УДК 512.64

В. М. Петричкович

Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц

Рассмотрен вопрос факторизации многочленных матриц над произвольным полем в связи с их приводимостью полускалярными эквивалентными преобразованиями к треугольному виду с инвариантными множителями на главной диагонали. В частности, установлен критерий представимости многочленной матрицы в виде произведения множителей, первый из которых унитальный, произведение канонических диагональных форм которых равно канонической диагональной форме заданной матрицы. Предложен также метод построения таких факторизаций.

Розглянуто питання факторизації многочленних матриць над довільним полем в зв'язку з їх звідністю півскалярними еквівалентними перетвореннями до трикутного вигляду з інваріантними множниками на головній діагоналі. Зокрема, встановлено критерій зображення

© В. М. ПЕТРИЧКОВИЧ, 1990

многочленної матриці у вигляді добутку множників, перший із яких унітальний, добуток канонічних діагональних форм яких дорівнює канонічній діагональній формі заданої матриці. Запропоновано також метод побудови таких факторизацій.

Пусть P — произвольное поле, $P[x]$ — кольцо многочленов над P, P_n и $P_n[x]$ — кольца $n \times n$-матриц над P и $P[x]$ соответственно. Через $\mu_k^A(x)$ будем обозначать k-й инвариантный множитель матрицы $A(x) \in P_n[x]$, через $D^A(x)$ — каноническую диагональную форму $A(x)$, т. е. $D^A(x) = U(x) A(x) V(x) = \operatorname{diag}(\mu_1^A(x), \dots, \mu_n^A(x))$, $\mu_i^A(x) \mid \mu_{i+1}^A(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, для некоторых матриц $U(x)$, $V(x) \in GL_n(P[x])$. Матрицы $A(x)$, $B(x) \in P_n[x]$ называются полускалярно эквивалентными, если существуют матрицы $Q \in GL_n(P)$ и $R(x) \in GL_n(P[x])$ такие, что $B(x) = QA(x) R(x)$ [1].

В настоящей работе рассматривается вопрос факторизации многочленных матриц $A(x) \in P_n[x]$ в связи с их приводимостью полускалярными эквивалентными преобразованиями к специальному треугольному виду. В частности, устанавливается критерий представимости $A(x)$ в виде произведения $A(x) = B(x) C(x)$, где $B(x) = Ex^s + B_1x^{s-1} + \dots + B_s$, E — единичная матрица и $D^B(x) D^C(x) = D^A(x)$, а также предлагается метод построения таких факторизаций. В случае, когда P — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, такого типа факторизации многочленных матриц изучались в работах [2, 3].

Теорема 1. *Пусть* $A_1(x)$, $A_2(x), \dots, A_k(x)$ — *набор матриц из* $P_n[x]$, *причем* $\Delta_i(x) = \det A_i(x) \not\equiv 0, i = 1, \dots, k$. *Пусть* P' — *поле разложения многочленов* $\Delta_i(x)$, *т. е.* $\Delta_i(x) = \prod_{j=1}^{r_i} (x - \alpha_{ij})^{l_{ij}}$, $i = 1, \dots, k$, $\alpha_{ij} \in P'$. *Если* $\sum_{i=1}^{k} r_i < |P|$, *где* $|P|$ — *мощность множества* P, *то существуют матрицы* $Q \in GL_n(P)$ *и* $R_i(x) \in GL_n(P[x])$ *такие, что*

$$F^{A_i}(x) = QA_i(x) R_i(x) = \left\| \begin{matrix} \mu_1^{A_i}(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}^{(i)}(x) & \mu_2^{A_i}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(i)}(x) & a_{n2}^{(i)}(x) & \dots & \mu_n^{A_i}(x) \end{matrix} \right\|, \quad (1)$$

$i = 1, \dots, k$, *где* $\mu_q^{A_i}(x) \mid a_{jq}^{(i)}(x)$, *и* $\deg a_{jq}^{(i)}(x) < \deg \mu_j^{A_i}(x)$, *если* $\deg \mu_j^{A_i}(x) > 0$, *и* $a_{jq}^{(i)}(x) \equiv 0$, *если* $\deg \mu_j^{A_i}(x) = 0$, *т. е.* $\mu_j^{A_i}(x) = 1$, $j, q = 1, \dots, n$, $j > q$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из работы [4].

