УДК 511.364

*Я. М. Холявка*

# Приближение инвариантов эллиптической функции

Получена оценка инвариантов $g_2$ и $g_3$ эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z)$ в предположении, что один из квазипериодов связанной с $\wp(z)$ $\zeta$-функции Вейерштрасса $\eta \in \mathbf{A}$. Доказательство проведено с помощью второго метода Гельфонда.

Одержана оцінка інваріантів $g_2$ та $g_3$ еліптичної функції Вейерштраса $\wp(z)$ в припущенні, що один з квазіперіодів зв'язаної з $\wp(z)$ $\zeta$-функції Вейерштраса $n \in \mathbf{A}$. Доведення проведено за допомогою другого методу Гельфонда.

Пусть $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $g_2$, $g_3$ — ее инварианты, $2\omega$, $2\omega_1$ — произвольная фиксированная пара ее основных периодов, $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ — связанные с $\wp(z)$ $\zeta$- и $\sigma$-функции Вейерштрасса, $\eta = \zeta(\omega)$,

$\eta_1 = \zeta(\omega_1)$, $\omega(x, y) = 2x\omega + 2y\omega_1$, $\eta(x, y) = 2x\eta + 2y\eta_1$. Обозначим через $\mathbf{A}$ множество всех алгебраических чисел, $\xi_i \in \mathbf{A}$, $L_i$ и $n_i$ — длина и степень $\xi_i$, $|g|_D = \sup_{z \in D} |g(z)|$, $V(a, b) = \{z \,||\, z - a| \leqslant b\}$. Будем предполагать, что $\xi_i \neq 0$.

Из результата Шнейдера [1] следует, что если $\eta \in \mathbf{A}$, то по крайней мере одно из чисел $g_2$, $g_3$ трансцендентно. В настоящей статье получена следующая оценка совместного приближения алгебраическими числами инвариантов $\wp(z)$.

Теорема. *Пусть* $\eta \in \mathbf{A}$, $n = \deg \mathbf{Q}(\xi_2, \xi_3)$, $N = n(\min(n_2, n_3) \times \times (\ln L_2/n_2 + \ln L_3/n_3 + 1) + \ln n)$. *Если существует такая постоянная* $C$, *что*

$$\min_{|x|, |y| < v,\, x, y \in \mathbf{Z},\, x^2 + y^2 \neq 0} |x\eta + y\eta_1| > \exp(-Cv^3), \tag{1}$$

*то существует такая эффективная постоянная* $\Lambda = \Lambda(\omega, \omega_1)$, *что*

$$|g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| > \exp(-\Lambda N^4). \tag{2}$$

Отметим, что условие (1) выполняется при $\eta/\eta_1 \notin \mathbf{R}$.

Доказательство. Будем обозначать через $C_1, C_2, \ldots$ положительные числа, не зависящие от $n_i$, $L_i$, $n$ и $\lambda$, где $\lambda$ — достаточно большое число. Покажем, что неравенство

$$|g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| < \exp(-\lambda^{14} N^4) \tag{3}$$

не верно. Доказывать будем от противного. Положим

$$x_0 = \lambda[N], \quad s_0 = \lambda^{10}[N^3], \quad x_1 = \lambda^2 x_0, \quad q = (2x_1 - 1)^2. \tag{4}$$

В дальнейшем $x$, $s \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant s < s_0$, а пределы изменения $x$ будут указываться.

Среди $n_2 n_3$ чисел $\xi_2^{u_2}\xi_3^{u_3}$, $u_i = 0, \ldots, n_i - 1$, существует $n$ линейно независимых над $\mathbf{Q}$. Обозначим их $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Пусть

$$f(z) = \sum_{k,l=0}^{q-1} C_{k,l} \zeta^k(z) \wp^l(z), \tag{5}$$

$$C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{k,l,\tau} \in \mathbf{Z}. \tag{6}$$

