УДК 517.941

Г. В. РАДЗИЕВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О свойствах решений линейных функционально-дифференциальных уравнений, зависящих от параметра

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ изучается уравнение $A(d/dt, \rho)\, x(t) + [F(\rho)\, x](t) = f(t)$, где $A(d/dt, \rho)\, x = x^{(n)} + \rho A_1 x^{(n-1)} + \ldots + \rho^n A_n x$, матрицы $A_1, \ldots, A_n$ имеют размер $m \times m$, x — искомая, а f — заданная функции со значениями в m-мерном пространстве $\mathbb{C}^m$, $F(\rho)$ — линейный оператор, действующий из пространства Гельдера в пространство Лебега вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ и зависящий от комплексного параметра ρ. Выделено множество тех ρ, в которых установлено взаимно однозначное соответствие между решениями данного уравнения и решениями уравнения $A(d/dt, \rho)\, x(t) = 0$.

На відрізку $0 \leqslant t \leqslant 1$ вивчається рівняння $A(d/dt, \rho)\, x(t) + [F(\rho)\, x](t) = f(t)$, де $A(d/dt, \rho)\, x = x^{(n)} + \rho A_1 x^{(n-1)} + \ldots + \rho^n A_n x$, матриці $A_1, \ldots, A_n$ мають розмір $m \times m$, x — шукана, а f — задана функції зі значенням в m-мірному просторі $\mathbb{C}^m$, $F(\rho)$ — лінійний обмежений оператор, що діє з простору Гельдера в простір Лебега вектор-функцій зі значенням в $\mathbb{C}^m$ і залежить від комплексного параметра ρ. Виділена множина тих ρ, в яких установлена взаємна однозначна відповідність між розв'язками даного рівняння і розв'язками рівняння $A(d/dt, \rho)\, x(t) = 0$.

1. Введение. Далее приняты следующие обозначения: $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbb{C}^m$ — m-мерное комплексное пространство; m и n — натуральные числа, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p' = p(p-1)^{-1}$, если $1 < p < \infty$, $p' = \infty$, если $p = 1$, и $p' = 1$, если $p = \infty$; L_p, W_p^n и H^γ — соответственно пространства Лебега, Соболева и Гельдера вектор-функций, заданных на отрезке $[0, 1]$ со значениями в $\mathbb{C}^m$, а пространство $H_n^\gamma = H^\gamma$ при $0 \leqslant$

$\leqslant \gamma < n$ и $H_n^n = W_\infty^n$ (точные определения даны в п. 2); $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ — множество линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства $\mathfrak{B}_1$ в банахово пространство $\mathfrak{B}_2$, причем $[\mathfrak{B}] \equiv [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}]$, и в частности, $[\mathbb{C}^m]$ — множество матриц размера $m \times m$; $I_{\mathfrak{B}}$ — тождественный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Если из текста ясно, в каком пространстве $\mathfrak{B}$ действует оператор $I_{\mathfrak{B}}$, то индекс $\mathfrak{B}$ опускается, т. е. тогда $I = I_{\mathfrak{B}}$. Норма векторов и операторов обозначается через $\|\cdot\|$ и снабжается индексом, обозначающим соответствующее пространство, лишь в том случае, когда это может вызвать недоразумение. Для векторов $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ из $\mathbb{C}^m$ вводится скалярное произведение $(x, y)_m = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_m\bar{y}_m$ и норма $|x|_m = (x, x)_m^{1/2}$. В случае $m = 1$ (т. е. комплексных чисел) индекс m в норме опускается.

В работе изучается функционально-дифференциальное уравнение вида

$$[\mathscr{L}(\rho)x](t) \equiv A(d/dt, \rho)\, x(t) + [F(\rho)x](t) = f(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

где

$$A(\lambda, \rho) = \lambda^n I + \lambda^{n-1}\rho A_1 + \ldots + \rho^n A_n, \tag{2}$$

функция $f \in L_p$, оператор $F(\rho) \in [H_n^\gamma, L_p]$ при $0 \leqslant \gamma \leqslant n - (1/p)$, а ρ принадлежит множеству Ω, содержащему сколь угодно большие по модулю числа. В выражении (2) $I = I_{\mathbb{C}^m}$, а $A_1, \ldots, A_n \in [\mathbb{C}^m]$, $A(d/dt, \rho)\, x(t) \equiv x^{(n)}(t) + \rho A_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + \rho^n A_n x(t)$. В силу вложения пространства W_p^n в пространство H_n^γ (см. утверждение 1) корректно следующее определение: решением уравнения (1) называется функция $x \in W_p^n$, удовлетворяющая (1).

В работе исследован вопрос об асимптотическом поведении решения уравнения (1) по комплексному параметру ρ, стремящемуся к бесконечности, и о числе линейно независимых решений однородного уравнения $\mathscr{L}(\rho)\, x = 0$, т. е., когда в (1) функция $f = 0$. Работа состоит из семи пунктов. Первые пять пунктов носят вспомогательный характер, а основная теорема сформулирована и доказана в п. 6, где также приведены различные ее следствия. П. 7 посвящен построению примеров, показывающих существенность условий, наложенных в этой теореме и ее следствиях; в нем коротко сказано о возможных приложениях результатов работы и дано сравнение их с ранее имеющимися в этом направлении.

2. Функциональные пространства. Через L_p и W_p^n обозначим пространства Лебега и Соболева функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, со значениями в $\mathbb{C}^m$, причем $\|x\|_{W_p^n} = \|x\|_{L_p} + \|x^{(n)}\|_{L_p}$. Для чисел $l = 0, 1, \ldots$ пространство H^l состоит из l-раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, со значениями в $\mathbb{C}^m$ и с нормой $\|x\|_{H^l} = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|_m + \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(l)}(t)|_m$. Пусть $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Тогда через H_0^ν обозначим пространство функций $x \in H^0$, для которых конечна полунорма

$$\|x\|_{H_0^\nu} = \sup_{0 \leqslant t < \tau \leqslant 1} \frac{|x(\tau) - x(t)|_m}{(\tau - t)^\nu}.$$

Отсюда вытекает следующее мультипликативное неравенство:

$$\|x\|_{H_0^\nu} \leqslant 2^{1-(\nu/\gamma)} \|x\|_{H^0}^{1-(\nu/\gamma)} \|x\|_{H_0^\gamma}^{\nu/\gamma}, \ 0 \leqslant \nu < \gamma \leqslant 1, \ \ x \in H_0^\gamma. \tag{3}$$

Введем пространство Гельдера H^γ при всех неотрицательных γ: если $\gamma = l + \nu$, где l — целое неотрицательное число, а $0 \leqslant \nu < 1$, то при $\nu = 0$ пространство $H^\gamma = H^l$, а при $0 < \nu < 1$ пространство H^γ состоит из функций $x \in H^l$, для которых $x^{(l)} \in H_0^\gamma$, с нормой $\| x \|_{l^\gamma} = \| x \|_{H^l} + \| x^{(l)} \|_{H_0^\gamma}$. Согласно теореме Лебега о производной абсолютно непрерывной функции $\| x \|_{H_0^1} = \| x' \|_{L_\infty}$, поэтому для дальнейшего удобно ввести также шкалу пространств H_n^γ (где n — натуральное число и $0 \leqslant \gamma \leqslant n$), определяемых равенствами $H_n^\gamma = H^\gamma$, когда $0 \leqslant \gamma < n$, и $H_n^n = W_\infty^n$.

Утверждение 1. *Пространство W_p^n вложено в пространство $H_n^{n-(1/p)}$. Если $0 \leqslant \gamma < n - (1/p)$, то пространство W_p^n компактно вложено в пространство $H^\gamma (= H_n^\gamma)$.*

Доказательство полностью повторяет рассуждения из книг [1, с. 33; 2, с. 271].

Пусть Ω — область (т. е. односвязное открытое множество) комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $f(\rho)$ — функция, зависящая от комплексного параметра $\rho \in \Omega$, со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Аналитичность этой функции означает дифференцируемость ее в комплексном смысле по норме пространства $\mathfrak{B}$ в каждой точке $\rho \in \Omega$.

Утверждение 2. *Для того чтобы функция $Q(\rho)$ со значениями в $[L_p, W_p^n]$ была аналитическая по $\rho \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы для любых функций $g \in L_p$ и $g_1, g_2 \in L_{p'}$ числовая функция*

$$\int_0^1 ([Q(\rho) g](t), g_1(t))_m dt + \int_0^1 \left(\frac{d^n}{dt^n} [Q(\rho) g](t), g_2(t) \right)_m dt$$

была аналитическая по $\rho \in \Omega$.

Доказательство в случае $1 \leqslant p < \infty$ вытекает из теоремы 3.10.1 книги [3, с. 107] и теоремы 2 книги [4, с. 29]. Чтобы установить утверждение при $p = \infty$, согласно теореме 3.10.1 из [3, с. 107] достаточно показать, что множество функционалов вида

$$g_*(x) = \int_0^1 (x(t), g_1(t))_m dt + \int_0^t (x^{(n)}(t), g_2(t))_m dt$$

с функциями $g_1, g_2 \in L_1$ является определяющим многообразием для W_∞^n. Доказательство этого предложения полностью повторяет рассуждения из доказательства теоремы 1 из [4, с. 29], если учесть следующее 1) определяющим многообразием для пространства L_∞ является пространство L_1, в котором норма вектор-функции $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_m(t)\}$ равна $\max \{\| x_v \|_{L_1} : v = \overline{1, m}\}$; 2) если $\mathfrak{B}$ — подпространство банахова пространства $\mathfrak{B}_1$, а $\mathfrak{L}$ — определяющее многообразие для $\mathfrak{B}_1$, то $\mathfrak{L}$ — определяющее многообразие для $\mathfrak{B}$.

