УДК 512.553

Ю. А. Дрозд, Л. Ф. Чернова

О решетках над нетеровыми алгебрами

Для модулей без кручения над полупервичной нетеровой алгеброй доказывается аналог теоремы редукции для модулей над целозамкнутой областью целостности. Полученный результат конкретизируется для псевдобассовых и псевдонаследственных алгебр, а также применяется для изучения строения родов.

Для модулів без скруту над напівпервинною нетеровою алгеброю доводиться аналог теореми редукції для модулів над цілозамкненою областю цілосності. Здобутий результат конкретизується для псевдобасових та псевдоспадкових алгебр, а також застосовується до вивчення будови родів.

Цель настоящей работы — перенести некоторые результаты из теории родов целочисленных представлений (см. например, [1, 2]) на случай модулей над нетеровыми алгебрами, размерность Крулля которых больше единицы (кольцо A назовем нетеровой алгеброй, если его центр C нетеров и A является конечнопорожденным C-модулем). Формулировки результатов при этом усложняются (например, перестает быть верным то, что все модули, лежащие в одном роде, одновременно разложимы или неразложимы), однако, как известно, такое усложнение неизбежно вызывается спецификой многомерных колец. Образцом для такого переноса послужила «теорема редукции» для модулей без кручения над целезамкнутым нетеровым кольцом [3], которая в одномерном случае превращается в описание модулей над дедекиндовой областью.

Поскольку в доказательствах используется фактически нетеровость лишь одномерных локализаций, изложение ведется в несколько большей общности, т. е. для псевдонетеровых алгебр. В частности, отсюда следует распространение теоремы редукции на произвольные кольца Крулля.

Основная теорема в дальнейшем применяется к описанию строения модулей над специальными нетеровыми алгебрами: псевдобассовыми и такими, у которых для всех одномерных локализаций модули без кручения вполне разложимы. Кроме того, в заключительном пункте показано, как полученные результаты могут быть «глобализованы» для случая квазипроективных многообразий (отметим, что эти «глобальные» аналоги являются, по-видимому, новыми даже для кривых, т. е. одномерных многообразий).

1. Напомним, что коммутативное кольцо C называется псевдонетеровым, если для любого элемента $a \in C$ во множестве простых идеалов, содержащих a, есть лишь конечное число минимальных, причем для любого такого минимального $\mathfrak{p}$ кольцо $C_{\mathfrak{p}}$ нетерово [4]. Кольцо A назовем псевдонетеровой алгеброй, если его центр $C = C(A)$ — псевдонетерово кольцо, а для любого простого идеала $\mathfrak{p} \in C$ такого, что $ht\mathfrak{p} \geqslant 1$, кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ является конечнопорожденным $C_{\mathfrak{p}}$-модулем.

Далее всюду A обозначает полупервичную псевдонетерову алгебру, C—ее центр, P—множество простых идеалов высоты 1 кольца C. Обозначим через $\tilde{C}$ полное кольцо частных C (оно является прямой суммой полей частных колец $C/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ пробегает множество минимальных простых идеалов C). Тогда $\tilde{A} = A \otimes_C \tilde{C}$ является классическим кольцом частных A (в смысле Оре). A-модуль M назовем A-решеткой, если канонический гомоморфизм $\mu : M \to \tilde{M} = M \otimes_C \tilde{C}$ является мономорфизмом, причем в $\tilde{M}$ найдется конечнопорожденный A-подмодуль N такой, что $\operatorname{Im} \mu \subset N$. В этом случае отождествим M с $\operatorname{Im} \mu$, т. е. будем считать, что M — подмодуль в $\tilde{M}$. Если M является A-решеткой, то $\tilde{M}$ — конечнопорожденный модуль над полупростым артиновым кольцом $\tilde{A}$. Поэтому $\tilde{M} \simeq \bigotimes_{i=1}^{s} U_i^{m_i}$, где $U_1, \ldots, U_s$ — все попарно неизоморфные простые $\tilde{A}$-модули. Обозначим $r(M) = (m_1, \ldots, m_s)$. Если $r(N) = (n_1, \ldots, n_s)$, то будем писать $r(M) \gg r(N)$, если $m_i \geqslant n_i$, а из $n_i \neq 0$, следует, что $m_i > n_j$ для всех $i = 1, \ldots, s$.

Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал из C, обозначим $M(\mathfrak{p}) = M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$, $x(\mathfrak{p})$ — образ элемента $x \in M$ при каноническом отображении $M \to M(\mathfrak{p})$, $\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ и $\varphi(\mathfrak{p}) : M(\mathfrak{p}) \to N(\mathfrak{p})$—гомоморфизмы, индуцированные гомоморфизмом $\varphi : M \to N$.

Пусть X — конечное подмножество в P. Обозначим $\overline{X} = C \setminus U_{\mathfrak{p} \in P} \mathfrak{p}$ и

$M_X = \overline{X}^{-1}M$. Если $X \supset Y$, то определен канонический гомоморфизм $M_x \to M_Y$, так что можно построить модуль $\overline{M} = \varprojlim M_X$, где X пробегает все конечные подмножества в P. При этом модуль $\overline{M}$ естественно отождествляется с некоторым подмодулем в $\tilde{M}$, содержащим M. Заметим, что если C — область целостности, то $\overline{M} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} M_{\mathfrak{p}}$, кроме того, $M_{\mathfrak{p}} = \overline{M}_{\mathfrak{p}}$ для всех $\mathfrak{p} \in P$. Если $M = \overline{M}$, то решетку M назовем замкнутой. Легко видеть, что если A является решеткой, то для любой решетки M модуль $\overline{M}$ также является решеткой.

Сформулируем основную теорему статьи.

Теорема 1. *Пусть M и N — такие A-решетки, что $r(N) \ll r(M)$ и для любого $\mathfrak{p} \in P$ существует расщепимый мономорфизм $N_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$. Тогда существует такой мономорфизм $\varphi : N \to M$, что для любого $\mathfrak{p} \in P$ мономорфизм $\varphi_{\mathfrak{p}}$ расщепим. Если, кроме того, решетка N замкнута, то фактормодуль $M/\mathrm{Im}\,\varphi$ также является решеткой.*

Докажем вначале следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть C — полулокальное кольцо размерности 1. Тогда полугруппа A-решеток является полугруппой с сокращением, т. е. если M, N и N' — A-решетки, то из того, что $M \otimes N \simeq M \otimes N'$, следует $N \simeq N'$.*

Доказательство следует из [5].

Лемма 2. *Пусть C — локальное нетерово кольцо, M и N — конечнопорожденные A-модули и $\varphi : N \to M$ — расщепимый мономорфизм. Тогда если $\psi : N \to M$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(\mathfrak{p}) = \psi(\mathfrak{p})$, то ψ — также расщепимый мономорфизм.*

Доказательство. Отождествим M с $N \oplus L$, а φ с гомоморфизмом $N \to N \oplus L$, задаваемым матрицей $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть $\psi : N \to N \oplus L$ задается матрицей $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Тогда $\alpha(\mathfrak{p}) = 1$, так что $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_A M}$ и потому α обратим. Следовательно, если $\eta \in \mathrm{End}_A M$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ -\alpha^{-1}\beta & 1 \end{pmatrix},$$

то $\eta\psi = \varphi$. Отсюда ψ — расщепимый мономорфизм.

Лемма 3. *Пусть C — локальное нетерово кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, M — конечнопорожденный A-модуль, $\varphi : M \to M$. Тогда $\{a \in C \mid \varphi - a \cdot 1$ — необратим$\}$ состоит лишь из конечного числа классов смежности по модулю $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in B = \mathrm{End}_A M$. Модуль B является конечнопорожденным как C-модуль. Рассмотрим $\overline{B} = B/\mathfrak{m}B$, $\overline{B}$ является конечной алгеброй над $k = C/\mathfrak{m}$. Тогда $\varphi(\mathfrak{m}) \in \overline{B}$, а так как $\mathfrak{m}B \subset \mathrm{rad}\,B$, то обратимость φ равносильна обратимости $\varphi(\mathfrak{m})$. Рассмотрим теперь $f \in \mathrm{End}_k \overline{B}$, f — линейный оператор умножения на $\varphi(\mathfrak{m})$. Разность $\varphi(\mathfrak{m}) - a(\mathfrak{M})$ необратима тогда и только тогда, когда $f - a(\mathfrak{m})$ необратим. Но это означает, что $a(\mathfrak{m})$ является собственным числом оператора f. Значит, $\varphi(\mathfrak{m}) - a(\mathfrak{m})$ необратим лишь для конечного числа значений $a(\mathfrak{m})$, поэтому классов смежности по $\mathrm{mod}\,\mathfrak{M}$, для которых $\varphi - a \cdot 1$ необратим, конечное число.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{p}$ и I — идеалы кольца C, причем $I \not\subset \mathfrak{p}$, идеал $\mathfrak{p}$ прост и поле вычетов $k(\mathfrak{p})$ бесконечно. Тогда $|I + \mathfrak{p}/\mathfrak{p}| = \infty$.*