Из свойств $\wp(z)$, соотношений (5), (6), лемм 9А и 10А в [2] следует

$$\begin{aligned} f^{(s)}((2x+1)\omega) = {} & \sum_{k,l=0}^{q-1} \sum_{\tau=1}^{n} \sum_{s_1=0}^{s} \sum_{t_1 + 2\tau_1 + 2a_1 + 4c_1 = s_1 + k} (-1)^{\tau_1} \times \\ & \times \sum_{2a_2 + 4c_2 = 2l_2 + s - s_1} C_{k,l,\tau} F(t_1, \tau_1, a_1, 0, c_1, k, s_1) \binom{s}{s_1} \times \\ & \times E(a_2, 0, c_2, l, s - s_1) \zeta_\tau((2x+1)\eta)^{t_1} \wp(\omega)^{\tau_1 + a_1 + a_2} \wp''(\omega)^{c_1 + c_2}, \end{aligned} \tag{7}$$

где коэффициенты $F(\ldots)$ и $E(\ldots)$ определены в леммах 9А и 10А [2]. Рассматривая действительные и мнимые части (7), при $|x| < x_0$ получаем $m_0 = 2s_0(2x_0 - 1)$ линейных форм с действительными коэффициентами от $\mu = q^2 n$ переменных $C_{k,l,\tau}$. Полагая $N_0 = [\exp(\lambda^{11} N^4)] + 1$, из леммы 3 в [3] получаем существование такого набора чисел $C_{k,l,\tau}$, что выполняются оценки

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp(-\lambda^{11} N^4), \quad |x| < x_0, \tag{8}$$

$$0 < \max |C_{k,l,\tau}| < \exp(3\lambda^{10} N^4/n). \tag{9}$$

Обозначим через $\beta$ ближайший к $\wp(\omega)$ корень уравнения $4z^3 - \xi_2 z - \xi_3 = 0$ и положим $\gamma = 6\beta^2 - \xi_2/2$. Так как $4\wp^3(\omega) - g_2\wp(\omega) - g_3 = 0$, то из (3) следуют оценки

$$|\wp(\omega) - \beta| < C_2 \exp\left(-\frac{1}{3}\lambda^{14} N^4\right), \quad |\wp'(\omega) - \gamma| < C_3 \exp\left(-\frac{1}{3}\lambda^{14} N^4\right). \tag{10}$$

Определим

$$f_{x,s}=\sum C_{k,l,\tau}(-1)^{\tau_1}F(t_1,\tau_1,a_1,0,c_1,k,s_1)\times$$
$$\times\binom{s}{s_1}E(a_2,0,c_2,l,s-s_1)\,\xi_\tau((2x+1)\eta)^{t_1}\beta^{\tau_1+a_1+a_2}\gamma^{c_1+c_2}, \tag{11}$$

где суммирование ведется по тем же параметрам и в тех же пределах, что и в (7). Из соотношений (4), (7), (9)—(11), лемм 9A и 10A в [2] для $|x|<2x_1$ получим

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)-f_{x,s}|<\exp\left(C_4\lambda^{11}N^4/n-\frac{1}{3}\lambda^{14}N^4\right)<$$
$$<\exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^{14}N^4\right). \tag{12}$$

Рассмотрим многочлен $P_{x,s}\in\mathbf{Z}[y_1,\ldots,y_4]$, получающийся из $2^{3s_0}f_{x,s}$ заменой $\eta_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\beta$ на $y_1,\ldots,y_4$. Из (4), (9), (11) и лемм 9A и 10A в [2] для $|x|<2x_1$ следует

$$L(P_{x,s})<\exp(C_5\lambda^{10,5}N^4/n),\quad \deg_{y_1}P_{x,s}<4\lambda^6N^2,\quad \deg_{y_2}P_{x,s}<n_2+2\lambda^{10}N^3,$$
$$\deg_{y_3}P_{x,s}<n_3,\quad \deg_{y_4}P_{x,s}<2\lambda^{10}N^3,$$