3. Построение фундаментальной системы решений уравнения $A(d/dt, \rho) y(t) = 0$ и связанные с этим понятия. Пусть $A \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, тогда $\mathfrak{Z}(A) (\subseteq \mathfrak{B}_1)$ и $\mathfrak{R}(A) (\subseteq \mathfrak{B}_2)$ соответственно ядро и область значений оператора A. В силу вида (2) матрицы-функции $A(\lambda, \rho)$ определитель ее не тождественно равен нулю и является однородным многочленом порядка mn относительно переменных λ и ρ. Обозначим через ω_k неравные между собой корни многочлена $\det A(\lambda, 1)$, которые являются *характеристическими числами матрицы-функции* $A(\lambda, 1)$, т. е. найдется такой ненулевой вектор $y_0 \in \mathbb{C}^m$, что $A(\omega_k, 1) y_0 = 0$. Элемент y_0 называется *собственным вектором* $A(\lambda, 1)$, отвечающим характеристическому числу ω_k, и принадлежит подпространству $\mathfrak{Z}(A(\omega_k, 1)) \subseteq \mathbb{C}^m$. Число $\alpha_k = \dim \mathfrak{Z}(A(\omega_k, 1))$ называется *геометрической кратностью характеристического числа* ω_k. Элементы $y_0, \ldots, y_d$ из $\mathbb{C}^m$ являются *цепочкой собственного и присоединенных к нему векторов*, отвечающей характеристическому числу ω_k матрицы-функции $A(\lambda, 1)$, если

y_0 — собственный вектор и

$$\sum_{h=0}^{s} \frac{1}{h!} \frac{\partial^h A(\lambda, 1)}{\partial \lambda^h}\bigg|_{\lambda=\omega k} y_{s-h} = 0, \ s = \overline{0, d}.$$

Элемент y_h называется присоединенным вектором порядка h. Каждому собственному вектору y_0 матрицы-функции $A(\lambda, 1)$ поставим в соответствие число d, равное максимальному порядку присоединенных к y_0 элементов. Число $d+1$ называется *кратностью собственного вектора* y_0. *Канонической системой собственных и присоединенных к нему векторов*, отвечающей характеристическому числу ω_k матрицы-функции $A(\lambda, 1)$, называется система элементов $y_{0,j,k}, \dots, y_{d_{j,k},j,k}$, $j = \overline{1, \alpha_k}$, из $\mathbb{C}^m$, обладающая следующими свойствами: 1) элемент $y_{0,j,k}$ собственный, а $y_{1,j,k}, \dots$ $\dots, y_{d_{j,k},j,k}$ — присоединенные к нему элементы, отвечающие характеристическому числу ω_k матрицы-функции $A(\lambda, 1)$; 2) кратность собственного вектора $y_{0,1,k}$ достигает возможного максимума $d_{1,k}+1$ среди всех собственных векторов, отвечающих характеристическому числу ω_k; 3) кратность собственного вектора $y_{0,j,k}$ при $j > 1$ достигает возможного максимума $d_{j,k}+1$ среди всех собственных векторов, не выражающихся линейно через элементы $y_{0,j,k}, \dots, y_{0,j-1,k}$. Число $\sum_{j=1}^{\alpha_k} (d_{j,k}+1)$ называется *алгебраической кратностью характеристического числа* ω_k и совпадает с кратностью корня ω_k многочлена $\det A(\lambda, 1)$. Пусть $d_k = d_{1,k}$. Тогда число $d_k + 1$ называется *собственной кратностью характеристического числа* ω_k. В дальнейшем нулевое характеристическое число матрицы-функции $A(\lambda, 1)$ (если оно имеется) играет особую роль, поэтому пронумеруем его индексом 0, т. е. $\omega_0 = 0$. Остальные характеристические числа $\omega_k (\neq 0)$ пронумеруем индексом k, изменяющимся от 1 до $\varpi (\geqslant 1)$. Из вида (2) матрицы-функции $A(\lambda, \rho)$ вытекает представление

$$A^{-1}(\lambda, 1) = \sum_{k=0}^{\varpi} \sum_{h=0}^{d_k} \frac{R_{d_k-h,k}}{(\lambda - \omega_k)^{h+1}}, \tag{4}$$

где операторы $R_{h,k} \in [\mathbb{C}^m]$, и

$$\sum_{k=0}^{\varpi} \sum_{j=1}^{\alpha_k} (d_{j,k}+1) = mn, \tag{5}$$

причем в (4) и (5) слагаемые с индексом $k=0$ отсутствуют, если 0 не является характеристическим числом $A(\lambda, 1)$; а в случае, когда кроме нулевого характеристического числа нет других характеристических чисел, тогда в (4) и (5) отсутствуют слагаемые с индексами $k \geqslant 1$. Такого рода замечания, если это не вызывает недоразумений, далее специально не оговариваются. Поэтому в дальнейшем считаем $k = \overline{0, \varpi}$, хотя ноль может и не являться характеристическим числом $A(\lambda, 1)$. По каноническим системам собственных и присоединенных к ним векторов матрицы-функции $A(\lambda, 1)$ определим вектор-функции

$$y_{h,j,k}(t) = e^{\omega_k t}\left(\frac{t^h}{h!} y_{0,j,k} + \dots + \frac{t}{1!} y_{h-1,j,k} + y_{h,j,k}\right),$$
$$h = \overline{0, d_{j,k}}, \quad j = \overline{1, \alpha_k}, \ k = \overline{0, \varpi}, \tag{6}$$

которые образуют фундаментальную систему решений уравнения $A(d/dt, 1)\, y(t) = 0$, а функции $y_{h,j,k}(\rho t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $A(d/dt, \rho)\, y(t) = 0$ при $\rho \neq 0$.

4. Определение и свойства преобразования $Q_r(\rho)$. Введем равные по модулю единице комплексные числа $\omega_1^*, \dots, \omega_{w^*}^*$, которые задают правилом $\{\rho : \operatorname{Im} \rho/\omega_s^* = 0\}$ все не совпадающие между собой прямые, проходящие через 0, и не равные нулю характеристические числа ω_k матрицы-функции $A(\lambda, 1)$. Очевидно, $w^* \leqslant w$ и $\operatorname{Im} \omega_k/\omega_s^* = 0$ для некоторых значений индексов $k = \overline{1, w}$, $s = \overline{1, w^*}$, а также $\operatorname{Im} \omega_s^*/\omega_{s_1}^* \neq 0$ при $s \neq s_1$. Прямые $\{\rho : \operatorname{Re} \rho\omega_s^* = 0\}$, ортогональные прямым $\{\rho : \operatorname{Im} \rho/\omega_s^* = 0\}$, разбивают комплексную ρ плоскость на $2w^*$ непересекающихся углов Ξ_r, $r = \overline{1, 2w^*}$. Определим подмножества $\Lambda_r^{\pm}$ множества индексов $\{1, \dots, w\}$ правилами

$$\Lambda_r^{\pm} = \{k : \pm \operatorname{Re} \rho\omega_k \geqslant 0, \ \forall \rho \in \Xi_r\}, \ r = \overline{1, 2w^*}, \tag{7}$$

где одновременно участвует либо верхний знак «+», либо нижний знак «—». Отметим, что одно из множеств Λ_r^+ или Λ_r^- может оказаться пустым, а объединение множеств Λ_r^+ и Λ_r^- при фиксированном $r = \overline{1, 2w^*}$ всегда совпадает с множеством индексов от 1 до w.

Выберем $\varepsilon > 0$ столь малыми, что окружности $\Gamma_k = \{\rho : |\rho - \omega_k| = \varepsilon\}$, ориентированные против часовой стрелки, не пересекаются при различных значениях $k = \overline{0, w}$. Введем матрицы-функции

$$B_k(\rho, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} e^{\lambda\rho t} A^{-1}(\lambda, 1)\, d\lambda, \ k = \overline{0, w}, \tag{8}$$

заданные при $-\infty < t < \infty$ и $\rho \in \mathbb{C}$, и по ним определим преобразования

$$[Q_r(\rho) g](t) = \frac{1}{\rho^{n-1}} \sum_{k \in \{0\} \cup \Lambda_r^-} \int\limits_0^t B_k(\rho, t - \tau) g(\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\rho^{n-1}} \sum_{k \in \Lambda_r^+} \int\limits_t^1 B_k(\rho, t - \tau) g(\tau)\, d\tau, \quad r = \overline{1, 2w^*}, \tag{9}$$

линейные по функции $g \in L_1$.

Установим следующее правило дифференцирования по t функции $[Q_r(\rho) g](t)$:

$$\frac{d^l}{dt^l} [Q_r(\rho) g](t) = \delta_{l,n}\, g(t) + \frac{1}{\rho^{n-1}} \sum_{k \in \{0\} \cup \Lambda_r^-} \int\limits_0^t \frac{\partial^l B_k(\rho, t - \tau)}{\partial t^l} g(\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\rho^{n-1}} \sum_{k \in \Lambda_r^+} \int\limits_t^1 \frac{d^l B_k(\rho, t - \tau)}{\partial t^l} g(\tau)\, d\tau, \quad l = \overline{0, n}, \tag{10}$$

где $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера. Из определения (8) получаем

$$\frac{\partial^l B_k(\rho, t)}{\partial t^l} = \frac{\rho^l}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} e^{\lambda\rho t} \lambda^l A^{-1}(\lambda, 1)\, d\lambda, \quad l = 0, 1, \dots . \tag{11}$$

Из вида (2) матрицы-функции $A(\lambda, \rho)$ следует соотношение $\| \lambda^n A^{-1}(\lambda, 1) - I \| \to 0$, когда $\lambda \to \infty$, поэтому вычет матрицы-функции $\lambda^l A^{-1}(\lambda, 1)$ в бесконечности равен $-\delta_{l,n-1} I$ при $l = \overline{0, n-1}$. Тем самым сумма по $k = 0, w$ вычетов матрицы-функции $\lambda^l A^{-1}(\lambda, 1)$ в точках ω_k равна $\delta_{l,n-1} I$, если $l=\overline{0, n-1}$; отсюда и из тождества (11) получаем равенства

$$\sum_{k=0}^{w} \frac{\partial^l B_k(\rho, t)}{\partial t^l}\bigg|_{t=0} = \rho^l \delta_{l,n-1} I, \quad l = \overline{0, n-1},$$

из которых и определения (9) вытекают формулы (10).

