УДК 517.949

В. Л. Хацкевич

Периодические решения монотонных систем с запаздыванием

Исследуется класс систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и монотонной нелинейностью. Рассмотрены вопросы разрешимости основной начальной задачи, периодической задачи, обоснование метода Галеркина отыскания периодических решений, асимптотическое поведение решения в случае большого и малого параметров.

Досліджується клас систем нелінійних диференціальних рівнянь з запізненням і монотонною нелінійністю. Розглянуто питання розв'язності основної початкової задачі, періодичної задачі, обгрунтування методу Гальоркіна знаходження періодичних розв'язків, асимптотична поведінка розв'язку у випадку великого й малого параметрів.

В настоящей статье метод монотонных (по Минти — Браудеру, см. [1]) операторов используется для изучения периодических систем с запаздыванием. Получены новые результаты по разрешимости периодической задачи, обоснованию метода Галеркина и принципа усреднения (ср. с [2—4]). Эти результаты обобщают утверждения из [5] на случай систем с запаздыванием. Особое внимание уделено получению оценок (периодического решения, погрешности метода Галеркина и др.).

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, R — вещественная прямая. Рассмотрим в H уравнение

$$dx/dt + f(t, x(t), x(t-\Delta(t))) = 0, \tag{1}$$

где $f: R \times H^2 \to H$ и $\Delta: R \to R$ — непрерывные функции, ω-периодические по t. (Далее $\omega > 0$ фиксированно.)

Приближением по методу Галеркина для ω-периодического решения (1) назовем тригонометрический полином

$$\varphi_n(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{\omega}kt + b_k \sin\frac{2\pi}{\omega}kt\right), \tag{2}$$

коэффициенты которого $a_k,\ b_k \in H$ удовлетворяют алгебраической системе уравнений Галеркина

$$d\varphi_n/dt + P_n f(t, \varphi_n(t), \varphi_n(t-\Delta(t))) = 0. \tag{3}$$

Здесь P_n — оператор, ставящий в соответствие произвольной непрерывной ω-периодической функции $g(t)$ с рядом Фурье

$$g \sim c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k \cos\frac{2\pi}{\omega}kt + d_k \sin\frac{2\pi}{\omega}kt\right)$$

функцию $\quad (P_n g)(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(c_k \cos\frac{2\pi}{\omega}kt + d_k \sin\frac{2\pi}{\omega}kt\right).$

Теорема 1. *Пусть функция $f(t, x, y)$ непрерывна, по t ω-периодична, по x удовлетворяет условию γ-монотонности с постоянной $\gamma > 0$*

$$(f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y), x_1 - x_2) \geqslant \gamma\|x_1 - x_2\|^2 \quad \forall t \in R, \quad \forall x_1, x_2, y \in H, \tag{4}$$

по y — условию Липшица с постоянной $L > 0$

$$\|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)\| \leqslant L\|y_1 - y_2\| \quad \forall t \in R, \quad \forall x, y_1, y_2 \in H. \tag{5}$$

Пусть функция $\Delta(t)$ ω-периодична, абсолютно непрерывна на $[0, \omega]$ и $\Delta'(t) < 1$, либо $\Delta'(t) > 1$ п. в. на $[0, \omega]$,

$$\gamma - L\,\mathrm{ess\,sup}\,|1 - \Delta'(t)|^{-\frac{1}{2}} \equiv \varkappa > 0. \tag{6}$$

Тогда при каждом натуральном n система (3) *имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\int_0^{\omega}\|\varphi_n(t)\|^2\,dt \leqslant \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^{\omega}\|f(t, 0, 0)\|^2\,dt. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — пространство ω-периодических функций $u: R \to H$, сильно измеримых и суммируемых с квадратом на $[0, \omega]$, со скалярным произведением и нормой, задаваемыми равенствами

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{\omega}(u(t), v(t))\,dt, \quad |u| = \langle u, u\rangle^{1/2}, \quad u,\ v \in \mathfrak{H}.$$

Определим линейный оператор $\mathfrak{L}: \mathfrak{D}(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ формулами $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}) \equiv$