поэтому из лемм 1 и 4 в [3] для $f_{x,s}\neq 0$, $|x|<2x_1$, получим

$$|f_{x,s}|>2^{-3s_0}\exp(-3n\deg\eta\,(C_5\lambda^{10,5}N^4/n+4\lambda^6N^2\ln L(\eta)\deg\eta+$$
$$+\frac{+n_2+2\lambda^{10}N^3}{n_2}\ln L_2+\ln L_3+2\lambda^{10}N^3\min(n_2,n_3)(\ln L_2/n_2+$$
$$+\ln L_3/n_3+5))>\exp(-C_6\lambda^{10,5}N^4). \tag{13}$$

Из соотношений (8) и (12) вытекает

$$|f_{x,s}|<\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^{11}N^4\right),\qquad |x|<x_0. \tag{14}$$

Оценки (13) и (14) не совместны, поэтому

$$f_{x,s}=0,\quad |x|<x_0. \tag{15}$$

Из (12) и (15) для $|x|<x_0$ получим

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)|<\exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^{14}N^4\right). \tag{16}$$

Основная лемма. *Пусть* (16) *верно для* $|x|<X_p$, $X_p=2^px_0$, $2^p<\lambda^2$. *Тогда это неравенство верно и при* $|x|<X_{p+1}$.

Доказательство. Определим

$$F(z)=f(z)\,\sigma^{3q}(z), \tag{17}$$

где $\sigma(z)$ — связанная с $\wp(z)$ $\sigma$-функция Вейерштрасса. Известно (лемма 6 в [4]), что $\wp\sigma^2$ и $\zeta\sigma$ — целые функции. Поэтому из (5) следует, что $F(z)$ — целая функция. Обозначим через $\Delta_0$ границу параллелограмма $D_0=\{z\,|\,z=(2t_1+1)\omega+(2t_2+1)\omega_1,\ |t_i|\leqslant X_{p+1},\ t_i\in\mathbf{R}\}$. Определим $C_7$ и $\rho$

$$|z|_{\Delta_0}=C_7X_p,\quad \rho=\frac{1}{4}\min|\omega(k_1,k_2)|, \tag{18}$$

где $k_1,\ k_2\in\mathbf{Z}$, $k_1^2+k_2^2\neq 0$. Положим

$$R_1=C_7X_p+\rho,\quad R_2=12R_1. \tag{19}$$

Пусть $\Delta_1$ — граница параллелограмма $D_1=\{z\,|\,z=(2t_1+1)\omega+(2t_2+1)\omega_1\ |t_i|\leqslant T_i,\ t_i\in\mathbf{R}\}$. Положим

$$|z|_{\Delta_1}<C_8X_p. \tag{20}$$

Выберем $T_1$ и $T_2$ наименьшими целыми, для которых $V(0, R_2) \subset D_1$. Так как полюсы $\wp(z)$ и $\zeta(z)$ не принадлежат $\Delta_1$, то, используя (4), (5), (9), (20) и лемму 6 в [4], получаем

$$|F(z)|_{\Delta_1} < \exp(3\lambda^{10}N^4/n + C_9\lambda^6N^2 + C_8^2C_{10}2^{2p}\lambda^8N^4) <$$
$$< \exp((C_{11}2^{2p} + 3\lambda^2/n)\lambda^8N^4). \tag{21}$$

Из леммы 6 в [4] и (4) для $|x| < X_p$ имеем

$$|(\sigma^{3q}(z))^{(s)}|_{z=(2x+1)\omega} < (C_{12}2^{2p}\lambda^8N^4). \tag{22}$$

Из (17), (22) и предположения основной леммы следует

$$|F^{(s)}(z)|_{z=(2x+1)\omega} < \exp\left(4C_{12}2^{2p}\lambda^8N^4 - \frac{1}{4}\lambda^{14}N^4\right) <$$
$$< \exp\left(-\frac{1}{5}\lambda^{14}N^4\right), \quad |x| < X_p. \tag{23}$$