Следствие 1. *Пусть* $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}$, $A_i \in P_n$, $\det A(x) \not\equiv 0$. *Если выполняется хотя бы одно из условий* а) $\deg \det A(x) < |P|$; б) $mn < |P|$; в) P — *бесконечное поле, то матрица* $A(x)$ *полускалярно эквивалентна треугольной матрице* $F^A(x)$ *вида* (1).

Пусть

$$F(x) = F_0 x^l + F_1 x^{l-1} + \dots + F_{l-1} x + F_l, \; F_i \in P_n, \; i = 1, \dots, l,$$

— треугольная матрица вида (1) с главной диагональю $\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, причем $\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i(x) = sn$. Через M_F будем обозначать матрицу

$$M_F = \begin{Vmatrix} F_0 & 0 & \dots & 0 \\ F_1 & F_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_s & F_{s-1} & \dots & F_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_l & F_{l-1} & \dots & F_{l-s} \end{Vmatrix}.$$

Л е м м а 1. *Матрица $F(x)$ правоэквивалентна (а значит, и полу лярно эквивалентна) унитальной матрице степени s, т. е. существует та матрица $R(x) \in GL_n(P[x])$, что $F(x)R(x) = Ex^s + B_1x^{s-1} + \dots +$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} M_F = (s+1)n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [5] показано, что каноническая треуго ная матрица Эрмита $B(x) = \| b_{ij}(x) \|_1^n = \sum_{i=0}^{l} B_i x^{l-1}$ правоэквивалентна у тальной матрице тогда и только тогда, когда $\deg \prod_{i=1}^{n} b_{ii}(x) = sn$, deg $\times \prod_{i=1}^{k} b_{ii}(x) \leqslant sk$, для всех $k = 1, 2, \dots, n$ и $\operatorname{rang} M_B = (s+1)n$, где — матрица вида (2). Так как в треугольной матрице $F(x)$ $\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i(x)$ $= sn$ и $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, то первые два условия выпол ются, и поэтому для правой эквивалентности $F(x)$ унитальной матрице статочно, чтобы $\operatorname{rang} M_F = (s+1)n$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что P — бесконечное поле.

Пусть $A(x)$, $B(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \not\equiv 0$ и $B(x)$ — левый делите $A(x)$, т. е.

$$A(x) = B(x)C(x).$$

Известно, что каноническая диагональная форма $D^B(x)$ матрицы $B(x)$ ляется делителем канонической диагональной формы $D^A(x)$ матрицы $A($ т. е. $D^A(x) = D^B(x)\Psi(x)$, где $\Psi(x) = \operatorname{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$ — некотор диагональная матрица. Возникает вопрос: когда $\Psi(x) = D^C(x)$?

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2. *Пусть имеет место соотношение* (3). *Если* $(\mu_i^A($ $\mu_n^B(x)) = \mu_i^B(x)$, $i = 1, \dots, n$, *то* $\Psi(x) = D^C(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании теоремы 1 существуют матри $Q \in GL_n(P)$ и $R_1(x)$, $R_2(x) \in GL_n(P[x])$ такие, что $QA(x)R_1(x) = F^A(x)$ $QB(x)R_2(x) = F^B(x)$ — треугольные матрицы вида (1). Тогда из (3) по чаем $QA(x)R_1(x) = QB(x)R_2(x)R_2^{-1}(x)C(x)R_1(x)$, т. е. $F^A(x) = F^B(x)\tilde{C}($ где $\tilde{C}(x) = R_2^{-1}(x)C(x)R_1(x)$, или в развернутом виде

$$\begin{Vmatrix} \mu_1^A(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(x) & \mu_2^A(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & \mu_n^A(x) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \mu_1^B(x) & 0 & \dots & 0 \\ b_{21}(x) & \mu_2^B(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & \mu_n^B(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \psi_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ c_{21}(x) & \psi_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(x) & c_{n2}(x) & \dots & \psi_n(x) \end{Vmatrix},$$

причем $\mu_j^A(x) \mid a_{ij}(x)$, $\mu_j^B(x) \mid b_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$. Так как $\mu_i^A(x) = \mu_i^B(x)\psi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, то из условий леммы следует $\left(\psi_j(x), \dfrac{\mu_i^B(x)}{\mu_j^B(x)}\right) = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$. Поэтому нетрудно убедиться, что в (4) $\psi_j(x) \mid c_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, и $\psi_j(x) \mid \psi_{j+1}(x)$, $j = 1, \ldots, n-1$, т. е. $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ — инвариантные множители матрицы $\widetilde{C}(x) = R_2^{-1}(x) C(x) R_1(x)$, а тем самым и матрицы $C(x)$, т. е. $\Psi(x) = D^C(x)$. Лемма доказана.