$\equiv \{u \in \mathfrak{H} : u$ абс. непр., $\dot{u} \in \mathfrak{H}\}$, $(\mathfrak{L}u)(t) = \dot{u}(t)$, $u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L})$. Отметим, что

$$\langle \mathfrak{L}u, u\rangle = \int_0^\omega \left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u(t), u(t))\right\} dt = 0 \quad \forall u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}). \tag{8}$$

Рассмотрим еще нелинейный оператор $F : \mathfrak{D}(F) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(F) \equiv C_\omega$, т. е. множеством непрерывных функций из $\mathfrak{H}$, $(Fu)(t) \equiv f(t, u(t), u(t - \Delta(t)))$, $u \in \mathfrak{D}(F)$.

В силу (4), (5) и неравенства Коши — Буняковского имеем ($\forall u, v \in C_\omega$)

$$\langle Fu - Fv, u - v\rangle \geqslant \gamma |u - v|^2 - L\left(\int_0^\omega \| u(t-\Delta) - v(t-\Delta)\|^2 dt\right)^{1/2} |u - v|. \tag{9}$$

В интеграле, входящем в (9), сделаем замену $s = t - \Delta(t)$. Тогда

$$\int_0^\omega \|u(t-\Delta) - v(t-\Delta)\|^2 dt = \int_{-\Delta(0)}^{\omega - \Delta(\omega)} \|u(s) - v(s)\|^2 \frac{ds}{1 - \Delta'(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{ess\,sup} |1 - \Delta'(t)|^{-1} |u - v|^2.$$

Здесь использована ω-периодичность функций u, v и Δ. Теперь из (6), (9) получаем

$$\langle Fu - Fv, u - v\rangle \geqslant \varkappa |u - v|^2 \quad \forall u, v \in C_\omega.$$

Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{L} + F$. Тогда с учетом (8) имеем

$$\langle \mathfrak{N}u - \mathfrak{N}v, u - v\rangle \geqslant \varkappa |u - v|^2 \quad \forall u, v \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L})). \tag{10}$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_n$ образ проектора P_n и пусть $\mathfrak{L}_n \equiv P_n \mathfrak{L} | \mathfrak{H}_n$, $F_n = P_n F | \mathfrak{H}_n$. Система Галеркина (3) принимает вид

$$\mathfrak{N}_n u \equiv \mathfrak{L}_n u + F_n u = 0, \quad u \in \mathfrak{H}_n. \tag{11}$$

В силу (10) и самосопряженности проектора P_n заключаем, что

$$\langle \mathfrak{N}_n u - \mathfrak{N}_n v, u - v\rangle \geqslant \varkappa |u - v|^2 \quad \forall u, v \in \mathfrak{H}_n. \tag{12}$$

Кроме того, из равенства Парсеваля вытекает оценка

$$|\mathfrak{L}_n u| \leqslant \frac{2\pi n}{\omega} |u| \qquad \forall u \in \mathfrak{H}_n,$$

так что оператор $\mathfrak{L}_n$ ограничен в $\mathfrak{H}_n$. Оператор же F_n непрерывен вследствие непрерывности векторной функции f и эквивалентности в $\mathfrak{H}_n$ норм $|\cdot|$ и равномерной сходимости.

Итак, оператор $\mathfrak{N}_n$ непрерывен и $\varkappa$-монотонен. По теореме Минти—Браудера [1, с. 262] уравнение (11) имеет единственное решение φ_n. Оценка (7) вытекает из (12), если положить $u = \varphi_n$, $v = 0$ и учесть равенство $\mathfrak{N}_n \varphi_n = 0$. Теорема доказана.