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что последнее утверждение следует из предыдущих. Действительно, так как $\mathrm{Im}\,\varphi \simeq N$, то $\mathrm{Im}\,\varphi$ — замкнутая решетка. Поэтому если $x \in M$, но $x \notin \mathrm{Im}\,\varphi$, то найдется $\mathfrak{p} \in P$ такой, что $x \notin \mathrm{Im}\,\varphi_{\mathfrak{p}}$. Тогда если $a \in C$ — неделитель нуля, то и $ax \notin$

$\notin \operatorname{Im} \varphi_{\mathfrak{p}}$, так как $\operatorname{Im} \varphi_{\mathfrak{p}}$ — прямое слагаемое в $M_{\mathfrak{p}}$, а потому $ax \notin \operatorname{Im} \varphi$. Следовательно, $M/\operatorname{Im} \varphi$ является C-модулем без кручения, а потому A-решеткой.

Пусть $\tilde{N} = \oplus_i U_i^{n_i}$, $\tilde{M} = \oplus_i U_i^{m_i}$ Выберем в каждом U_i решетку L_i и положим $N' = \oplus_i L_i^{n_i}$, $M' = \oplus_i L_i^{m_i}$. Тогда N' и M' являются решетками соответственно в $\tilde{N}$ и $\tilde{M}$, причем, домножая N и M на неделители нуля, можно считать, что $N' \supset N \supset cN'$ и $M' \supset M \supset cM'$ для некоторого неделителя нуля $c \in C$. Обозначим $X = \{\mathfrak{p} \in P \mid c \notin \mathfrak{p}\}$. Это множество конечно, а кольцо C_X полулокально. Из условия теоремы следует, что существует мономорфизм $\psi : N \to M$ такой, что ψ_X расщепим, т. е. $\psi_{\mathfrak{p}}$ расщепим для всех $\mathfrak{p} \in X$.

Положим $Y = \{\mathfrak{p} \in P \mid \psi_{\mathfrak{p}}$ — нерасщепим$\}$. Это множество также конечно. Для каждого $\mathfrak{p} \notin X$ и $i = 1, \ldots, s$ обозначим через $r_{i\mathfrak{p}}(\psi)$ наибольшее из таких чисел d, что $\operatorname{Im} \psi_{\mathfrak{p}}$ содержит прямое слагаемое модуля $M_{\mathfrak{p}}$, изоморфное $L_{i\mathfrak{p}}^d$. Очевидно, $r_{i\mathfrak{p}}(\psi) = n_i$ при $\mathfrak{p} \notin Y$. Если же $r_{i\mathfrak{p}}(\psi) = n_i$ для всех $\mathfrak{p}$ и i, то $\operatorname{Im} \psi_{\mathfrak{p}}$ содержит прямое слагаемое, изоморфное $N_{\mathfrak{p}}$, откуда следует, что $\psi_{\mathfrak{p}}$ расщепим. Поскольку множество пар $(\mathfrak{p}, i)$, для которых $r_{i\mathfrak{p}}(\psi) < n_i$, конечно, доказательство теоремы сводится к следующей лемме.