Пусть каноническая диагональная форма $D^A(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$ матрицы $A(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \not\equiv 0$ представима в виде произведения

$$D^A(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \operatorname{diag}(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)) = \Phi(x)\Psi(x), \tag{5}$$

где $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $\psi_i(x) \mid \psi_{i+1}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \deg \varphi_i(x) = sn$. На основании следствия 1 существуют матрицы $Q \in GL_n(P)$ и $R(x) \in GL_n(P[x])$ такие, что

$$F^A(x) = QA(x)R(x) = \begin{Vmatrix} \mu_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(x) & \mu_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & \mu_n(x) \end{Vmatrix}$$

матрица вида (1). Поскольку $\mu_j(x) \mid a_{ij}(x)$, $i,j = 1, \ldots, n$, $i > j$, то $F^A(x)$ представима в виде произведения

$$F^A(x) = H(x)\Psi(x), \tag{6}$$

где $H(x)$ — нижняя треугольная матрица с главной диагональю $\Phi(x)$.

Правыми элементарными операциями матрицу $H(x)$ приведем к виду (1), т. е. для некоторой матрицы $S(x) \in GL_n(P[x])$ матрица $H(x)S(x) = F(x)$ вида (1). Тогда из (6) получаем

$$F^A(x) = H(x)S(x)S^{-1}(x)\Psi(x) = F(x)K(x). \tag{7}$$

Пусть теперь $Q_1 \in GL_n(P)$ и $R_1(x) \in GL_n(P[x])$ — произвольные матрицы такие, что $Q_1A(x)R_1(x) = F_1^A(x)$ — матрица вида (1). Пусть, далее

$$F_1^A(x) = F_1(x)K_1(x), \tag{8}$$

где $F_1(x)$ — нижняя треугольная матрица вида (1) с главной диагональю $\Phi(x)$.

Лемма 3. *Если матрица $F(x)$ из соотношения (7) правоэквивалентна унитальной матрице, то и $F_1(x)$ из (8) правоэквивалентна унитальной матрице.*

Доказательство. Из соотношений (7) и (8) получим

$$F^A(x) = F(x)K(x) = F(x)S(x)\Psi(x) = \widetilde{F}(x)\Psi(x), \tag{9}$$

$$F_1^A(x) = F_1(x)K_1(x) = F_1(x)S_1(x)\Psi(x) = \widetilde{F}_1(x)\Psi(x), \tag{10}$$

$S(x)$, $S_1(x) \in GL_n(P[x])$. Очевидно, матрицы $F^A(x)$ и $F_1^A(x)$ полускалярно эквивалентны, т. е. $F_1^A(x) = Q_2F^A(x)R_2(x)$, $Q_2 \in GL_n(P)$, $R_2(x) \in GL_n(P[x])$. Нетрудно убедиться [6], что матрица $R_2(x)$ имеет вид

$$R_2(x) = \left\| \begin{matrix} r_{11}(x) & \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} r_{12}(x) & \ldots & \frac{\mu_n(x)}{\mu_1(x)} r_{1n}(x) \\ r_{21}(x) & r_{22}(x) & \ldots & \frac{\mu_n(x)}{\mu_2(x)} r_{2n}(x) \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r_{n1}(x) & r_{n2}(x) & \ldots & r_{nn}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Тогда из (9) и (10) имеем

$$\tilde{F}_1(x)\Psi(x) = Q_2\tilde{F}(x)\Psi(x)R_2(x). \tag{11}$$

Учитывая вид матрицы $R_2(x)$, получаем $\Psi(x)R_2(x) = \tilde{R}_2(x)\Psi(x)$, где $\tilde{R}_2(x) \in GL_n(P[x])$. Сокращая обе части равенства (11) на $\Psi(x)$, получаем $\tilde{F}_1(x) = Q_2\tilde{F}(x)\tilde{R}_2(x)$. Отсюда следует, что матрица $\tilde{F}_1(x)$, а тем самым и $F_1(x)$, правоэквивалентны унитальной матрице. Лемма доказанна.