Отметим здесь, как нам кажется, новые (ср. с [2]) моменты. Разрешимость системы Галеркина получена при произвольном n (а не достаточно большом), причем функция f не предполагается гладкой, а запаздывание постоянным.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *вместо* (5) *выполнено неравенство* ($\forall t \in R; \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$)

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leqslant L_x \|x_1 - x_2\| + L_y \|y_1 - y_2\|, \tag{13}$$

где L_x, L_y *— фиксированные положительные постоянные. При этом* L *в* (6) *изменяется на* L_y. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное* ω-*периодическое решение* φ, *причем справедлива оценка*

$$|||\varphi||| \leqslant \left\{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\omega}} + \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{3}}\left(1+\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\right\}\left(\int\limits_0^{\omega} \| f(t, 0, 0)\|^2\, dt\right)^{1/2}, \qquad (14)$$

где $\sigma^2 = 2(L_x^2 + L_y^2 \operatorname{ess\,sup} |1-\Delta'(t)|^{-1/2})$, $|||\varphi||| = \max \|\varphi(t)\|$.

Доказательство. Используя неравенство (13), получаем

$$|Fu - Fv| \leqslant \sigma |u-v| \qquad \forall u, v \in C_\omega. \qquad (15)$$

Поэтому в силу (3) имеем

$$|\dot{\varphi}_n| = |P_n F\varphi_n| \leqslant |F\varphi_n| \leqslant \sigma|\varphi_n| + |F0|.$$

Отсюда с использованием (7) следует

$$|\dot{\varphi}_n| \leqslant \left(1+\frac{\sigma}{\varkappa}\right)|F0|. \qquad (16)$$

Заметим теперь, что ω-периодическая задача для уравнения (1) эквивалентна следующим соотношениям:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} \varphi(s)\, ds - \int\limits_0^{\omega} \chi(t-s) f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta(s)))\, ds \equiv (K\varphi)(t), \quad (17)$$

$$\int\limits_0^{\omega} f(s, \varphi(s), \varphi(s-\Delta(s)))\, ds = 0, \qquad (18)$$

где $\chi(\tau) = 1/2 - \tau/\omega$, $0 \leqslant \varepsilon < \omega$, и далее продолжена по ω-периодичности. Система Галеркина для (17), имеющая вид

$$\varphi_n - P_n K\varphi_n = 0, \quad \varphi_n \in \mathfrak{H}_n, \qquad (19)$$

с учетом (18) эквивалентна (3). Это следует из формулы для коэффициентов Фурье свертки, так как $\chi(\tau)$ отвечает ряд Фурье $\chi(\tau) \sim \sum \frac{1}{2\pi j} \times$ $\times \sin\frac{2\pi j}{\omega} t$.

По теореме 1 для каждого n существует единственное решение системы (3), а значит, и (19). В силу (7), (16) из последовательности φ_n можно выделить подпоследовательность φ_{n_k}, слабо (в $\mathfrak{H}$) сходящуюся к некоторой функции φ, причем $\dot{\varphi}_{n_k}$ слабо (в $\mathfrak{H}$) сходится к $\dot{\varphi}$. Поэтому средние значения

$$\varphi_{n_k}^{(0)} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} \varphi_{n_k}(s)\, ds$$

сходятся к $\varphi^{(0)}$. Тогда в силу представления

$$\varphi_{n_k}(t) = \int\limits_0^{\omega} \chi(t-s)\dot{\varphi}_{n_k}(s)\, ds + \varphi_{n_k}^{(0)}$$

последовательность элементов $\varphi_{n_k}(t)$ сходится при любом $t \in R$.

С другой стороны, согласно (7), (16) множество $\{\varphi_{n_k}\}(t)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Поэтому последовательность $\{\varphi_{n_k}\}(t)$ содержит равномерно на $[0, \omega]$, а в силу периодичности и на R, сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что сама последовательность φ_n равномерно сходится к некоторой функции $\varphi \in C_\omega$.

По определению φ_n и для каждой функции $h \in \mathfrak{H}$ имеем

$$\langle\varphi_n, h\rangle = \langle P_n K\varphi_n, h\rangle = \langle K\varphi_n, P_n h\rangle. \qquad (20)$$

Отметим, что $\{K\varphi_n\}(t)$ сходится равномерно к $(K\varphi)(t)$ при $n \to \infty$ на основании равномерной сходимости последовательности функций $f_n(t) \equiv f(t,$

$\varphi_n(t), \varphi_n(t-\Delta))$. Переходя в (20) к пределу находим, что φ — решение уравнения (17).