Лемма 1. *Преобразование $Q_r(\rho)$, рассмотренное как оператор из пространства L_p в пространство W_p^n, является аналитической оператор-функцией при $\rho \neq 0$, для которой ноль — либо устранимая особая точка, либо конечномерный полюс. Для любой функции $g \in L_p$ функция $x(\rho;\ t) = [Q_r(\rho)\ g]\ (t)$ при фиксированном $\rho \neq 0$ принадлежит по t пространству W_p^n и является решением уравнения $A\ (d/dt, \rho)\ x\ (\rho;\ t) = g\ (t)$.*

Доказательство. Включение $Q_r(\rho) \in [L_p, W_p^n]$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ вытекает из формул (10) и (11). Аналитичность этой операторнозначной функции при $\rho \neq 0$ и структура ее особенности при $\rho = 0$ следуют из утверждения 2 и формул (10), (11). Положив матрицу $A_0 = I$ из (11) выводим равенства

$$\sum_{l=0}^{n} \rho^{n-l} A_{n-l} \frac{\partial^l B_k(\rho, t)}{\partial t^l} = \frac{\rho^n}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} e^{\lambda\rho t} d\lambda = 0, \quad k = \overline{0, w},$$

при $-\infty < t < \infty$, отсюда и из формул (10) заключаем, что функция $x(\rho;\ t) = [Q_r(\rho)\, g](t)$ является решением уравнения $A(d/dt, \rho)\, x(\rho;\ t) = g(t)$.

Лемма 2. *Пусть фиксированное число $\rho \neq 0$ и $\rho \in \Omega$. Тогда уравнение (1) разрешимо относительно функции $x \in W_p^n$ в том и только в том случае, когда найдется такое решение y уравнения $A(d/dt, \rho) \times \times y(t) = 0$, для которого*

$$x(t) = [Q_r(\rho)\, g](t) + y(t), \tag{12}$$

а функция $g \in L_p$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$g(t) + [F(\rho)\, Q_r(\rho)\, g](t) = -[F(\rho)\, y](t) + f(t). \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $x \in W_p^n$ является решением уравнения (1). Положив функцию $g\ (t) = A\ (d/dt, \rho)\ x\ (t)$, согласно лемме 1 заключаем, что найдется такая функция y, являющаяся решением однородного уравнения $A\ (d/dt, \rho)\ y\ (t) = 0$, для которой справедливо равенство (12). Учитывая выражение g и равенство (12), от уравнения (1) переходим к уравнению (13).

Достаточность. Пусть функция $x \in W_p^n$ удовлетворяет тождествам (12) и (13) с функцией y, являющейся решением уравнения $A\ (d/dt, \rho)\ y\ (t) = 0$. Тогда из равенства (12) и леммы 1 следует, что $A\ (d/dt, \rho)\ x\ (t) = g\ (t)$, а из (12) и (13) имеем $g\ (t) = -[F\ (\rho)x]\ (t) + f\ (t)$, т. е. x — решение уравнения (1).

5. Оценки нормы преобразования $Q_r(\rho)$. В дальнейшем, как правило, индекс при постоянной $c > 0$ в неравенствах опускается, если значение этой постоянной не играет роли для последующих рассуждений.

Пусть $\xi > 0$. Далее потребуется неравенство

$$\| t^s e^{-\sigma t} \|_{L_q} \leqslant \frac{c(\xi, s)}{(1 + |\sigma|)^{s+(1/q)}}, \quad \sigma \geqslant -\xi, \tag{14}$$

в котором постоянная $c\ (\xi, s)$ не зависит от вещественного $\sigma \geqslant -\xi$ и $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Докажем это неравенство в случае $q < \infty$. Для $-\xi \leqslant \sigma \leqslant 1$ оценка (14) очевидна, поэтому считаем $\sigma \geqslant 1$. Воспользовавшись формулой 3.381 из книги [5, с. 331], будем иметь

$$\| t^s e^{-\sigma t} \|_{L_q} \leqslant \left[\frac{\Gamma(qs+1)}{q^{qs+1}}\right]^{1/q} \frac{1}{\sigma^{s+(1/q)}},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Но согласно формуле 8.343 из книги [5, с. 954] $\Gamma(qs+1) \leqslant (qs+1)^{qs+1}$, откуда вытекает неравенство (14).

Лемма 3. *Пусть* $s = 0, 1, \ldots,$ *и*

$$[J_s^+(\rho)\, g](t) = \int\limits_t^1 (t-\tau)^s e^{\rho(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$[J_s^-(\rho)\, g](t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^s e^{-\rho(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$(J_s^0 g)(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^s g(\tau)\, d\tau, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

число $\xi > 0$, *а* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $\operatorname{Re}\rho > -\xi$

$$\| J_s^{\pm}(\rho) \|_{[L_p, H^{\nu}_{s+1}]} \leqslant c(\xi, s) \frac{(1+|\rho|)^{\nu}}{(1+|\operatorname{Re}\rho|)^{s+(1/p')}}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant s + (1/p'), \tag{15}$$

$$\| J_s^0 \|_{[L_p, H^{\nu}_{s+1}]} \leqslant c(s), \ \ 0 \leqslant \nu \leqslant s + (1/p'), \tag{16}$$

$$\Big\| \int\limits_0^t [J_s^{\pm}(\rho)\, g](\zeta)\, d\zeta \Big\|_{H_0^{\nu}} \leqslant c(\xi, s) \frac{(1+|\rho|)^{\nu-1}}{(1+|\operatorname{Re}\rho|)^{s+(1/p')}} \| g \|_{L_p}, \ \ 1/p' \leqslant \nu \leqslant 1, \tag{17}$$

$$\Big\| \int\limits_0^t (J_s^0 g)(\zeta)\, d\zeta \Big\|_{H_0^{\nu}} \leqslant c(s) \| g \|_{L_p}, \ \ 0 \leqslant \nu \leqslant 1, \tag{18}$$

причем в неравенствах (15)—(18) *постоянные* $c(\xi, s)$ *и* $c(s)$ *зависят лишь от параметров* ξ *и* s.

Доказательство проведем для преобразования $J_s^+(\rho)$, так как для преобразования $J_s^-(\rho)$ оно полностью аналогично, а для преобразования J_s^0 — значительно проще. Кроме того, отметим, что в силу тождества $\int\limits_0^t (J_s^0 g)(\zeta)\, d\zeta = (s+1)^{-1} (J_{s+1}^0 g)(t)$ из неравенства (16) вытекает неравенство (18).

Установим вначале неравенство (15) для целых значений $\nu = l$, полагая $l = \overline{0, s}$ в случае $p < \infty$ и $l = \overline{0, s+1}$ в случае $p = \infty$. Применяя неравенство Гельдера, имеем $\| [J_s^+(\rho)\, g](t) \|_{H^0} \leqslant \| t^s e^{-t \operatorname{Re}\rho} \|_{L_{p'}} \| g \|_{L_p}$, откуда и из оценки (14) получаем неравенство (15) при $\nu = 0$ и $s = 0, 1, \ldots$. Далее заметим, что

$$\frac{d^l}{dt^l} [J_s^+(\rho)\, g](t) = \sum_{v=0}^{l} \frac{l!\, s!}{(l-v)!\, v!\, (s-v)!} \rho^{l-v} [J_{s-v}^+(\rho)\, g](t), \quad l = \overline{0, s}, \tag{19}$$

и

$$\frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} [J_s^+(\rho)\, g](t) = -s!\, g(t) + \sum_{v=0}^{s} \frac{(s+1)!\, s!}{(s+1-v)!\, v!\, (s-v)!} \rho^{s+1-v} [J_{s-v}^+(\rho)\, g](t).$$

Из этих формул и неравенства (15), установленного при $\nu = 0$ и $s = 0, 1, \ldots,$ выводим оценки

$$\Big\| \frac{d^l}{dt^l} [J_s^+(\rho)\, g](t) \Big\|_{H_0} \leqslant c \| g \|_{L_p} \sum_{v=0}^{l} |\rho|^{l-v} \frac{1}{(1+|\operatorname{Re}\rho|)^{s-v+(1/p')}}, \ \ l = \overline{0, s},$$

и

$$\left\| \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} [J_s^+(\rho) g](t) \right\|_{L_\infty} \leqslant c \| g \|_{L_\infty} \frac{(1 + |\rho|)^{s+1}}{(1 + |\operatorname{Re}\rho|)^{s+1}},$$

из которых следует неравенство (15) для целых значений $\nu = l$. Отсюда согласно мультипликативному неравенству (3) получаем (15) для $0 \leqslant \nu \leqslant s$ в случае $p < \infty$ и для $0 \leqslant \nu \leqslant s + 1$ в случае $p = \infty$. Т. е. для $p = \infty$ неравенство (15) полностью установлено.

Пусть теперь $0 \leqslant t < t + \delta \leqslant 1$, а $p < \infty$. Тогда

$$[J_0^+(\rho) g](t + \delta) - [J_0^+(\rho) g](t) = (1 - e^{-\delta\rho}) [J_0^+(\rho) g](t + \delta) - \int_t^{t+\delta} e^{\rho(t-\tau)} g(\tau) d\tau,$$

и так как $| 1 - e^{-\delta\rho} | \leqslant c\delta^{1/p'} |\rho|^{1/p'}$ и

$$\left| \int_t^{t+\delta} e^{\rho(t-\tau)} g(\tau) d\tau \right|_m \leqslant \delta^{1/p'} e^{\delta\xi} \| g \|_{L_p}, \ \operatorname{Re}\rho > -\xi,$$

то из неравенства (15), установленного для $\nu = 0$ и $s = 0$, получаем это же неравенство, но для $\nu = 1/p'$ и $s = 0$. Применяя теперь мультипликативное неравенство (3), выводим (15) в случае $s = 0$. Итак, неравенство (15) доказано для $0 \leqslant \nu \leqslant 1/p'$ и всех $s=0, 1, \ldots$, откуда и из формулы (19) получаем оценку

$$\left\| \frac{d^s}{dt^s} [J_s^+(\rho) g](t) \right\|_{H_0^\nu} \leqslant c \| g \|_{L_p} \sum_{v=0}^{s} |\rho|^{s-v} \frac{(1 + |\rho|)^\nu}{(1 + |\operatorname{Re}\rho|)^{s-v+(1/p')}},$$

$$0 \leqslant \nu \leqslant 1/p',$$

из которой и следует неравенство (15) для $s \leqslant \nu \leqslant s + (1/p')$. Тем самым неравенство (15) полностью доказано.