Лемма 5. *Пусть мономорфизм $\psi : N \to M$ и конечное подмножество $Y \subset P$ обладает свойствами:*

1) $Y \cap X = \varnothing$;

2) *$\psi_{\mathfrak{p}}$ расщепим при $\mathfrak{p} \notin Y$;*

3) *найдутся $\mathfrak{q} \in Y$ и индекс j такие, что $r_{i\mathfrak{p}}(\psi) < n_j$.*

Тогда существует мономорфизм $\psi' : N \to M$ такой, что $\psi'_{\mathfrak{p}}$ расщепим для всех $\mathfrak{p} \notin Y$, $r_{i\mathfrak{p}}(\psi') \geqslant r_{i\mathfrak{p}}(\psi)$ для всех $\mathfrak{p} \in Y$, причем $r_{j\mathfrak{q}}(\psi') > r_{j\mathfrak{q}}(\psi)$.

Доказательство. Обозначим $L = L_j$, $r = r_{j\mathfrak{q}}(\psi)$. Так как $n_j < m_j$, то существует расщепимый мономорфизм $\alpha : L \to M'$ такой, что $\operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \psi = 0$. Положим $\theta = c\alpha$ и будем рассматривать θ как гомоморфизм $L \to M$. Так как $M_Y = M'_Y$, а c обратим в C_Y, то θ_Y расщепим. Рассмотрим гомоморфизм $\eta = (\psi, \theta) : N \oplus L \to M$. Тогда η мономорфизм. Пусть $Z = X \cup \cup \{\mathfrak{p} \in P \mid \mathfrak{p} \notin Y$ и $\eta_{\mathfrak{p}}$ нерасщепим$\}$. Будем искать ψ' в виде $\psi + \theta\xi$, где $\xi : N \to L$, причем $\xi(\mathfrak{p}) = 0$ при $\mathfrak{p} \in Z \cup Y \setminus \{\mathfrak{q}\}$. Тогда $\psi'(\mathfrak{p}) = \psi(\mathfrak{p})$ при $\mathfrak{p} \in Z$, значит, $\psi'_{\mathfrak{p}}$ расщепим по лемме 2. Если $\mathfrak{p} \notin Y \cup Z$, то даже $\eta_{\mathfrak{p}}$ расщепим, тем более, и $\psi'_{\mathfrak{p}}$ расщепим. Заметим теперь, что неравенство $r_{i\mathfrak{p}}(\psi) \geqslant d$ означает, что существуют такие разложения $N_{\mathfrak{p}} \simeq L_{\mathfrak{p}}^d \oplus N_1$ и $M_{\mathfrak{p}} \simeq L_{\mathfrak{p}}^d \oplus M_1$, относительно которых ψ задается матрицей $\begin{pmatrix} \psi_0 & 0 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix}$, где ψ_0 — автоморфизм L^a, или, что то же, $\psi_0(\mathfrak{p})$ обратим. Поэтому при $\mathfrak{p} \in Y \setminus \{\mathfrak{q}\}$ или $i \neq j$ выполнено неравенство $r_{i\mathfrak{p}}(\psi') \geqslant r_{i\mathfrak{p}}(\psi)$.

Пусть теперь $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, $d = r$. Тогда в силу леммы 1 $N_1 \simeq L_{\mathfrak{p}}^{n_j - r} \oplus \oplus (\oplus_{i \neq j} L_{i\mathfrak{p}}^{n_i})$ и $M_1 \simeq M_{\mathfrak{p}}^{m_j - r} \oplus (\oplus_{i \neq j} L_{i\mathfrak{p}}^{m_i})$. Так как $\theta_{\mathfrak{p}}$ расщепим и $\operatorname{Im} \theta_{\mathfrak{q}} \cap \cap \operatorname{Im} \psi_{\mathfrak{q}} = 0$, $\theta_{\mathfrak{q}}$ задается столбцом (θ_k), в котором для некоторого $k > r$ элемент θ_k обратим. Пусть $\xi : N \to L$ — ограничение на N гомоморфизма $N' \to L$, задаваемого строкой $(0, \ldots, 0, \beta, 0, \ldots, 0)$, где $\beta : L \to L$ стоит на k-м месте. Тогда в матрице $\psi'_{\mathfrak{q}} = \psi_{\mathfrak{q}} + \theta_{\mathfrak{q}}\xi_{\mathfrak{q}}$ на месте с номером (kk) стоит элемент $\psi_{kk} + \theta_k\beta$, а все столбцы, кроме k-го, совпадают с соответствующими столбцами матрицы $\psi_{\mathfrak{q}}$. Если $k(\mathfrak{q})$ бесконечно, то в силу лемм 3 и 4 найдется $\beta \in C$ такой, что $\psi_{kk} + \theta_k\beta$ обратим, причем $\beta \in cI$, где I — пересечение всех $\mathfrak{p} \in Y \cup Z \setminus \{\mathfrak{q}\}$. Если же $k(\mathfrak{q})$ конечно, то $\mathfrak{q}$ — максимальный идеал и по китайской теореме об остатках найдется $\beta \in \operatorname{End} L$ такой, что $\beta \equiv 0 \pmod{cI}$ и $\beta \equiv \theta_k^{-1}(1-\psi_{kk}) \pmod{\mathfrak{q}}$, т. е. снова $\psi_{kk} + \theta_k\beta$ обратим. Следовательно, $r_{j\mathfrak{q}}(\psi') > r$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если $Kr\cdot\dim C = 1$, то построенная точная последовательность расщепляется и теорема 1 превращается в известный результат из теории целочисленных представлений [1]. В общем же случае, вообще говоря, построить расщепимую точную последовательность указанного вида невозможно даже в простейшем случае, когда $A = C$—регулярное нетерово кольцо, а M и N — проективные модули: хорошо известны примеры проективных неразложимых модулей M таких, что $\tilde{M} = A^n$, где $n > 1$. Это замечание относится, естественно, и к результатам следующих пунктов.