Кроме того, согласно (3)

$$\int_0^\omega (P_n f_n)(t) = 0. \tag{21}$$

В силу предыдущего последовательность функций $P_n f_n$ сходится в пространстве $\mathfrak{H}$, а значит, для некоторой подпоследовательности чисел можно перейти к пределу в соотношении (21) и получить (18). Таким образом, φ — ω-периодическое решение уравнения (1). Единственность этого решения следует из (10).

Заметим, что в силу (7), (16) справедливо соотношение

$$|||\varphi_n||| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\omega}}|\varphi_n| + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{3}}|\dot{\varphi}_n| \leqslant \left\{\frac{1}{\varkappa\sqrt{\omega}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{3}}\left(1+\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\right\}|F0|. \tag{22}$$

Из (22) предельным переходом получаем (14), Теорема доказана,

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 верны оценки*

$$|\varphi| \leqslant \frac{1}{\varkappa}|F0|, \quad |\dot{\varphi}| \leqslant \left(1+\frac{\sigma}{\varkappa}\right)|F0|. \tag{23}$$

В случае $\Delta(t) \equiv 0$ результат теоремы 2 известен (см. [5]). Существование периодического решения ниже доказано (следствие 2) при более общих предположениях. Однако, в условиях теоремы 2 мы получим оценки метода Галеркина.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 последовательность φ_n сходится к φ равномерно и справедливы оценки*

$$|\varphi-\varphi_n| \leqslant \frac{\omega}{2\pi(n+1)}\left(1+\frac{\sigma}{\varkappa}\right)\left(1+\frac{\sigma^2}{\varkappa^2}\right)^{1/2}|F0|, \tag{24}$$

$$|||\varphi-\varphi_n||| \leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2n}}\left(1+\frac{\sigma}{\varkappa}\right)^2|F0|. \tag{25}$$

Доказательство проводится аналогично [6], где запаздывание отсутствует. Положим в (12) $u=\varphi_n$, $v=P_n\varphi\equiv\psi_n$. Тогда

$$|\varphi_n-\psi_n| \leqslant \frac{1}{\varkappa}|\dot{\psi}_n + P_nF\psi_n|. \tag{26}$$

Поскольку $\dot{\psi}_n + P_nF\varphi = 0$, то из (26) имеем

$$|\varphi_n-\psi_n| \leqslant \frac{1}{\varkappa}|P_n(F\varphi - F\psi_n)| \leqslant \frac{1}{\varkappa}|F\varphi - F\psi_n|.$$

Отсюда согласно (15) получаем

$$|\varphi_n-\psi_n| \leqslant \frac{\sigma}{\varkappa}|\varphi-\psi_n|. \tag{27}$$

С учетом ортогональности элементов $\varphi-\psi_n$ и $\varphi_n-\psi_n$ из (27) следует

$$|\varphi-\varphi_n| \leqslant \left(1+\frac{\sigma^2}{\varkappa^2}\right)^{1/2}|\varphi-\psi_n|. \tag{28}$$

Пусть $\dot{a}_k$ и $\dot{b}_k$ — коэффициенты Фурье функции $\dot{\varphi}$. Тогда

$$|\varphi-\psi_n|^2 = 2\omega\sum_{k=n+1}^{\infty}(\|\dot{a}_k\|^2+\|\dot{b}_k\|^2)\left(\frac{\omega}{2\pi k}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\omega}{2\pi(n+1)}\right)^2|\dot{\varphi}|^2.$$

Поэтому из (28) и (23) вытекает оценка (24).

Для доказательства (25) используются неравенства [6]

$$|||\varphi - \psi_n||| \leqslant \frac{|\dot{\varphi}|}{\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2n}}, \quad |||\varphi_n - \psi_n||| \leqslant \sqrt{\frac{2(n+1)}{\omega}}\,|\varphi_n - \psi_n|,$$

а также предыдущие оценки. Теорема доказана.

Условие монотонности (4) позволяет выписать оценки (24), (25), имеющие (в отличие от [2, с. 84]) априорный характер. Если функция f непрерывно дифференцируема (как в [2]), то решение φ дважды непрерывно дифференцируемо. Тогда в силу изложенного выше справедлива оценка погрешности метода Галеркина в равномерной метрике порядка $O(n^{-3/2})$, что точнее, чем в [2].

