepsilon))\, U^\varepsilon(t), \tag{17}$$

которая задается матрицей скоростей $C(x) := [C_{kr}(x);\ k, r = \overline{1, d}]$, стационарно усредненная система

$$dU(t)/dt = CU(t) \tag{18}$$

определяется матрицей $C := [c_{kr};\ k, r = \overline{1, d}]$:

$$c_{kr} := \int_{\mathbf{X}} \pi(dx)\, C_{kr}(x).$$

Функция Ляпунова $V(u)$ для линейной системы (18) может быть задана в виде квадратичной формы

$$V(u) = u^* V u := \sum_{k,r=1}^{d} v_{kr} u_k u_r.$$

Следствие. *При выполнении основного условия устойчивости усредненной системы (18) в виде*

$$u^* C V u \leqslant -c u^* V u, \quad c > 0, \tag{19}$$

при дополнительном условии конечности мажоранты матрицы скоростей

$$\max_x |C_{kr}(x)| \leqslant c_{kr} < +\infty \tag{20}$$

решения исходной системы (17) при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ асимптотически устойчивы для достаточно малых $\varepsilon_0 > 0$.

Справедливость следствия устанавливается следующим образом. В соответствии с формулами (9) и (10) для линейной системы (17) матрица скоростей (9) определяется соотношениями

$$C^0(u, x) = \left[\sum_{k', r'=1}^{d} c_{kr}^{k'r'}(x) u_{k'} u_{r'}; \quad k, r = \overline{1, d} \right], \tag{21}$$

$$c_{kr}^{k'r'}(x) := C_{kk'}(x) \mathrm{R}_0 C_{rr'}(x); \tag{22}$$

вектор ускорений (10) определяется соотношениями

$$C^1(u, x) = \left(\sum_{r=1}^{d} c_{kr}^1(x) u_r; \ k = \overline{1, d} \right), \tag{23}$$

$$C_{kr}^1(x) := \sum_{k'=1}^{d} C_{kk'}(x) \mathrm{R}_0 C_{rk'}(x). \tag{24}$$

Мажоранты матрицы скоростей имеют вид

$$\max_x |C^0(u, x)| \leqslant C^0(V),$$

$$C^0(V) := \left[\sum_{k', r'=1}^{d} c_{kr}^{k'r'} v_{k'r'}; \ k, r = \overline{1, d} \right],$$

$$c_{kr}^{k'r'} := \max_x | c_{kr}^{k'r'}(x) |,$$

а мажоранты вектора ускорений —

$$\max_x |C^1(u, x)| \leqslant c^1 u,$$

$$C^1 := [c_{kr}^1 := \max_x | c'_{kr}(x) |; \quad k, r = \overline{1, d}].$$

Дополнительное условие (15) для линейной системы (17) имеет вид.

$$| u^* C^0(V) u + u^* C^1 V u | \leqslant c_1 u^* V u. \tag{25}$$

Это условие выполняется автоматически для ограниченных скоростей (20).

3. Доказательство теоремы. Прежде всего введем необходимые обозначения. Производящий оператор марковского процесса $(U^\varepsilon(t), \ X^\varepsilon(t); \ t \geqslant 0)$ определяется соотношением

$$\mathrm{L}^\varepsilon \varphi(u, x) := \varepsilon^{-1} \mathbf{Q} \varphi(u, x) + C^*(u, x) \varphi'(u, x). \tag{26}$$

Нам понадобится также производящий оператор процесса $(U^\varepsilon(t), X^\varepsilon(t), t)$:

$$\mathrm{L}_t^\varepsilon := \mathrm{L}^\varepsilon + \partial/\partial x. \tag{27}$$

Зададим функцию $V_1(u, x)$ решением уравнения

$$\mathbf{Q} V_1(u, x) = (C^*(u) - C^*(u, x)) V'(u). \tag{28}$$

Корректность задания функции V_1 следует из того, что выполнено условие разрешимости (8) уравнения (28) [6].