Замечание 2. На самом деле расщепимый мономорфизм $N_\mathfrak{p} \to \to M_\mathfrak{p}$ заведомо существует для всех $\mathfrak{p} \in P$, кроме, возможно, конечного числа (во всяком случае, для всех $\mathfrak{p} \notin X$, где X определяется, как в доказательстве теоремы 1).

2. Рассмотрим некоторые приложения теоремы 1.

Родом $g(M)$ решетки M назовем совокупность всех таких A-решеток N, что $M_\mathfrak{p} \simeq N_\mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p} \in P$. Суммой родов $g(M)$ и $g(N)$ назовем род $g(M \oplus N)$. Соответственно, род называется неразложимым, если все решетки этого рода неразложимы. Далее предположим для простоты, что $\bar{A}$ является решеткой (так будет, например, в важном частном случае, когда целое замыкание кольца C в $\tilde{C}$— конечнопорожденный C-модуль). Тогда в каждом роде содержится замкнутая решетка. Фиксируем ее и обозначим M (g). Очевидно, если решетки M и M' лежат в одном роде, то, $r(M) = r(M')$. Это общее значение обозначим $r(g)$. Род g назовем минимальным, если не существует разложения $g = g_1 + g_2$, в котором $r(g) \gg \gg r(g_2)$, т. е. в любом таком разложении найдется номер i, для которого i-я координата в $r(g)$ ненулевая, а в $r(g_1)$ — нулевая.

Обозначим через G множество неразложимых родов A-решеток.

Теорема 2. *Для любой A-решетки M существует точная последовательность решеток $0 \to N \to M \to L \to 0$, локализация которой по любому простому идеалу $\mathfrak{p} \in P$ расщепима, причем $N = \oplus_i N_i$, где каждая решетка N_i изоморфна $M(g_i)$ для некоторого $g_i \in G$, а $g(L)$—минимальный род.*

Доказательство. Очевидно, род $g(M)$ всегда можно представить в виде $g' + g''$, где g'' — минимальный род, причем $r(M) \gg r(g')$. Пусть $g' = \sum_i g_i$, где $g_i \in G$. Положим $N = \oplus_i M(g_i)$. Тогда к решеткам M и N применима теорема 1, т. е. существует точная последовательность $0 \to \to N \to M \to L \to 0$, расщепимая для всех $\mathfrak{p} \in P$, в которой L — также решетка. Поскольку $M_\mathfrak{p} \simeq (N \oplus L)_\mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p} \in P$, то $g(M) = g(N) + g(L)$, откуда $g(L) = g''$, что и требовалось доказать.

Надкольцом алгебры A назовем такое кольцо B, что $A \subset B \subset \tilde{A}$, причем В является A-решеткой. Алгебру A назовем ограниченной, если у нее есть максимальное надкольцо (необходимые и достаточные условия ограниченности см. [4]).