Так как $F(z)$ — целая функция, то из принципа максимума модуля следует, что неравенство (21) верно для $z \in V(0, R_2)$, поэтому из (21), (23) и леммы 4.5 в [5] получим

$$|F(z)|_{|z|\leqslant R_1} < 2\exp((C_{11}2^{2p} + 3\lambda^2/n)\lambda^8N^4 - (\ln 3)2^p\lambda^{11}N^4) +$$
$$+ \exp\left(C_{13}2^p\lambda^{11}N^4 - \frac{1}{5}\lambda^{14}N^4\right) < \exp(-2^p\lambda^{11}N^4). \tag{24}$$

Из леммы 6 в [4] для $|x| < X_{p+1}$ будем иметь

$$\min_{z\in V((2x+1)\omega, \rho)} |\sigma^{3q}(z)| > \exp(-C_{14}2^{2p}\lambda^8N^4). \tag{25}$$

Из (17)—(19), (24) и (25) для $|x| < X_{p+1}$ следует

$$|f(z)|_{V((2x+1)\omega,\rho)} < \exp(-2^{p-1}\lambda^{11}N^4). \tag{26}$$

Из (26) и формулы Коши для производных получим

$$|f^{(s)}((2x+1)\omega)| < \exp(C_{15}\lambda^{10,5}N^3\ln N - 2^{p-1}\lambda^{11}N^4) <$$
$$< \exp\left(-\frac{1}{3}2^p\lambda^{11}N^4\right), \quad |x| < X_{p+1}. \tag{27}$$

Из (12) и (27) для $|x| < X_{p+1}$ вытекает оценка

$$|f_{x,s}| < \exp(-2^{p-2}\lambda^{11}N^4). \tag{28}$$

Оценки (13) и (28) не совместны, поэтому для $|x| < X_{p+1}$ $f_{x,s} = 0$, что вместе с (12) доказывает основную лемму. Оценим $|C_{k,l}|$ сверху. Пусть в лемме 4 [6] $\delta = \min(\rho, \delta_1)/2$ ($\rho$ определено в (18), $\delta_1$ определено в лемме 4 [6]) и $Y_i$ занумерованы так, что $a = (2\omega + \omega_1)/4 \in Y_1$.

Обозначим через $\rho_1$ расстояние от точки $a$ до границы треугольника с вершинами в точках 0, $\omega$, $\omega + \omega_1$ и положим

$$\varepsilon_1 = \min(\delta, \rho_1)/2, \; \alpha_\varkappa = \left(1 - \frac{\varkappa+1}{q\lambda}\right)a, \quad \varkappa = 0, \ldots, q-1. \tag{29}$$

Так как $\lambda$ достаточно большое, то из (29) следует

$$\alpha_\varkappa \in V(a, \varepsilon_1) \subset Y_1. \tag{30}$$

Из леммы 4 [6], (29) и (30) при $\varkappa \neq j$ получим

$$|\wp(\alpha_\varkappa) - \wp(\alpha_j)| > \exp(-C_{16}\lambda\ln N). \tag{31}$$

Из (1), (4) и леммы 7.7 в [2] для $x, x', y, y' \in \mathbf{Z}$, $|x|$, $|x'|$, $|y|$,

$|y'|<x_1$, $(x, y) \neq (x', y')$ будем иметь

$$\prod_{x,y=-x_1+1}^{x_1-1} |\eta(x, y) - \eta(x', y')| > \exp(-C_{17}\lambda^{12}N^4). \qquad (32)$$

Из леммы 3 в [6] получим следующее утверждение: пусть

$$\Delta = \det(\wp^l(\alpha_\varkappa))_{l,\varkappa=0,\ldots,q-1}, \quad \Delta(\varkappa) = \det(\zeta^k(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa))_{\substack{k=0,\ldots,q-1\\ x,y=0,\pm 1,\ldots,\pm(x_1-1)}},$$

$\Delta_{l,\varkappa}$ — алгебраическое дополнение элемента $\wp^l(\alpha_\varkappa)$, $\Delta_{k,x,y}(\varkappa)$ — алгебраическое дополнение элемента $\zeta^k(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa)$. Если $\Delta$, $\Delta(\varkappa) \neq 0$, то

$$C_{k,l} = \sum_{\varkappa=0}^{q-1} \sum_{x,y=-(x_1-1)}^{x_1-1} \frac{\Delta_{l,\varkappa}}{\Delta} \frac{\Delta_{k,x,y}(\varkappa)}{\Delta(\varkappa)} f(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa). \qquad (33)$$