В условиях теоремы 1 или 2 периодическое решение устойчиво по Ляпунову. Проверим это для случая постоянного запаздывания $\Delta > 0$. Рассмотрим начальную задачу

$$dx/dt + f(t, x(t), x(t-\Delta)) = 0, \tag{29}$$

$$x(t)|_{t\in[t_0-\Delta, t_0]} = \xi(t), \tag{30}$$

где число t_0 и непрерывная функция $\xi : [t_0 - \Delta, t_0] \to H$ заданы.

Теорема 4. *Пусть функция f непрерывна и удовлетворяет условиям* (4)—(6), *причем* $0 < \Delta \equiv \mathrm{const}$. *Тогда задача* (29), (30) *имеет единственное решение* $x : [t_0 - \Delta, \infty) \to H$. *Для разности решений справедлива оценка*

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqslant \left[e^{\gamma(t_0-t)} + \frac{L}{\gamma}(1 - e^{\gamma(t_0-t)})\right] \max_{t_0-\Delta\leqslant s\leqslant t_0} \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|, \quad t \geqslant t_0, \tag{31}$$

где x_j есть решение уравнения (29), *удовлетворяющее начальному условию* $x_j(t)|_{t\in[t_0-\Delta, t_0]} = \xi_j(t)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Существование решения задачи (29), (30) вытекает из метода шагов (см., например, [3]), сводящего начальную задачу к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с монотонной нелинейностью и результата из [5, с. 84].

Рассмотрим скалярную функцию $v(t) \equiv \|x_1(t) - x_2(t)\|^2$. Дифференцируя ее и используя условия (4), (5), находим

$$\dot{v}(t) \leqslant -\gamma v(t) + L\|\xi_1(t) + L\|\xi_1(t-\Delta) - \xi_2(t-\Delta)\|, \quad t_0 + \Delta \geqslant t \geqslant t_0. \tag{32}$$

Пусть $\max\limits_{t\in[t_0-\Delta, t_0]} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| = \varepsilon$. В силу постоянства Δ (6) означает, что $\gamma > L \geqslant 0$. Тогда из (32) вытекает оценка

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqslant \varepsilon\exp\{\gamma(t_0 - t)\} + \varepsilon L\gamma^{-1}[1 - \exp\{\gamma(t_0 - t)\}] \leqslant \varepsilon,$$
$$t_0 + \Delta \geqslant t \geqslant t_0,$$

из которой следует оценка (31). Теорема доказана.

Следствие 2. *В условиях теоремы 4 существует единственное ω-периодическое решение уравнения (29). Оно устойчиво по Ляпунову.*

Действительно, из оценки (31) следует, что оператор монодромии уравнения (29) является сжимающим. Поэтому существует единственное ω-периодическое решение. Оно устойчиво в силу (31).

Отметим, что теорема 4 и следствие 2 справедливы и в случае переменного запаздывания $\Delta(t)$, удовлетворяющего условию (6). Кроме того, если априори известно, что решения уравнения (29) удовлетворяют оценке типа (31), то (аналогично [5, с. 119]) функция f удовлетворяет некоторому условию монотонности.

Лемма 1. *Пусть $v : R \to R$ — неотрицательное ограниченное (на всей оси R) решение дифференциального неравенства*

$$\dot{v}(t) + av(t) \leqslant bv(t - \Delta(t)) + e(t) \qquad \forall t \in R, \tag{33}$$

где $a, b \in R$; а $\Delta, l: R \to R$ — непрерывные ограниченные функции, причем $a > b \geqslant 0$. Тогда справедлива оценка

$$\sup_{t \in R} v(t) \leqslant (a-b)^{-1} \sup_{t \in R} |l(t)|. \tag{34}$$

Доказательство. Умножим неравенство (33) на положительную функцию $\exp\{a(t-s)\}$ и проинтегрируем по t от $-\infty$ до s. Тогда

$$v(s) \leqslant b \int_{-\infty}^{s} e^{a(t-s)} v(t-\Delta(t))\, dt + \int_{-\infty}^{s} e^{a(t-s)} l(t)\, dt. \tag{35}$$