Следствие. *Пусть алгебра A ограничена и для любого $\mathfrak{p} \in P$ существует конечное число классов изоморфизма $A_\mathfrak{p}$-решеток. Тогда существует конечный набор замкнутых A-решеток $\mathfrak{X}$ такой, что все роды $g(X)$ при $X \in \mathfrak{X}$ неразложимы и различны и для любой A-решетки M существует точная последовательность решеток $0 \to N \to M \to L \to 0$, локализация которой по любому $\mathfrak{p} \in P$ расщепима, причем $N = \oplus_i N_i$, $N_i \in \mathfrak{X}$, род $g(L)$ минимален, причем $g(L) = \sum_i g(L_i)$, где L_i — различные решетки из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы (81.22) [6] можно показать, что при данных условиях A имеет конечное число неразложимых родов, так что достаточно положить $\mathfrak{X} = \{M(g) \mid g \in G\}$.

3. Кольцо A назовем псевдобассовым, если для любого простого идеала $\mathfrak{p} \in P$ кольцо $A_\mathfrak{p}$ бассово [7], т. е. $A_\mathfrak{p}$ и все его надкольца горенштейновы.

Теорема 3. *Пусть A — псевдобассово кольцо и M — некоторый A-модуль без кручения. Тогда существуют идеалы $I_1, \ldots, I_{k+1}$ и точная последовательность $0 \to \bigoplus_{i=1}^{k} I_i \to M \to L \to 0$, расщепимая для всякого простого идеала $\mathfrak{p} \in P$, в которой $g(L) = g(I_{k+1})$.*

Доказательство. Если A — псевдобассово, то для любого простого идеала $\mathfrak{p} \in P$ кольцо $A_\mathfrak{p}$ бассово. Поэтому, если $M_\mathfrak{p}$ — $A_\mathfrak{p}$-модуль без кручения, то из предложения 7.2 [8] следует, что $M_\mathfrak{p} = M_{1\mathfrak{p}} \oplus M_{2\mathfrak{p}}$, причем $M_{1\mathfrak{p}}$ — идеал, $r(M_{1\mathfrak{p}})$ не зависит от $\mathfrak{p}$ и $r(M_\mathfrak{p}) \gg r(M_{2\mathfrak{p}})$. Найдутся решетки L_i такие, что $\tilde{M} = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_2$, причем $r(L_1) = r(M_{1\mathfrak{p}})$. Обозначим $M' = L_1 \oplus L_2$, $S = \{\mathfrak{p} \in P \mid M_\mathfrak{p} \neq M'_\mathfrak{p}\}$. Тогда найдутся такие решетки $N_i \subset \tilde{L}_i$, что $N_{i\mathfrak{p}} = M_{i\mathfrak{p}}$ при $\mathfrak{p} \in S$ и $N_{i\mathfrak{p}} = L_{i\mathfrak{p}}$ при $\mathfrak{p} \notin S$. Следовательно, $g(M) = g(N_1) + g(N_2)$, причем $g(M) \gg g(N_2)$. Итак, мы установили, что всякий минимальный (в частности, неразложимый) род — это род некоторого идеала и остается применить теорему 2.

A-модуль без кручения M называется неприводимым, если M — простой $\tilde{A}$-модуль [9]; A-модуль без кручения M будем называть вполне разложимым, если он распадается в прямую сумму неприводимых A-модулей без кручения [10]. Аналогично доказательству теоремы 3 устанавливается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть A — такое кольцо, что для любого простого идеала $\mathfrak{p} \in P$ все $A_\mathfrak{p}$-модули без кручения вполне разложимы. Тогда для любого A-модуля без кручения M существует точная последовательность $0 \to N \to M \to L \to 0$, где N — вполне разложимый, L — неприводимый A-модули, такая, что для любого $\mathfrak{p} \in P$ она расщепима.*

Кольцо A назовем псевдонаследственным, если для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ высоты 1 кольцо $A_\mathfrak{p}$ наследственно. Очевидно, тогда все $A_\mathfrak{p}$-модули без кручения вполне разложимы для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ высоты 1. Следовательно, для псевдонаследственных колец справедлива теорема 4. Отметим еще один результат, обобщающий «теорему редукции» для решеток над целозамкнутыми нетеровыми кольцами [3].