Так как $\Delta$, $\Delta(\varkappa)$, являющиеся определителями Вандермонда, при данных $\alpha_\varkappa$ отличны от нуля, то из леммы 5.7 в [2] и (31), (32) получаем

$$|\Delta_{l,\varkappa}/\Delta| < \exp(C_{18}\lambda^{6,5}N^2 \ln N), \qquad (34)$$

$$|\Delta_{k,x,y}(\varkappa)/\Delta(\varkappa)| < \exp(C_{19}\lambda^{12}N^4). \qquad (35)$$

Так как из леммы 6 в [4] для $x, y = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_1 - 1)$ следует

$$\min_{z=\omega(x,y)+\alpha_\varkappa} |\sigma^{3q}(z)| > \exp(-C_{20}\lambda^{10}N^4), \qquad (36)$$

то из (17) — (19), (24), (36) при $p = p_0$, $\frac{1}{2}\lambda^2 \leqslant 2^{p_0} < \lambda^2$ для тех же $x$, $y$ имеем

$$|f(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa)| < \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^{13}N^4\right). \qquad (37)$$

Из (33) — (35) и (37) получим

$$|C_{k,l}| < \exp\left(-\frac{1}{5}\lambda^{13}N^4\right). \qquad (38)$$

Из (6) следует, что $C_{k,l}$ можно рассматривать как значение соответствующего многочлена $Q_{k,l} \in \mathbf{Z}[v_1, v_2]$ в точке $(\xi_2, \xi_3)$, $L(Q_{k,l}) \leqslant n \max|C_{k,l,\tau}|$, $\deg_{v_i} Q_{k,l} \leqslant n_{i+1} - 1$.

Из леммы 9.2 в [2] для $C_{k,l} \neq 0$ получим

$$|C_{k,l}| > \exp(-\lambda^{11}N^4). \qquad (39)$$

Оценки (38) и (39) не совместны, поэтому все $C_{k,l}$ равны нулю. Из (6) и линейной независимости $\xi_\tau$ следует, что и все $C_{k,l,\tau}$ равны нулю, а это противоречит их выбору. Полученное противоречие показывает, что предположение (3) не верно. Но тогда выполняется (2), что и требовалось доказать.


1. *Scheider T.* Transzendenzun. periodischer Funktionen. 2 // Journ. reine und angew. Math.— 1934.— **172**, N 1.— S. 65—79.
2. *Фельдман Н. И.* Седьмая проблема Гильберта.— М. : Изд-во МГУ, 1982.— 311 с.
3. *Холявка Я. М.* О совместном приближении инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами // Диофантовы приближения, ч. 2.— М.: Изд-во МГУ, 1986.— С. 114—121.
4. *Ramachandra K.*, Contributions to theory of transcendental numbers. 2 // Acta Arich.— 1968.— **14**, N 1.— P. 73—88.
5. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exponentielle // Bull. Soc. math. France — 1980.— **108**, N 1.— P. 47—79.
6. *Фельдман Н. И.* Эллиптический аналог одного неравенства А. О. Гельфонда // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1968.— **18**.— С. 65—76.


Львов. ун-т

Получено 30.03.88

$|y'| < x_1$, $(x, y) \neq (x', y')$ будем иметь

$$\prod_{x,y=-x_1+1}^{x_1-1} |\eta(x, y) - \eta(x', y')| > \exp(-C_{17}\lambda^{12}N^4). \tag{32}$$

Из леммы 3 в [6] получим следующее утверждение: пусть

$$\Delta = \det(\wp^l(\alpha_\varkappa))_{l,\varkappa=0,\ldots,q-1}, \quad \Delta(\varkappa) = \det(\zeta^k(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa))_{\substack{k=0,\ldots,q-1\\ x,y=0,\pm1,\ldots,\pm(x_1-1)}},$$