Отметим, что неравенство (17) достаточно установить для $|\rho| \geqslant 1$, так как для $|\rho| \leqslant 1$ это неравенство просто следует из оценки (15), если положить в ней $\nu = 0$. При выводе неравенства (17) потребуется формула

$$\int_0^t [J_s^+(\rho) g](\zeta) d\zeta = \int_0^1 [J_s^+(\rho) g](\zeta) d\zeta + \sum_{v=0}^{s-1} \frac{(-1)^v s!}{\rho^{v+1}(s-v)!} [J_{s-v}^+(\rho) g](t) +$$

$$+ \frac{(-1)^s s!}{\rho^{s+1}} [J(\rho) g](t), \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

где

$$[J(\rho) g](t) = \int_t^1 (e^{\rho(t-\tau)} - 1) g(\tau) d\tau,$$

причем при $s = 0$ сумма в правой части равенства (20) отсутствует. Первое слагаемое в правой части равенства (20) является постоянной, поэтому величина его не влияет на оценку полунормы H_0^ν функции, стоящей в левой части этого равенства. Полунормы H_0^ν функций, входящих в сумму из правой части (20), оцениваются согласно неравенствам (15), из которых вытекает, что для доказательства оценки (17) достаточно установить следующее соотношение:

$$\| [J(\rho) g](t) \|_{H_0^\nu} \leqslant c(\xi) \frac{(1 + |\rho|)^\nu}{(1 + |\operatorname{Re}\rho|)^{1/p'}} \| g \|_{L_p}, \quad 1/p' \leqslant \nu \leqslant 1. \tag{21}$$

Пусть $0 \leqslant t < t+\delta \leqslant 1$. Тогда из вида преобразования $J(\rho)$ имеем

$$[J(\rho)g](t+\delta) - [J(\rho)g](t) = \int_t^{t+\delta} (1 - e^{\rho(t-\tau)}) g(\tau)\, d\tau +$$

$$+ (1 - e^{-\delta\rho}) [J_0^+(\rho) g](t+\delta). \tag{22}$$

Так как $|1 - e^{\rho(t-\tau)}| \leqslant c\delta^{\nu-(1/p')} |\rho|^{\nu-(1/p')}$ при $t \leqslant \tau \leqslant t+\delta$ и $\operatorname{Re}\rho > -\xi$, то, применяя неравенство Гельдера, заключаем, что

$$\left| \int_t^{t+\delta} (1 - e^{\rho(t-\tau)}) g(\tau)\, d\tau \right|_m \leqslant c\delta^\nu |\rho|^{\nu-(1/p')} \| g \|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant c\delta^\nu \frac{|\rho|^\nu}{(1 + |\operatorname{Re}\rho|)^{1/p'}} \| g \|_{L_p},$$

если $1/p' \leqslant \nu \leqslant 1$. Но $|1 - e^{-\delta\rho}| \leqslant c\delta^\nu |\rho|^\nu$ при $\operatorname{Re}\rho > -\xi$. Поэтому, полагая в оценке (17) $\nu = s = 0$, получаем

$$|(1 - e^{-\delta\rho}) [J_0^+(\rho) g](t+\delta)|_m \leqslant c\delta^\nu \frac{|\rho|^\nu}{(1 + |\operatorname{Re}\rho|)^{1/p'}}.$$

Принимая во внимание эти оценки и тождество (22), приходим к неравенству (21). Тем самым лемма 3 доказана.

Далее оценки нормы преобразования $Q_r(\rho)$ будут установлены в областях

$$(\Xi_r)_\xi = \bigcup_{\rho_0 \in \Xi_r} \{\rho : |\rho - \rho_0| < \xi\}, \quad r = \overline{1, 2w^*}, \tag{23}$$

являющихся ξ (где число $\xi > 0$) окрестностями углов Ξ_r, на которые прямые $\{\rho : \operatorname{Re}\rho\omega_s^* = 0\}$, $s = \overline{1, w^*}$, разбивают комплексную ρ плоскость. Введем числа

$$d_s^* = \max\{d_k : \operatorname{Im}\omega_k/\omega_s^* = 0,\ k = \overline{1, w}\},\ s = \overline{1, w^*}. \tag{24}$$

Значит, число $d_s^* + 1$ равно максимальной собственной кратности неравных нулю характеристических чисел ω_k, расположенных на одной и той же прямой, проходящей через 0 и через ω_k^*, т. е. на прямой $\{\rho : \operatorname{Im}\rho/\omega_s^* = 0\}$.

При аргументе $\rho \in \mathbb{C}$ и параметре $1 \leqslant p \leqslant \infty$ зададим функцию

$$\varphi(\rho;\ p) = \sum_{s=1}^{w^*} \frac{|\rho|^{d_s^*}}{(1 + |\operatorname{Re}\rho\omega_s^*|)^{d_s^* + (1/p)}}. \tag{25}$$

В введенных обозначениях справедливо такое утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\xi > 0$, $\rho \in (\Xi_r)_\xi$ и $|\rho| \geqslant 1$. Тогда*

$$\| Q_r(\rho) \|_{[L_p, H_n^\mu]} \leqslant c(|\rho|^{\mu-n+1} \varphi(\rho;\ p') + |\rho|^{d_0-n+1}),\ 0 \leqslant \mu \leqslant n - (1/p), \tag{26}$$

где $d_0 + 1$ — собственная кратность характеристического числа 0, причем, если 0 не является характеристическим числом матрицы-функции $A(\lambda, 1)$, то слагаемого $|\rho|^{d_0-n+1}$ в правой части неравенства (26) нет. Постоянная c в неравенстве (26) зависит лишь от числа $\xi > 0$ и матриц $A_1, \ldots, A_n$, входящих в выражение (2).

Доказательство. По матричным коэффициентам $R_{h,k}$, входящим в разложение (4), построим матрицы

$$S_{h,l,k} = \frac{1}{h!} \sum_{s=0}^{d_k-h} \frac{1}{s!} \frac{d^s(\lambda^l)}{d\lambda^l} \bigg|_{\lambda=\omega_k} R_{d_k-s-h,k},\ h = \overline{0, d_k}. \tag{27}$$

Тогда из формул (4) и (11) следует представление

$$\frac{\partial^l B_k(\rho, t)}{\partial t^l} = e^{\rho\omega_k t}\rho^l \sum_{h=0}^{d_k} \rho^h t^h S_{h,l,k}, \ l = 0, 1, \ldots . \tag{28}$$

В случае характеристического числа $\omega_k = 0$ (т. е. $k = 0$) из равенства (27) имеем $S_{h,l,0} = (h!)^{-1} R_{d_0-l-h,0}$ при $l \leqslant d_0 - h$ и $S_{h,l,0} = 0$ при $l > d_0 - h$. Поэтому в данном случае представление (28) запишется в виде

$$\frac{d^l B_0(\rho, t)}{\partial t^l} = \rho^l \sum_{h=0}^{d_0-l} \rho^h t^h S_{h,l,0}, \ \ l = \overline{0, d_0}, \ \ \frac{\partial^l B_0(\rho, t)}{\partial t^l} = 0, \ l > d_0.$$

Воспользовавшись формулами (10) и определением преобразований $J_s^{\pm}(\rho)$ и J_s^0 введенных в лемме 3, получаем равенства

$$\frac{d^l}{dt^l}[Q_r(\rho) g](t) = \frac{\rho^l}{\rho^{n-1}} \sum_{h=0}^{d_0-l} \rho^h (J_h^0 S_{h,l,0} g)(t) +$$

$$+ \frac{\rho^l}{\rho^{n-1}} \sum_{k\in\Lambda_r^-} \sum_{h=0}^{d_k} \rho^h [J_h^- (-\rho\omega_k) S_{h,l,k} g](t) -$$

$$- \frac{\rho^l}{\rho^{n-1}} \sum_{k\in\Lambda_r^+} \sum_{h=0}^{d_k} \rho^h [J_h^+ (\rho\omega_k) S_{h,l,k} g](t), \quad l = \overline{0, n-1}, \tag{29}$$

причем при $l > d_0$ первого слагаемого в правой части этой суммы нет. Этого слагаемого нет также и в случае, когда нуль не является характеристическим числом матрицы-функции $A(\lambda, 1)$.

Из определений (7) и (23) множеств индексов $\Lambda_r^{\pm}$ и области $(\Xi_r)_\xi$ следует, что для всех точек $\rho \in (\Xi_r)_\xi$ при фиксированном индексе $r = \overline{1, 2\varpi^*}$ справедливы соотношения $\operatorname{Re}\rho\omega_k > -\xi$, если $k \in \Lambda_r^+$, и $-\operatorname{Re}\rho\omega_k > -\xi$, если $k \in \Lambda_r^-$. Учитывая эти соотношения, оценки (15), (16) при $0 \leqslant \nu \leqslant 1/p'$ и вид (25) функции $\varphi(\rho; p)$, из представления (29) выводим следующие неравенства:

$$\left\| \frac{d^l}{dt^l}[Q_r(\rho) g](t) \right\|_{H^\nu} \leqslant c(|\rho|^{l+\nu-n+1}\varphi(\rho; p') + |\rho|^{d_0-n+1}) \|g\|_{L_p},$$

$$0 \leqslant \nu \leqslant 1/p', \ \ l = \overline{0, n-1}. \tag{30}$$

Кроме того, так как для функции $x \in H^1$ справедливо равенство $\|x\|_{H_0^\nu} = \left\| \int_0^t x'(\zeta)\, d\zeta \right\|_{H_0^\nu}$, то полунорма H_0^ν функции (29) при значении индекса l оценивается через полунорму H_0^ν неопределенного интеграла от этой же функции, но при значении индекса $l+1$, а $l = \overline{0, n-2}$ при $n \geqslant 2$. Отсюда, учитывая сказанное при выводе неравенства (30) с заменой при этом оценок (15), (16) на оценки (17), (18), получаем неравенство, аналогичное неравенству (30), если в (30) заменить норму H^ν на полунорму H_0^ν и считать $1/p' \leqslant \nu \leqslant 1$, а индекс $l = \overline{0, n-2}$. Из этой оценки и неравенства (30) вытекает утверждение (26).