Теорема 5. *Предположим, что кольцо A замкнуто и для любого $\mathfrak{p} \in P$ кольцо $A_\mathfrak{p}$ локально (например, $A = C$). Тогда для любой A-решетки M такой, что $M_\mathfrak{p}$ свободна для всех $\mathfrak{p} \in P$ (например, для любого проективного A-модуля), существует точная последовательность $0 \to N \to M \to L \to 0$, расщепимая для всех $\mathfrak{p} \in P$, в которой M — свободный A-модуль, а L — идеал кольца A.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1, если положить в ней $N = A^{n-1}$, где $\tilde{M} = A^n$.

4. Теорему 1 можно перенести также на пучки решеток на схемах с обильным пучком [11]. Именно, отделимую схему X назовем псевдонетеровой, если у нее есть конечное открытое покрытие $X = \bigcup_i U_i$, в котором каждое U_i изоморфно спектру некоторого псевдонетерова коммутативного кольца. Далее X предполагается редуцированной псевдонетеровой схемой, на которой фиксирован обильный пучок $\mathcal{L}$ и задан квазикогерентный пучок полупервичных $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{A}$, причем для каждой точки $x \in X$ высоты 1 алгебра $\mathcal{A}_x$ является конечнопорожденным $\mathcal{O}_{x,X}$-модулем без кручения (высотой точки назовем коразмерность ее замыкания). Очевидным образом определяются пучки $\mathcal{A}$-решеток и т. п. Как обычно, будем писать $\mathcal{M}(n)$ вместо $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$. Поскольку $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{M})(n) \simeq \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{M}(n))$ и для достаточно больших n этот пучок порождается глобальными сечениями, то, почти дословно повторяя доказательство теоремы 1, получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — такие пучки $\mathcal{A}$-решеток, что $r(\mathcal{M}) \gg r(\mathcal{N})$ и для любой точки $x \in X$ высоты 1 существует расщепимый* *мономорфизм* $\mathcal{N}_x \to \mathcal{M}_x$. *Тогда для некоторого* n *существует мономорфизм* $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ *такой, что* φ_x *расщепим для всех точек* $x \in X$ *высоты* 1.

Следствие. *Предположим, что для каждой точки* $x \in X$ *высоты* 1 *кольцо* $\mathcal{A}_x$ *локально, и пусть* $\mathcal{M}$ — *локально свободный пучок* $\mathcal{A}$-*модулей ранга* m. *Тогда для некоторого* n *существует мономорфизм* φ: $\mathcal{A}^{m-1} \to \mathcal{M}(n)$ *такой, что* φ_x *расщепим для всех точек* $x \in X$ *высоты* 1.

Замечание. Конечно, в отличие от аффинного случая, здесь мономорфизм φ не обязан расщепляться даже в случае, когда X — нетерова схема размерности 1.

1. *Ройтер А. В.* О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.— **30**, вып. 5.— С. 1315—1324.
2. *Roggenkamp K. W.* Lattices over orders. II // Lect. Notes Math.— 1970.— **142**.— P. 1—289.
3. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра.— М. : Мир, 1971.— 708 с.
4. *Дрозд Ю. А.* О существовании максимальных порядков // Мат. заметки.— 1985.— **37**, № 3.— С. 313—316.
5. *Фаддеев Д. К.* О полугруппе родов в теории целочисленных представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— **28**, вып. 3.— С. 475—478.
6. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр// М. : Наука, 1969.— 668 с.
7. *Дрозд Ю. А., Ройтер А. В.* Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1967.— **31**, вып. 4.— С. С. 783—798.
8. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Ройтер А. В.* О наследственных и бассовых порядках // Изв. АН СССР.— 1967.— **31**, вып. 6.— С. 1415—1436.
9. *Ройтер А. В.* Категории представлений // Укр. мат. журн.— 1963.— **15**, № 4.— С. 448—452.
10 *Кириченко В. В.* О порядках, все представления которых вполне разложимы // Мат. заметки.— 1967.— **2**, № 1.— С. 145—156.
11. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия.— М. : Мир, 1981.— 599 с.

Одес. пед. ин-т Получено 16.01.87