Теорема 2. *Пусть каноническая диагональная форма $D^A(x)$ матрицы $A(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \not\equiv 0$ представима в виде произведения $D^A = \Phi(x)\Psi(x)$, где $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\sum_{j=1}^{n} \deg\varphi_j(x) = sn$ и $\Psi(x) = \operatorname{diag}(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$, $\psi_i(x) \mid \psi_{i+1}(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Матрица $A(x)$ допускает факторизацию*

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{12}$$

где $B(x) = Ex^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s$ и $D^B(x) = \Phi(x)$, $D^C(x) = \Psi(x)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} M_F = (s+1)n$, где $F(x) = \sum_{i=0}^{l} F_ix^{l-i}$ — матрица из соотношения (7), M_F — вида (2).

Доказательство. Достаточность. Пусть $\operatorname{rang} M_F = (s+1)n$. Тогда на основании леммы 1 существует матрица $T(x) \in GL_n(P[x])$ такая, что

$$L(x) = F(x)T(x) = Ex^s + L_1x^{s-1} + \ldots + L_s, \tag{13}$$

причем $\deg T(x) \leqslant s$, т. е. $T(x) = T_0x^s + T_1x^{s-1} + \ldots + T_s$. Приравнивая в (13) коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем, что $T_0, T_1, \ldots, T_s$ находятся как решение линейного матричного уравнения

$$M_F \left\| \begin{matrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_s \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E \end{matrix} \right\|.$$

Представляя (7) в виде $F^A(x) = F(x)T(x)T^{-1}(x)K(x) = L(x)T^{-1}(x)K(x)$, видим, что унитальная матрица $L(x)$ является левым делителем матрицы $F^A(x) = QA(x)R(x)$, а $B(x) = Q^{-1}L(x)Q$ — левым делителем матрицы $A(x)$, т. е. $A(x) = B(x)C(x)$, где $C(x) = Q^{-1}T^{-1}(x)K(x)$.

Необходимость. Пусть имеет место факторизация (12). На основании теоремы 1 существуют матрицы $Q_1 \in GL_n(P)$ и $R_1(x)$, $R_2(x) \in GL_n(P[x])$ такие, что $Q_1A(x)R_1(x) = F_1^A(x)$ и $Q_1B(x)R_2(x) = F_1^B(x)$ — треугольные матрицы вида (1) с главными диагоналями $D^A(x)$ и $\Phi(x)$ соответственно. Тогда из (12) получаем $Q_1A(x)R_1(x) = Q_1B(x)R_2(x)R_2^{-1}(x)C \times \times (x)R(x)$, или $F_1^A(x) = F_1^B(x)K_1(x)$. Так как $F_1^B(x)$ правоэквивалентна унитальной матрице, то на основании леммы 3 и матрица $F(x)$ из (7) правоэквивалентна унитальной матрице, т. е. $\operatorname{rang} M_F = (s+1)n$ (лемма 1). Теорема доказана.

Отметим, что в случае существования факторизация (12) матрицы $A(x)$, соответствующая факторизации (5) ее канонической диагональной формы $D^A(x)$, единственна [2, 7].

Из леммы 2 и теоремы 2 вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Пусть* $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, *где* $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, $\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i(x) = sn$ — *делитель канонической диагональной формы* $D^A(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$ *матрицы* $A(x) \in P_n[x]$, *т. е.* $D^A(x) = \Phi(x) \operatorname{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$. *Если* $(\mu_i(x), \varphi_n(x)) = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, *то существует левый унитальный делитель* $B(x)$ *матрицы* $A(x)$ *с канонической диагональной формой* $D^B(x) = \Phi(x)$ *в том и только том случае, если* $\operatorname{rang} M_F = (s+1)n$, *где* $F(x)$ — *матрица из соотношения* (7). *В случае существования унитарный делитель* $B(x)$ *с канонической диагональной формой* $D^B(x) = \Phi(x)$ *единственный.*

В заключение отметим, что если P — конечное поле, то сформулированные выше результаты справедливы для матриц $A(x) \in P_n[x]$, которые полускалярно эквивалентны треугольной матрице вида (1).

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977.— С. 61—66.
2. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977.— С. 52—61.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К. : Наук. думка, 1981.— 224 с.
4. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1987.— Вып. 26.— С. 13—16.
5. *Bell J. H.* Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrix equations // Amer. J. Math.— 1949.— **71**.— P. 249—256.
6. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1980.— Вып. 12.— С. 14—21.
7. *Боревич З. И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщ.— Тарту: Тарт. ун-т, 1976.— С. 19.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 28.04.88