6. Основная теорема и следствия из нее. Оговорим теперь ограничения на функциональное возмущение $F(\rho)$. Далее считаем, что $F(\rho)$ представимо в виде

$$F(\rho) = \rho^{\beta_0} F_0(\rho) + \ldots + \rho^{\beta_q} F_q(\rho) \tag{31}$$

или $F(\rho)$ полиномиально зависит от ρ, т. е.

$$F(\rho)=F_0+\rho F_1+\dots+\rho^q F_q. \tag{32}$$

В равенстве (31) предполагается, что операторы $F_v(\rho)$ зависят от $\rho\in\Omega$, а Ω содержит сколь угодно большие по модулю числа; числа β_v вещественны, а ρ^{β_v} — некоторая фиксированная ветвь этой функции. На операторы $F_v(\rho)$, числа β_v и область Ω наложено следующее требование.

Условие $H(\chi, p)$. Найдется такая постоянная $c>0$, для которой $\|F_v(\rho)\|_{[H_n^{\gamma_v}, L_p]}\leqslant c$ при всех $\rho\in\Omega$ и некотором $p\in[1,\infty]$, причем вещественные числа β_v и γ_v, $v=\overline{0, q}$, удовлетворяют неравенствам $0\leqslant\gamma_v\leqslant\leqslant n-(1/p)$ и, если 0 является характеристическим числом матрицы-функции $A(\lambda, 1)$ с собственной кратностью d_0+1, то $\beta_v<n-d_0-1$, а для множества Ω справедливо соотношение

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\Omega}|\rho|^{\chi-n+1}\varphi(\rho;\,p')=0, \tag{33}$$

где число $\chi=\max\{\beta_v+\gamma_v: v=\overline{0, q}\}$, а функция $\varphi(\rho;\,p)$ задана формулой (25).

Из соотношения (33), участвующего в условии $H(\chi, p)$, следует, что число $\chi<n-(1/p)$.

В случае функционального возмущения (32) числа $\beta_v=v$ и поэтому условие $H(\chi, p)$ для него перепишется в виде: операторы $F_v\in[H^{\chi-v}, L_p]$, $v=\overline{0, q}$, а $q=[\chi]$, если 0 не является характеристическим числом матрицы-функции $A(\lambda, 1)$, и $q=\min\{[\chi], n-d_0-2\}$, если 0 является характеристическим числом $A(\lambda, 1)$ с собственной кратностью d_0+1. Здесь $[\chi]$ — целая часть числа χ, а χ в силу условия (33) (область Ω в данном случае равна $\mathbb{C}$) удовлетворяет неравенству $0\leqslant\chi<n-(1/p)$. Следовательно, для функционального возмущения (32), в отличие от (31), число χ из условия $H(\chi, p)$ всегда неотрицательно, а собственная кратность характеристического числа 0 (если такое имеется) матрицы-функции $A(\lambda, 1)$ меньше n, т. е. $d_0<n-1$. Существенность данных требований для сформулированной далее теоремы и ее следствий будет показана на примерах.

Постоянная c из условия $H(\chi, p)$ для функционального возмущения (32) равна $\max\{\|F_v\|_{[H^{\chi-v}, L_p]}: v=\overline{0, q}\}$.

Отметив, что при любом $\xi>0$ области $(\Xi_r)_\xi$, заданные равенствами (23) при $r=\overline{1, 2\omega^*}$, покрывают всю комплексную ρ плоскость, и положив число $\beta=\max\{\beta_v: v=\overline{0, q}\}<n-d_0-1$, сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть в уравнении* (1) *оператор* $F(\rho)$ *представим в виде* (31) *и удовлетворяет условию* $H(\chi, p)$, *а число* $\xi>0$. *Тогда найдется такое* $\varepsilon>0$ (*зависящее лишь от постоянных* c *из леммы* 4 *и условия* $H(\chi, p)$), *что для всех точек* $\rho\in\Omega\cap(\Xi_r)_\xi$, *для которых* $|\rho|>1$ *и* $|\rho|^{\chi-n+1}\varphi(\rho;\,p')<\varepsilon$, *а в случае, когда* 0 *является характеристическим числом* $A(\lambda, 1)$ *с собственной кратностью* d_0+1, *тогда и* $|\rho|^{\beta+d_0-n+1}<\varepsilon$, *оператор* $I+F(\rho)Q_r(\rho)$ *обратим в пространстве* L_p. *Этот оператор задает взаимно однозначное соответствие между решениями* $y(\rho;\,t)$ *уравнения* $A(d/dt, \rho)y(t)=0$ *и решениями* $x(\rho;\,t)$ *уравнения* (1) *по формуле*

$$x(\rho;\,t)=y(\rho;\,t)-Q_r(\rho)(I+F(\rho)Q_r(\rho))_{L_p}^{-1}F(\rho)y(\rho;\,t)+$$

$$+Q_r(\rho)(I+F(\rho)Q_r(\rho))_{L_p}^{-1}f(t), \tag{34}$$

в которой индекс L_p означает обратный оператор в L_p. Функция $x(\rho; t)$ по t принадлежит W_p^n и

$$\|x(\rho; t) - y(\rho; t)\|_{H_n^\mu} \leqslant c(|\rho|^{\mu-n+1}\varphi(\rho; p') + |\rho|^{d_0-n+1}) \times$$

$$\times (\|F(\rho) y(\rho; t)\|_{L_p} + \|f\|_{L_p}), \ 0 \leqslant \mu \leqslant n - (1/p), \tag{35}$$

причем, если 0 не является характеристическим числом матрицы-функции $A(\lambda, 1)$, то слагаемого $|\rho|^{d_0-n+1}$ в правой части неравенства (35) нет. Постоянная c в неравенстве (35) зависит лишь от числа ξ и матриц, входящих в выражение (2).

Доказательство проведем, полагая, что нуль является характеристическим числом $A(\lambda, 1)$, так как в противном случае оно несколько упрощается. Вначале установим обратимость оператора $I + F(\rho) Q_r(\rho)$ в пространстве L_p при указанных в формулировке теоремы значениях ρ. Исходя из представления (31), леммы 4 и условия $H(\chi, p)$, имеем

$$\|F(\rho) Q_r(\rho)\|_{[L_p]} = \sum_{v=0}^{q} |\rho|^{\beta_v} \|F_v(\rho)\|_{[H_n^{\gamma_v}, L_p]} \|Q_r(\rho)\|_{[L_p, H_n^{\gamma_v}]} \leqslant$$

$$\leqslant c(q+1)(|\rho|^{\chi-n+1}\varphi(\rho; p') + |\rho|^{\beta+d_0-n+1})$$

с постоянной $c > 0$, равной произведению постоянных из леммы 4 и условия $H(\chi, p)$. Полагая теперь в утверждении теоремы число $\varepsilon = 1/4c(q+1)$, получаем $\|F(\rho) Q_r(\rho)\|_{[L_p]} \leqslant 1/2$, а значит, оператор $I + F(\rho) Q_r(\rho)$ обратим в L_p при указанных в теореме значениях ρ, и для этих значений

$$\|(I + F(\rho) Q_r(\rho))_{L_p}^{-1}\| \leqslant 2. \tag{36}$$

Для установления соответствия (34) воспользуемся леммой. 2. Учитывая обратимость оператора $I + F(\rho) Q_r(\rho)$, из уравнения (13) находим функцию $g(t) = -(I + F(\rho) Q_r(\rho))^{-1} F(\rho) y(\rho; t) + (I + F(\rho) Q_r(\rho))^{-1} f(t)$, подставляя которую в равенство (12), приходим к соответствию (34). Согласно лемме 2 это соответствие задает любое решение уравнения (1). Покажем взаимную однозначность соответствия (34). Для этого достаточно установить, что нет ненулевого решения $y(\rho, t)$ уравнения $A(d/dt, \rho) y(t) = 0$, для которого формула (34) задает нулевое решение уравнения (1) с правой частью $f = 0$. Предположим противное. Тогда существует отличная от нуля функция $y(\rho; t) = [Q_r(\rho) g](t)$, где $g(t) = (I + F(\rho) Q_r(\rho))^{-1} F(\rho) y(\rho; t)$. Но согласно лемме 1 $g(t) = A(d/dt, \rho) y(\rho; t)$, а так как $y(\rho; t)$ — решение однородного уравнения $A(d/dt, \rho) y(\rho; t) = 0$, то $g = 0$, а значит, и $y(\rho; t) = 0$. А это противоречит предположению о неравенстве нулю функции $y(\rho; t)$, т. е. соответствие (34) взаимно однозначно.

Принадлежность функции $x(\rho; t)$ по t пространству W_p^n следует из леммы 1 и соответствия (34), а оценка (35) вытекает из соответствия (34), неравенства (36) и леммы 4.

Обсуждение утверждения теоремы проведем, сформулировав замечания к ней и получив из нее ряд следствий.