При этом решении уравнения (28) можно представить в виде [6]

$$V_1(u, x) = - \mathrm{R}_0 C^*(u, x) V'(u). \tag{29}$$

Теперь в соответствии с мартингальным подходом, предложенным в работах [4, 5], введем мартингал $M^\varepsilon(t)$ относительно потока σ-алгебр

$(\mathcal{F}_t^\varepsilon,\ t \geqslant 0)$, порожденного траекториями марковского процесса $(U^\varepsilon(t),$ $X^\varepsilon(t);\ t \geqslant 0)$:

$$M^\varepsilon(t) := e^{at} V^\varepsilon\,(U^\varepsilon(t),\ X^\varepsilon(t)) - V^\varepsilon(u, x) - \\ - \int_0^t \mathbf{L}_s^\varepsilon\,[e^{as} V^\varepsilon(U^\varepsilon(s),\ X^\varepsilon(s))]\,ds, \tag{30}$$

где

$$V^\varepsilon(u, x) := V(u) + \varepsilon V_1(u, x). \tag{31}$$

Вычислим подынтегральное выражение в (30) с учетом (2), (5), (26), (27)

$$L_s^\varepsilon[e^{as} V^\varepsilon(u, x)] = e^{as}\,[aV^\varepsilon(u, x) + C^*(u, x)\,V'(u) + \\ + \varepsilon C^*(u, x)\,V_1'(u, x)]. \tag{32}$$

Далее, воспользуемся представлением (29)

$$V_1'(u, x) = -\,\mathbf{R}_0\,[C'(u, x)\,V'(u) + C^*(u, x)\,V''(u)].$$

Значит, с учетом обозначений (9) и (10) последнее слагаемое в (32) порождается скалярной функцией

$$C^{1*}(u, x)\,V'(u) + C^0(u, x)\cdot V''(u),$$

для которой в силу условия (15) теоремы справедлива оценка

$$\max_x |\,C^{1*}(u, x)\,|\,V'(u)\,| + C^0(u, x)\cdot|\,V''(u)\,|| \leqslant c_1 V(u). \tag{33}$$

Теперь, используя основное условие (12) теоремы и переходя к математическому ожиданию в (30) с учетом (32) и (33), получаем неравенство

$$e^{at}\mathbf{E}V(U^\varepsilon(t)) \leqslant V(u) - \int_0^t e^{as}\,[c - a - \varepsilon c_1]\,\mathbf{E}V(U^\varepsilon(s))\,ds, \tag{34}$$

из которого при $a > c$ и достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ при всех $\varepsilon \in [0,\ \varepsilon_0]$ получаем ключевое неравенство

$$e^{at}\mathbf{E}V(U^\varepsilon(t)) \leqslant V(u). \tag{35}$$

Завершение доказательства теоремы осуществляется по схеме работы [5] с использованием неравенства Колмогорова для супермартингала $e^{at}V(U^\varepsilon(t))$:

$$\mathcal{P}\,\{\sup_{t>0} e^{at}V(U^\varepsilon(t)) > v\} \leqslant V(u)/v.$$

Из этого неравенства асимптотическая устойчивость процесса следует из свойств функции Ляпунова и соотношений

$$\{\lim_{t\to\infty} U^\varepsilon(t) = 0\} = \{\lim_{t\to\infty} V\,(U^\varepsilon(t) = 0\} \supset \{\sup_{t\geqslant 0} e^{at}V\,(U^\varepsilon(t) \leqslant v\}.$$

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 503 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Математические проблемы нелинейной механики.— Киев : Вища шк., 1987.— 72 с.
3. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига : Зинатне, 1989.— 421 с.
4. *Papanicolaou G. C., Stroock D., Varadhan S.* Martingale approach to some limit theorems // Duke Univ. Math. series. Durham N. C. 1977.— 3.— P. 315—328.
5. *Blankenship G., Papanicolaou G. C.* Stability and control of Stochastic systems with wide-band noise disturbances // SIA M J. Appl. Math.— 1978.— 86, N 3.— P. 437—476.
6. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 220 с.

7. *Скороход А. В.* Асимптотические методы стохастических дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1987.— 326 с.
8. *Королюк В. С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 6.— С. 16—19.

Получено 25.12.90