При этом

$$\left| \int_{-\infty}^{s} e^{a(t-s)} v(t-\Delta(t))\, dt \right| \leqslant \frac{1}{a} \sup_{t \in R} v(t).$$

и из (35) получим

$$\left(1 - \frac{b}{a}\right) \sup_t v(t) \leqslant \sup_s \int_{-\infty}^{s} e^{a(t-s)} |l(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{a} \sup_{t \in R} |l(t)|.$$

Отсюда следует (34). Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы 1 функция $\Delta: R \to R$ непрерывно дифференцируема. Тогда ω-периодическое решение φ уравнения* (1) *удовлетворяет оценке* $|||\,\varphi\,||| \leqslant (\gamma - L)^{-1} \max \| f(t, 0, 0) \| \equiv r.$ (36)

Доказательство. Заметим, что вследствие ω-периодичности функции $\Delta(t)$ в некоторой точке $t_0 \in [0, \omega]$ имеем $\Delta'(t_0) = 0$. Поэтому $\min |1 - \Delta'(t)|^{1/2} \leqslant 1$. Тогда из (6) следует неравенство $\gamma > L$.

Пусть $u(t) \equiv \|\varphi(t)\|^2$. В силу (1)

$$\dot{u}(t) = -2(\varphi(t), f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta))) = 2(\varphi, f(t, 0, \varphi(t-\Delta)) - f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta))) + 2(\varphi(t), f(t, 0, 0) - f(t, 0, \varphi(t-\Delta))) - 2(\varphi(t), f(t, 0, 0)).$$

Отсюда на основании (4), (5), полагая $v = \sqrt{u}$, выводим

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) \leqslant Lv(t-\Delta) + \|f(t, 0, 0)\|.$$

Теперь оценка (36) следует из (34). Теорема доказана.

Рассмотрим уравнение с параметром $\mu > 0$

$$dx/dt + \mu f(t, x(t), x(t-\Delta(t))) = 0. \tag{37}$$

Существование ω-периодического решения этого уравнения при каждом $\mu > 0$ гарантируется теоремой 2, либо следствием 2. Положим

$$f_0(z) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t, z, z)\, dt, \quad z \in H. \tag{38}$$

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 функция $f_0: H \to H$ непрерывна и удовлетворяет условию $\gamma - L$-монотонности.*

Действительно, непрерывность функции f_0 есть следствие непрерывности f и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Условие монотонности обеспечивается неравенствами (4), (5), так как для любых $z_1, z_2 \in H$ имеем

$$(f_0(z_1) - f_0(z_2), z_1 - z_2) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} (f(t, z_1, z_1) - f(t, z_1, z_2), z_1 - z_2)\, dt + $$
$$+ \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} (f(t, z_1, z_2) - f(t, z_2, z_2), z_1 - z_2)\, dt \geqslant (\gamma - L)\|z_1 - z_2\|^2. \tag{39}$$

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 уравнение*

$$f_0(z) = 0 \tag{40}$$

имеет единственное решение z_*, *причем*

$$\| z_* \| \leqslant \frac{1}{(\gamma - L)\,\omega} \left\| \int\limits_0^\omega f(t, 0, 0)\, dt \right\|. \tag{41}$$

Существование решения есть следствие теоремы Минти—Браудера [1, с. 262], а единственность и оценка (41) вытекают из (39).

Справедлив следующий принцип усреднения.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *и, кроме того, функция* $f : R \times H \to H$ *ограничена на ограниченных множествах. Тогда* ω-*периодические решения* φ_μ *уравнения* (37) *равномерно сходятся при* $\mu \to 0$ *к решению* z_* *уравнения* (40).