$\Delta_{l,\varkappa}$ — алгебраическое дополнение элемента $\wp^l(\alpha_\varkappa)$, $\Delta_{k,x,y}(\varkappa)$ — алгебраическое дополнение элемента $\zeta^k(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa)$. Если $\Delta$, $\Delta(\varkappa) \neq 0$, то

$$C_{k,l} = \sum_{\varkappa=0}^{q-1} \sum_{x,y=-(x_1-1)}^{x_1-1} \frac{\Delta_{l,\varkappa}}{\Delta} \frac{\Delta_{k,x,y}(\varkappa)}{\Delta(\varkappa)} f(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa). \tag{33}$$

Так как $\Delta$, $\Delta(\varkappa)$, являющиеся определителями Вандермонда, при данных $\alpha_\varkappa$ отличны от нуля, то из леммы 5.7 в [2] и (31), (32) получаем

$$|\Delta_{l,\varkappa}/\Delta| < \exp(C_{18}\lambda^{6,5}N^2 \ln N), \tag{34}$$

$$|\Delta_{k,x,y}(\varkappa)/\Delta(\varkappa)| < \exp(C_{19}\lambda^{12}N^4). \tag{35}$$

Так как из леммы 6 в [4] для $x, y = 0, \pm 1, \ldots, \pm(x_1 - 1)$ следует

$$\min_{z=\omega(x,y)+\alpha_\varkappa} |\sigma^{3q}(z)| > \exp(-C_{20}\lambda^{10}N^4), \tag{36}$$

то из (17) — (19), (24), (36) при $p = p_0$, $\frac{1}{2}\lambda^2 \leqslant 2^{p_0} < \lambda^2$ для тех же $x$, $y$ имеем

$$|f(\omega(x, y) + \alpha_\varkappa)| < \exp\left(-\frac{1}{4}\lambda^{13}N^4\right). \tag{37}$$

Из (33) — (35) и (37) получим

$$|C_{k,l}| < \exp\left(-\frac{1}{5}\lambda^{13}N^4\right). \tag{38}$$

Из (6) следует, что $C_{k,l}$ можно рассматривать как значение соответствующего многочлена $Q_{k,l} \in \mathbf{Z}[v_1, v_2]$ в точке $(\xi_2, \xi_3)$, $L(Q_{k,l}) \leqslant n \max |C_{k,l,\tau}|$, $\deg_{v_i} Q_{k,l} \leqslant n_{i+1} - 1$.

Из леммы 9.2 в [2] для $C_{k,l} \neq 0$ получим

$$|C_{k,l}| > \exp(-\lambda^{11}N^4). \tag{39}$$

Оценки (38) и (39) не совместны, поэтому все $C_{k,l}$ равны нулю. Из (6) и линейной независимости $\xi_\tau$ следует, что и все $C_{k,l,\tau}$ равны нулю, а это противоречит их выбору. Полученное противоречие показывает, что предположение (3) не верно. Но тогда выполняется (2), что и требовалось доказать.


1. *Scheider T.* Transzendenzun. periodischer Funktionen. 2 // Journ. reine und angew. Math.— 1934.— **172**, N 1.— S. 65—79.
2. *Фельдман Н. И.* Седьмая проблема Гильберта.— М. : Изд-во МГУ, 1982.— 311 с.
3. *Холявка Я. М.* О совместном приближении инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами // Диофантовы приближения, ч. 2.— М.: Изд-во МГУ, 1986.— С. 114—121.
4. *Ramachandra K.*, Contributions to theory of transcendental numbers. 2 // Acta Arich.— 1968.— **14**, N 1.— P. 73—88.
5. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exponentielle // Bull. Soc. math. France — 1980.— **108**, N 1.— P. 47—79.
6. *Фельдман Н. И.* Эллиптический аналог одного неравенства А. О. Гельфонда // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1968.— **18**.— С. 65—76.


Львов. ун-т

Получено 30.03.88