Замечание 1. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для множества точек ρ, указанного в утверждении этой теоремы, уравнение (1) с правой частью $f = 0$ имеет ровно mn линейно независимых решений $x_{h,j,k}(\rho; t)$, $h = \overline{0, d_{j,k}}$, $j = \overline{1, \alpha_k}$, $k = \overline{0, w}$. Эти mn линейно независимых решений можно получить, положив в соответствии (34) $f = 0$ и функции $y(\rho; t) = y_{h,j,k}(\rho t)$, где $y_{h,j,k}(t)$ определены формулами (6). В этом случае выражение $\|F(\rho) y(\rho; t)\|_{L_p}$ в правой части оценки (35) надо заменить на $(1 + |\rho|)^{\varkappa+h} \exp \operatorname{Re} \rho\omega_k$. Действительно, так как

$$\|y_{h,j,k}(\rho t)\|_{H^0} \leqslant c(1 + |\rho|)^h \exp \operatorname{Re} \rho\omega_k \quad \text{и} \quad y_{h,j,k}^{(l)}(t) = \sum_{s=0}^{l} \frac{l!}{(l-s)!\, s!} \omega_k^{l-s} \times$$

$\times y_{h-s,j,k}(t)$, причем $y_{s,j,k}(t)=0$ при $s<0$, то $\|y_{h,j,k}(\rho t)\|_{H^l}\leqslant c(1+|\rho|)^{l+h}\exp\operatorname{Re}\rho\omega_k$ для $l=0,1,\ldots$, поэтому согласно мультипликативному неравенству (3) $\|y_{h,j,k}(\rho t)\|_{H^\mu}\leqslant c(1+|\rho|)^{\mu+h}\exp\operatorname{Re}\rho\omega_k$ для всех $\mu\geqslant 0$, а значит, $\|F(\rho)y_{h,j,k}(\rho t)\|_{L_p}\leqslant c(1+|\rho|)^{\chi+h}\exp\operatorname{Re}\rho\omega_k$.

В дальнейшем оператор $F(\rho)$, заданный равенством (31) и удовлетворяющий условию $H(\chi, p)$, будет называться аналитически зависящим от $\rho\in\Omega$, если Ω — область, а функция $F(\rho)$, принимающая значения в $[H_n^\gamma, L_p]$, где неотрицательное число $\gamma=\max\{\gamma_v : v=\overline{0,q}\}\leqslant n-(1/p)$, является аналитической вектор-функцией в смысле определения из п.2.

Замечание 2. Пусть выполнены условия теоремы с оператором $F(\rho)$, аналитически зависящим от $\rho\in\Omega$, и решение $y(\rho; t)$ уравнения $A(d/dt, \rho)\,y(t)=0$ является аналитической по $\rho\in\Omega$ вектор-функцией со значениями по t в пространстве W_p^n. Тогда решения $x(\rho; t)$ уравнения (1), заданные по формуле (34), будут аналитически (как вектор-функции со значениями по t в W_p^n) зависеть от ρ, указанных в утверждении теоремы (т. е. для тех ρ, для которых справедливо соответствие (34)). Аналогичное замечание об аналитичности $x(\rho; t)$ относится и к случаю, когда правая часть f уравнения (1) аналитически, как вектор-функция со значениями по t в пространстве L_p, зависит от $\rho\in\Omega$, т. е. $f(t)=f(\rho; t)$.

3. Требование аналитичности $y(\rho;t)$ по t в замечании 2 можно ослабить на основании следующего утверждения: функция $y(\rho;t)$, являющаяся решением уравнения $A(d/dt,\rho)\,y(t)=0$, будет аналитической по $\rho\in\Omega$ вектор-функцией со значениями по t в W_p^n в том и только в том случае, когда найдутся такие аналитические по $\rho\in\Omega$, имеющие разве что полюс в нуле, числовые функции $c_{h,j,k}(\rho)$, для которых

$$y(\rho;t)=\sum_{k=0}^{w}\sum_{j=1}^{\alpha_k}\sum_{h=0}^{d_{j,k}} c_{h,j,k}(\rho)\,y_{h,j,k}(\rho t),$$

где функции $y_{h,j,k}(t)$ определены формулами (6).

Далее понадобится следующая простая лемма, имеющая, по-видимому, самостоятельный интерес. При формулировке ее используется определение: оператор $A\in[\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2]$ называется *нетеровым*, если $\mathfrak{R}(A)$ — подпространство, а $\operatorname{codim}\mathfrak{R}(A)<\infty$ и $\dim\mathfrak{Z}(A)<\infty$. Для нетерова оператора A конечно число $\operatorname{ind}A=\dim\mathfrak{Z}(A)-\operatorname{codim}\mathfrak{R}(A)$, называемое *индексом* A.

Лемма 5. *Выражение* $(\mathscr{L}x)(t)=x^{(n)}(t)+Ax^{(n-1)}(t)+(Fx)(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, *где матрица* $A\in[\mathbb{C}^m]$, *а оператор* $F\in[H^\gamma, L_p]$ *при* $0\leqslant\gamma<n-(1/p)$, *определяет нетеров оператор* $\mathscr{L}\in[W_p^n, L_p]$ *и* $\operatorname{ind}\mathscr{L}=mn$. *Уравнение* $(\mathscr{L}x)(t)=0$ *имеет конечное число, но не меньше* mn *линейно независимых решений. Число линейно независимых решений равно* mn *в том и только в том случае, когда уравнение* $(\mathscr{L}x)(t)=f(t)$ *разрешимо при любой правой части* $f\in L_p$.

Здесь, как и раньше, под решением уравнения $\mathscr{L}x=f$ понимается функция $x\in W_p^n$, удовлетворяющая этому уравнению.

Доказательство близко к рассуждениям из [6]. Выражение $(Dx)(t)=x^{(n)}(t)+Ax^{(n-1)}(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, определяет нетеров оператор $D\in[W_p^n, L_p]$ и $\operatorname{ind}D=mn$. Согласно утверждению 1 оператор F, рассмотренный как оператор из пространства W_p^n в пространство L_p, является вполне непрерывным, поэтому (см., например, [7, с. 300]) оператор $\mathscr{L}=D+F\in[W_p^n, L_p]$ и $\operatorname{ind}\mathscr{L}=mn$ Тем самым $\dim\mathfrak{Z}(\mathscr{L})=mn+\operatorname{codim}\mathfrak{R}(\mathscr{L})$, что в терминах уравнений $\mathscr{L}x=0$ и $\mathscr{L}x=f$ совпадает с двумя последними утверждениями леммы.

Второе утверждение леммы о числе линейно независимых решений уравнения $\mathscr{L}x=0$ следует из леммы 1 работы [8], если положить в ней $s=0$. Однако лемму 1 из [8] проще вывести, повторяя доказательство леммы 5.

З а м е ч а н и е 4. Лемма 5 непосредственно приложима к уравнению (1). В частности, если в условии $H(\chi, p)$ все числа $\gamma_v < n - (1/p)$ (что всегда выполняется в случае возмущения (32)), лемма 5 дает достаточное условие конечности числа линейно независимых решений однородного уравнения $\mathcal{L}(\rho)x = 0$ и необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (1) при любой правой части $f \in L_p$.

Согласно лемме 5 далее удобно использовать следующие определения. Точка $\rho_0 \in \Omega$ называется неособой (слабо особой или особой) точкой уравнения (1), если число линейно независимых решений одного уравнения $\mathcal{L}(\rho)x = 0$ при $\rho = \rho_0$ равно mn (конечно и больше mn или соответственно меньше mn, или равно бесконечности). Как показано в примере 5, по крайней мере при $p = \infty$ для уравнения (1) при выполнении условия $H(\chi, p)$ все эти случаи оказываются возможными. В замечании 4 приведено достаточное условие, когда уравнение (1) имеет лишь неособые или слабо особые точки. Выяснению вопроса о локализации этих слабо особых точек в случае аналитического возмущения $F(\rho)$ посвящены следующие три утверждения, вытекающие из теоремы.

С л е д с т в и е 1. *Пусть в уравнении* (1) *оператор* $F(\rho)$ *задан равенством* (31), *аналитичен в области* Ω *и удовлетворяет условию* $H(\chi, p)$ *с числами* $\gamma_v < n - (1/p)$. *Тогда все точки* $\rho \in \Omega$, *за исключением, может быть, не более счетного числа изолированных точек, являющихся слабо особыми, будут неособыми точками уравнения* (1). *Предельные значения слабо особых точек уравнения* (1) *могут находиться лишь на границе области* Ω *и в бесконечности.*

Для вывода следствия 1 из теоремы потребуется предложение, незначительно уточняющее (в последнем своем заключении) теорему 3.6 из обзора [9, с. 64] и получающуюся повторением рассуждений из [9].

У т в е р ж д е н и е 3. *Пусть* $\mathcal{L}(\rho)$ — *аналитически зависящая от* $\rho \in \Omega$ *функция со значениями в множестве нетеровых операторов из* $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$.

Тогда во всех точках $\rho \in \Omega$, *за исключением, быть может, не более счетного числа изолированных точек, целочисленная функция* $\dim \mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho))$ *принимает одно и то же значение, которое обозначим через* d. *В упомянутых изолированных точках* $\dim \mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho)) > d$ *и предельные значения этих изолированных точек могут находиться лишь на границе области* Ω *или в бесконечности.*

В ы в о д с л е д с т в и я 1. Согласно условиям следствия и лемме 5 выражение $\mathcal{L}(\rho) = A(d/dt, \rho) + F(\rho)$ определяет аналитически зависящую от $\rho \in \Omega$ функцию со значениями в множестве нетеровых операторов из $[W_p^n, L_p]$. По условию (33) множество точек $\rho \in \Omega$, удовлетворяющих неравенствам $|\rho| > 1$ и $|\rho|^{\chi-n+1}\varphi(\rho; p') < \varepsilon$, а также $|\rho|^{\beta+d_0-n+1} < \varepsilon$, если 0 является характеристическим числом $A(\lambda, 1)$, — открытое непустое множество, и на основании теоремы в каждой точке этого множества $\dim \mathfrak{Z}(\mathcal{L}(\rho)) = mn$. Отсюда и из утверждения 3 вытекает следствие.

З а м е ч а н и е 5. Пусть ненулевое $\rho_0 \in \Omega$ и оператор $F(\rho_0) \in [H_n^\gamma, L_p]$ при $0 \leqslant \gamma \leqslant n - (1/p)$, а оператор $I + F(\rho_0) Q_r(\rho_0)$ обратим в пространстве L_p. Тогда согласно лемме 2 и рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы, формула (34) задает взаимно однозначное соответствие между решениями $x(\rho; t)$ уравнения (1) и решениями $y(\rho; t)$ уравнения $A(d/dt, \rho) y(t) = 0$ при $\rho = \rho_0$. Если, кроме того, $F(\rho)$ — аналитическая оператор-функция со значениями в пространстве $[H^\gamma, L_p]$ и $0 \leqslant \gamma < n - (1/p)$, то с учетом утверждения 1 и леммы 1 можно показать, что $(I + F(\rho) Q_r(\rho))_{L_p}^{-1}$ — мероморфная оператор-функция в области Ω, имеющая конечномерные полюсы. В этих предположениях относительно $F(\rho)$ из лемм 2 и 5 следует утверждение: уравнение $\mathcal{L}(\rho)x = 0$ имеет больше, чем mn, линейно независимых решений для тех и только тех ненулевых ρ, в которых $(I + F(\rho) Q_r(\rho))_{L_p}^{-1}$ имеет полюс.