Доказательство. Согласно оценке (36) семейство $\varphi_\mu(t)$ равномерно ограничено, т. е. $|||\varphi_\mu||| \leqslant r\ \forall \mu > 0$. Следовательно,

$$\| f(t, \varphi_\mu(t), \varphi_\mu(t-\Delta) \| \leqslant \max_{t \in [0,\omega];\, \|z_1\|,\, \|z_2\| \leqslant r} \| f(t, z_1, z_2) \| \equiv C. \tag{42}$$

Покажем, что семейство $\{\varphi_\mu\}$ сходится равномерно. Имеем

$$\frac{d}{dt} \| \varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t) \|^2 = 2\nu\, (\varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t), f(t, \varphi_\nu(t), \varphi_\nu(t-\Delta)) - f(t, \varphi_\mu(t),$$
$$\varphi_\nu(t-\Delta))) + 2\mu\, (\varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t), f(t, \varphi_\mu(t), \varphi_\nu(t-\Delta)) - f(t, \varphi_\mu(t),$$
$$\varphi_\mu(t-\Delta))) + 2(\nu-\mu)\,(\varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t), f(t, \varphi_\mu(t), \varphi_\nu(t-\Delta))).$$

Отсюда на основании (3), (4) получим

$$\frac{d}{dt} \| \varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t) \|^2 \leqslant -2\nu\gamma \| \varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t) \|^2 + 2|\nu - \mu| \, \| \varphi_\mu(t) -$$
$$- \varphi_\nu(t) \| \, \| f(t, \varphi_\mu(t), \varphi_\nu(t-\Delta)) \| + 2\mu L \| \varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t) \| \, \| \varphi_\mu(t-\Delta) -$$
$$- \varphi_\nu(t-\Delta) \|. \tag{43}$$

Полагая в (43) $\| \varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t) \| \equiv v(t)$ и учитывая (42), получаем дифференциальное неравенство вида (33) с $a = \nu\gamma$, $b = \mu L$, $l = |\nu - \mu|\, C$. Будем считать, что величина $|\nu - \mu|$ мала, так что $\nu\gamma > \mu L$. Тогда по лемме 1

$$\| \varphi_\mu(t) - \varphi_\nu(t) \| \leqslant C\, |\nu - \mu|\, (\nu\gamma - \mu L)^{-1}. \tag{44}$$

Из оценки (44) вытекает фундаментальность, а значит, равномерная сходимость семейства функций $\{\varphi_\mu(t)\}$ при $\mu \to 0$. Пусть $\varphi_0(t)$ — предел этой последовательности. Оценка (42) показывает, что

$$\| \varphi_\mu(t) - \varphi_\mu(s) \| \leqslant |||\dot\varphi_\mu|||\, |t - s| \leqslant \mu C\, |t - s|\ \ \forall t,\ s \in R.$$

и следовательно, $\varphi_0(t) \equiv z_* \in H$.
Переходя к пределу при $\mu \to 0$ в равенстве

$$\int\limits_0^\omega f(t, \varphi_\mu(t), \varphi_\mu(t - \Delta(t)))\, dt = 0$$

имеем $f_0(z_*) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 7 обобщает соответствующий результат из [5] для уравнений без запаздывания. Условие монотонности позволяет отказаться от обычного предположения о гладкости функции f.

Изучим поведение решения φ_μ уравнения (37) при больших значениях параметра $\mu > 0$. Рассмотрим неявную функцию $\chi : R \to H$, определяемую уравнением

$$f(t, \chi(t), \chi(t - \Delta(t))) = 0. \tag{45}$$

Лемма 3. *В условиях теоремы* 2 *уравнение* (45) *имеет решение* $\chi \in \mathfrak{H}$, *причем единственное.*

Доказательство. В силу непрерывности f по t и (13) оператор суперпозиции $(Fu)(t) \equiv f(t, u(t), u(t - \Delta(t)))$ переводит всякую функцию из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$ и является непрерывным в этом пространстве. Кроме того, как показано в теореме 1, оператор F удовлетворяет условию $\varkappa$-монотонности. Поэтому утверждение леммы следует из теоремы Минти—Браудера.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда ω-периодические решения φ_μ уравнения (37) при $\mu \to \infty$ равномерно сходятся к ω-периодическому решению уравнения (45).*