С л е д с т в и е 2. *Пусть в уравнении* (1) *оператор* $F(\rho)$ *задан равенством* (32) *и удовлетворяет условию* $H(\chi, p)$. *Тогда все точки* $\rho \in \mathbb{C}$, *за исключением, быть может, не более счетного числа изолированных точек, являющих-*

ся слабо особыми, будут неособыми точками уравнения (1). *Все слабо особые точки уравнения* (1) *с модулями большими, чем* $1/\varepsilon$, *принадлежат множеству* $\Psi(\chi, p', \varepsilon) = \{\rho : |\rho|^{\chi-n+1}\varphi(\rho; p') \geqslant \varepsilon\}$, *где число* ε *достаточно мало, и единственной их предельной точкой может быть бесконечность.*

Доказательство вытекает из теоремы и следствия 1, если заметить, что при выполнении условия $H(\chi, p)$ для возмущения (32) числа $\gamma_v = \chi - v < n - (1/p)$ и $v + d_0 - n + 1 < -1$ при $v = \overline{0, q}$.

В силу условия (33) $\chi < n - (1/p)$, поэтому для любого $\delta > 0$ существует такое $R_\delta > 0$, что все точки множества $\Psi(\chi, p', \varepsilon)$ с модулями большими R_δ принадлежат объединению $2w^*$ углов раствора $2\arcsin\delta$, причем каждые два из них, симметричных относительно начала координат, имеют вид $\{\rho : |\operatorname{Re}\rho\omega_s^*| < \delta|\rho|\}$, $s = \overline{1, w^*}$. Кроме того, если $\chi < n - d_s^* - 1$ при некотором s, то в соответствующих этому s двух углах $\{\rho : |\operatorname{Re}\rho\omega_s^*| < \delta|\rho|\}$ нет точек множества $\Psi(\chi, p', \varepsilon)$ с модулями большими, чем R_δ. В частности, отсюда и из определения (24) чисел d_s^* получаем утверждение.

Следствие 3. *Пусть операторы* $F_v \in [H^{\chi-v}, L_1]$ *при* $0 \leqslant \chi < n - 1 - \max\{d_k : k = \overline{0, w}\}$ и $v = \overline{0, q}$, *где* $q = [\chi]$. *Тогда у уравнения* (1) *с возмущением* $F(\rho)$, *заданным равенством* (32), *все точки* $\rho \in \mathbb{C}$ *за исключением, быть может, конечного числа слабо особых точек, —неособые.*

7. Примеры. Покажем существенность условий, наложенных в теореме и ее следствиях, на примерах, построенных, в основном, для случаев $m = 1$ и $n = 1$ или 2.

Пример 1. Для того чтобы уравнение (1) при возмущении (32) имело лишь конечное число слабо особых точек, в следствии 3 предполагалось, что $\chi < n - 1 - \max\{d_k : k = \overline{0, w}\}$. Покажем, что если $\chi = n - 1 - \max\{d_k : k = \overline{0, w}\}$, то число слабо особых точек может быть и бесконечным. При $-\infty < \tau < \infty$ введем функцию

$$\check{f}(\tau) = \frac{-4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\zeta}{2}} \frac{\sin\frac{\zeta+2\pi}{4}}{\zeta+2\pi} \sin^2\frac{\zeta}{8} e^{i\zeta\tau} d\zeta. \tag{37}$$

Так как $e^{-i\frac{\zeta}{2}}(\zeta+2\pi)^{-1}\sin\frac{\zeta+2\pi}{4}\sin^2\frac{\zeta}{8} \in L_2(-\infty, \infty)$ и

$$\left| e^{-i\frac{\zeta}{2}} \frac{\sin\frac{\zeta+2\pi}{4}}{\zeta+2\pi} \sin^2\frac{\zeta}{8} \right| \leqslant \begin{cases} ce^{|\operatorname{Im}\zeta|}, & \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0, \\ c, & \operatorname{Im}\zeta < 0, \end{cases}$$

то на основании теоремы Пэли — Винера [10, с. 26] носитель функции $\check{f}(\tau)$ принадлежит отрезку [0, 1]. Отсюда и из равенства (37), а также теоремы Планшереля имеем $f(\tau) \in L_2[0, 1]$ и

$$\int_0^1 f(\tau) e^{-i\zeta\tau} d\tau = -8e^{-i\frac{\zeta}{2}} \frac{\sin\frac{\zeta+2\pi}{4}}{\zeta+2\pi} \sin^2\frac{\zeta}{8}.$$

Нулями функции, стоящей в правой части этого равенства, являются точки $\zeta_{2s} = 8\pi s - 2\pi$, $s = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $\zeta_{2s+1} = 8\pi s$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем нули в точках $8\pi s$ двукратные. Кроме того, значение этой функции в точке $\zeta_0 = -2\pi$ равно 1. Тем самым, справедливы следующие соотношения:

$$\int_0^1 f(\tau) e^{-i(8\pi s - 2\pi)\tau} d\tau = 0, \quad s = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{38}$$

$$\int_0^1 f(\tau) e^{-i8\pi s\tau} d\tau = 0, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{39}$$

$$\frac{d}{d\zeta} \int_0^1 f(\tau) e^{-i\zeta\tau} d\tau \Big|_{\zeta=8\pi s} = -i \int_0^1 f(\tau) \tau e^{-i8\pi s\tau} d\tau = 0, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{40}$$

$$\int_0^1 f(\tau) e^{i2\pi\tau} d\tau = 1. \tag{41}$$

Для функции $x \in H^0$ определим оператор

$$(Fx)(t) = (2\pi)^2 e^{i2\pi t} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i8\pi st} \int_0^1 f(\tau) x(\tau) e^{-i8\pi s\tau} d\tau \tag{42}$$

и покажем, что $F \in [H^0, L_2]$, а значит, и $F \in [H^0, L_1]$. Действительно, так как $\exp i(8\pi s + 2\pi)t$ и $\exp i8\pi st$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, — ортонормированные системы в L_2, а функция $f \in L_2$, то

$$\| Fx \|_{L_2} = (2\pi)^2 \Big(\sum_{s=-\infty}^{\infty} \Big| \int_0^1 f(\tau) x(\tau) e^{-i8\pi s\tau} d\tau \Big|^2 \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^2 \Big(\int_0^1 | f(\tau) x(\tau) |^2 d\tau \Big)^{1/2} \leqslant (2\pi)^2 \| f \|_{L_2} \| x \|_{H^0},$$

т. е. $F \in [H^0, L_2]$. Исходя из вида (42) оператора F и соотношений (38) и (41), получаем

$$F e^{i(8\pi s + 2\pi)t} = (2\pi)^2 e^{i(8\pi s + 2\pi)t}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{43}$$

а из соотношений (39) и (40) —

$$F e^{i8\pi st} = 0, \quad F t e^{i8\pi st} = 0, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$x''(t) - i2\rho x'(t) - \rho^2 x(t) + (Fx)(t) = 0, \tag{45}$$

в котором оператор F задан равенством (42). Чтобы записать это уравнение в виде (1), надо положить $A(\lambda, \rho) = \lambda^2 - i2\lambda\rho - \rho^2 = (\lambda - i\rho)^2$. Функции $e^{i(8\pi s + 2\pi)t}$ являются решениями уравнения $A(d/dt, 8\pi s) x(t) = -(2\pi)^2 x(t)$ при $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а функции $e^{i8\pi st}$ и $te^{i8\pi st}$ являются решениями уравнения $A(d/dt, 8\pi s) x(t) = 0$ при $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Поэтому согласно равенствам (43) и (44) функции $e^{i(8\pi s + 2\pi)t}$, $e^{i8\pi st}$ и $te^{i8\pi st}$ будут решениями уравнения (45) при $\rho_s = 8\pi s$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тем самым показано, что уравнение (45) имеет не меньше трех линейно независимых решений в счетном числе точек ρ_s, стремящихся к бесконечности. Для уравнения (45) функция $A(\lambda, 1) = (\lambda - i)^2$ имеет один двукратный корень i, значит, $d_1 = d_1^* = 1$, а так как $F \in [H^0, L_2]$, то $\chi = 0$, т. е. в данном случае $\chi = n - d_1^* - 1 < n - (1/2)$. Поэтому уравнение (45) не удовлетворяет следствию 3, а удовлетворяет следствию 2, на основании которого точки $\rho_s = 8\pi s$ являются слабо особыми точками этого уравнения, причем для него функция $|\rho|^{\chi - n + 1} \varphi(\rho; p') = (1 + |\operatorname{Im} \rho|)^{-3/2}$, т. е. все слабо особые точки находятся в полосе $\{\rho : |\operatorname{Im} \rho| < c\}$, где c достаточно велико. Полученные для уравнения (45) выводы показывают существенность условия $\chi < n - 1 - \max\{d_k : k = \overline{0, w}\}$ в следствии 3 и точность указанного в следствии 2 множества локализации слабо особых точек.

Пример 2. Существует такой оператор $F \in [H^\gamma, L_p]$ при произвольном $\gamma \in (1/p', 1)$, когда $1 \leqslant p < \infty$, и $F \in [H_1^1, L_\infty]$, что уравнение $x' +$

$+ Fx = 0$ имеет бесконечное число линейно независимых решений $x \in H_1^1$.