Эта теорема просто доказывается при дополнительном предположении постоянства запаздывания Δ и условия Липшица функции f по первому аргументу:

$$\| f(t_1, x, y) - f(t_2, x, y) \| \leqslant L_t \| t_1 - t_2 \| \quad \forall t_1, t_2 \in R; \quad \forall x, y \in H; \quad R \ni L_t > 0. \tag{46}$$

Действительно, из условий (4), (13) вытекает соотношение

$$(f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2), x_1 - x_2) \geqslant \gamma \| x_1 - x_2 \|^2 - L_y \| x_1 - x_2 \| \| y_1 - y_2 \|$$

$$\forall t \in R; \qquad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in H.$$

Полагая здесь $x_j = \chi(t_j)$, $y_j = \chi(t_j - \Delta)$, $j = 1, 2$, и используя (45) получаем

$$\| f(t_2, \chi(t_2), \chi(t_2 - \Delta)) - f(t_1, \chi(t_2), \chi(t_2 - \Delta)) \| \geqslant \gamma \| \chi(t_1) - \chi(t_2) \| - L_y \| \chi(t_1 - \Delta) - \chi(t_2 - \Delta) \|.$$

Отсюда с учетом (46) для любого $\delta > 0$ при $| t_1 - t_2 | \leqslant \delta$ следует

$$\gamma \| \chi(t_1) - \chi(t_2) \| \leqslant L_t \delta + L_y \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant \delta} \| \chi(t_1) - \chi(t_2) \|.$$

Тогда, переходя к супремуму по $| t_1 - t_2 | \leqslant \delta$ слева, имеем

$$\sup_{|t_1 - t_2| \leqslant \delta} \| \chi(t_1) - \chi(t_2) \| \leqslant L_t \delta (\gamma - L_y)^{-1}.$$

Следовательно, функция χ абсолютно непрерывна, причем $\sup_\tau \| \dot{\chi}(\tau) \| \leqslant \leqslant L_t (\gamma - L_y)^{-1}$.

Положим $u(t) \equiv \| \varphi_\mu(t) - \chi(t) \|^2$. По предыдущему $u(t)$ дифференцируема почти всюду на $[0, \omega]$ и

$$\dot{u}(t) = 2\mu (\chi(t) - \varphi_\mu(t), f(t, \varphi_\mu(t), \varphi_\mu(t - \Delta)) - f(t, \chi(t), \varphi_\mu(t - \Delta))) + 2\mu (\chi(t) - \varphi_\mu(t), f(t, \chi(t), \varphi_\mu(t - \Delta)) - f(t, \chi(t), \chi(t - \Delta))) + 2(\chi(t) - \varphi_\mu, \dot{\chi}(t)) \leqslant - 2\mu\gamma u(t) + 2\mu L_y \sqrt{u(t) u(t - \Delta)} + 2 \| \dot{\chi}(t) \| \sqrt{u(t)}.$$

Тогда для функции $v(t) \equiv \sqrt{u(t)}$ получим дифференциальное неравенство (33) с $a = \mu\gamma$, $b = \mu L_y$ и $l(t) \equiv \| \dot{\chi}(t) \|$. Следовательно, $||| \chi - \varphi_\mu ||| \leqslant L_t \diagdown \mu (\gamma - L_y)^2$ и теорема доказана (при указанных дополнительных предположениях).

В общем случае доказательство может быть завершено с использованием усреднений функции χ по Стеклову аналогично [5, с. 106] (В [5] рассмотрен случай уравнений без запаздывания.)

Отметим, что результаты этой работы допускают распространение на квазипериодический случай. Кроме того, можно требовать, чтобы условия монотонности и Липшица для f выполнялись лишь локально (в некотором шаре пространства H).

1. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М. : Наука, 1972 — 415 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами.— Киев : Наук. думка, 1984.— 214 с.
3. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические иквазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 247 с.

4. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М. : Наука, 1969.— 287 с.
5. *Трубников Ю. В.*, *Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями.— Минск : Наука и техника, 1986.— 199 с.
6. *Хацкевич В. Л.* Применение метода Галеркина для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1979.— **15**, № 11.— С. 2100—2103.

Воронеж. ун-т Получено 10.10.88