Пусть τ_s, $s = 0, 1, \ldots$, — монотонно убывающая последовательность, стремящаяся к нулю, $\tau_0 = 1$ и $\sum_{s=0}^{\infty} \tau_s^{\nu} < \infty$ при всех $\nu > 0$. Введем оператор

$$(Fx)(t) = -\frac{x(\tau_s) - x(\tau_{s+1})}{\tau_s - \tau_{s+1}}, \quad \tau_{s+1} < t \leqslant \tau_s, \quad s = 0, 1, \ldots . \tag{46}$$

Так как для произвольного $p \in [1, \infty)$

$$\|(Fx)(t)\|_{L_p} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|x(\tau_s) - x(\tau_{s+1})|}{(\tau_s - \tau_{s+1})^{1/p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{s=0}^{\infty} (\tau_s - \tau_{s+1})^{\gamma - (1/p')}\right) \sup_s \frac{|x(\tau_s) - x(\tau_{s+1})|}{(\tau_s - \tau_{s+1})^{\gamma}},$$

то оператор $F \in [H^{\gamma}, L_p]$ при произвольном $\gamma \in (1/p', 1)$ и $p \in [1, \infty)$. Кроме того, очевидно включение $F \in [H_1^1, L_\infty]$. Выберем теперь последовательности $x(\tau_s)$, $s = 0, 1, \ldots$, удовлетворяющие условию

$$\sup_s \frac{|x(\tau_s) - x(\tau_{s+1})|}{\tau_s - \tau_{s+1}} < \infty. \tag{47}$$

Формула

$$x(t) = \frac{x(\tau_s) - x(\tau_{s+1})}{\tau_s - \tau_{s+1}}(t - \tau_s) + x(\tau_s), \quad \tau_{s+1} \leqslant t \leqslant \tau_s, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{48}$$

определяет кусочно-линейные функции, для которых $x(0) = \lim_{s \to \infty} x(\tau_s)$, причем этот предел существует в силу условия (47). Кроме того, согласно лемме 3.2 из книги [2, с. 271] и условия (47) функции (48) принадлежат пространству H_1^1. Из вида (46) и (48) оператора F и функций x убеждаемся, что эти функции являются решениями уравнения $x' + Fx = 0$. Но указанное семейство функций (48) при условии (47) содержит сколь угодно большое число линейно независимых функций.

Пример 3. Существует такой оператор F, определенный на всех абсолютно непрерывных функциях, и $F \in [H^{\gamma}, L_p]$ при произвольном $\gamma \in (1/p', 1)$, когда $1 \leqslant p < \infty$, а также $F \in [H_1^1, L_\infty]$, что уравнение $x' + Fx = 0$, где искомая функция x абсолютно непрерывна, имеет лишь нулевое решение.

Пусть τ_s — та же последовательность чисел, что и в примере 2. Так как $e^{\tau_s} - e^{\tau_{s+1}} \geqslant e(\tau_s - \tau_{s+1})$, то, как и в примере 2, устанавливается, что оператор

$$(F_1 x)(t) = -e^{\tau_s} \frac{x(\tau_s) - x(\tau_{s+1})}{e^{\tau_s} - e^{\tau_{s+1}}}, \quad \tau_{s+1} < t \leqslant \tau_s, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{49}$$

принадлежит множеству $[H^{\gamma}, L_p]$ при произвольном $\gamma \in (1/p', 1)$ и $p \in [1, \infty)$, а также $F_1 \in [H_1^1, L_\infty]$. Положим оператор $Fx = -x + F_1 x$, который принадлежит тем же множествам операторов, что и оператор F. Если абсолютно непрерывная функция x является решением уравнения

$$x'(t) + (Fx)(t) \equiv x'(t) - x(t) + (F_1 x)(t) = 0, \tag{50}$$

то $x(t) = a_s e^t + b_s$ при $\tau_{s+1} < t \leqslant \tau_s$, т. е. $a_s e^{\tau_s} + b_s = x(\tau_s)$ и $a_s e^{\tau_{s+1}} + b_s = x(\tau_{s+1})$, а значит,

$$x(t) = \frac{x(\tau_s) - x(\tau_{s+1})}{e^{\tau_s} - e^{\tau_{s+1}}} e^t + \frac{x(\tau_{s+1}) e^{\tau_s} - x(\tau_s) e^{\tau_{s+1}}}{e^{\tau_s} - e^{\tau_{s+1}}}$$

при $\tau_{s+1} < t \leqslant \tau_s$, $s = 0, 1, \ldots$. Подставляя это решение в уравнение (50) с учетом вида (49) оператора F_1, заключаем, что $x(\tau_s) = 0$, т. е. $x(t) = 0$. Тем самым, уравнение (50) не имеет абсолютно непрерывных решений, отличных от нулевого.

Примеры 2 и 3 показывают, что в лемме 5 (а значит, и в следствиях 1—3) число γ (соответственно χ) нельзя считать больше $n - (1/p)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и равным n при $p = \infty$, так как тогда уравнение $x' + Fx = 0$ может иметь как бесконечное число линейно независимых решений, так и лишь равное нулю решение. Отметим, что для $p = \infty$ существуют и более простые примеры операторов $F_1 x = -x'$ и $F_2 x = -x' + x$, принадлежащих $[H_1^1, L_\infty]$, для которых уравнение $x' + F_1 x = 0$ имеет бесконечное число линейно независимых решений, а уравнение $x' + F_2 x = 0$ не имеет отличного от нуля решения $x \in H_1^1$.

В связи с примерами 2 и 3 и леммой 5 возникает такая задача.

Задача. Существуют ли такие операторы $F \in [H^{1-(1/p)}, L_p]$ при $1 \leqslant p < \infty$, для которых уравнение $x' + Fx = 0$ относительно функции $x \in W_p^1$ имеет: а) бесконечное число линейно независимых решений; б) лишь нулевое решение?

Пример 4. Введем операторы

$$(F_l x)(t) = -\sum_{s=1}^{r} (i2\pi s)^l e^{i2\pi st} \int_0^1 x(\tau)\, e^{-i2\pi s\tau} d\tau, \quad l = 1, 2,$$

которые принадлежат множеству $[H^0, H^0]$, а значит, и $[H^\gamma, L_p]$ для всех $\gamma \geqslant 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Уравнения $x' + F_1 x = 0$ и $x'' + F_2 x = 0$ имеют ровно $r + 1$ линейно независимых решений, принадлежащих соответственно пространствам W_1^1 и W_1^2. Отметим, что уравнение $x'' + F_2 x = 0$ записывается в виде (1) с $A(\lambda, \rho) = \lambda^2$, и для возмущения F_2 в условии $H(\chi, p)$ не выполнено лишь требование $\beta_v < n - d_0 - 1$ или, что то же самое, $d_0 < n - 1$, так как в данном случае возмущение имеет вид (32) с числом $q = 0$. Аналогичные примеры о существенности требований из условия $H(\chi, p)$ легко построить и в случае, когда $A(\lambda, \rho)$ зависит от ρ. Для этого достаточно рассмотреть, например, уравнение

$$\left(\frac{d}{dt} + \rho\right)(x' + F_1 x) \equiv x'' + \rho x' + G_1 x + \rho F_1 x = 0$$

или

$$\left(\frac{d}{dt} + \rho\right)(x'' + F_2 x) = x''' + \rho x'' + G_2 x + \rho F_2 x = 0,$$

где F_l — введенные здесь операторы, а операторы $(G_l x)(t) = \dfrac{d}{dt}(F_l x)(t)$, $l = 1, 2$, также принадлежат множеству $[H^0, H^0]$. Эти уравнения при каждом ρ имеют не меньше $r + 1$ решения.

Пример 5. Уравнение $x'' + \rho^2 x - x - \rho^{-4} x'' = 0$ имеет вид (1) при $A(\lambda, \rho) = \lambda^2 + \rho^2$ и $F(\rho) x = -x - \rho^{-4} x''$ и для него точки $\rho_s = \exp(i\pi s/2)$ являются существенно особыми точками, причем в точках ρ_0 и ρ_2 это уравнение имеет бесконечное число решений, а точках ρ_1 и ρ_3 лишь нулевое решение. Остальные точки $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \setminus \{\rho_s\}$ являются неособыми. Это уравнение в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ удовлетворяет требованиям следствия 1, за исключением лишь условия $\gamma_v < n - (1/p)$, так как для него $\gamma_v = n$, а $p = \infty$.

Утверждения (34) и (35) теоремы дают возможность построить и оценить характеристический определитель и оператор Грина краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения (1) в точках ρ, принадлежащих множеству, указанному в утверждении этой теоремы. Причем, если, например, число $\chi < n - 1 - \max\{d_k : k = \overline{0, \varpi}\}$, то это множество содержит все достаточно большие по модулю числа из множества Ω (как это было в следствии 3). Отметим, что когда оператор $F(\rho)$ имеет в определенном смысле асимптотическое разложение по ρ, то из формулы (34) выводится асимптотическое разложение по ρ решения $x(\rho; t)$ уравнения (1) (именно для этого прослежена зависимость констант в лемме 4 и теореме). Результаты работы близки к соответствующим утверждениям для обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. когда

$$[F(\rho)x](t) = \sum_{v=0}^{n-1} f_v(\rho; t)\, x^{(v)}(t),$$

где $f_v(\rho; t)$ — функции (см., например, [11—13]). Они содержат оценку в норме пространства Гельдера из теоремы 1 работы [14]; из них также можно получить ряд утверждений статьи [8], сведя основное уравнение из [8] к уравнению (1). Однако для усиления результатов статьи [8] целесообразно обобщить построения данной работы.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.— 400 с.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит. 1962.— 830 с.
4. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.— Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.— 416 с.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Наука, 1971.— 1108 с.
6. *Рахматулина Л. Ф.* Линейные функционально-дифференциальные уравнения: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Киев, 1982.— 24 с.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
8. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 11.— С. 1460—1469.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук.— 1957.— 12, № 2.— С. 43—118.
10. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области.— М. : Наука, 1964.— 268 с.
11. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды.— Петроград: Типография Фроловой, 1917.— 308 с.
12. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла.— М. : Наука, 1964.— 462 с.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 526 с.
14. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения.— 1991.— 27, № 3.— С. 384—396.

Получено 12.03.91