УДК 517.535

М. Н. Шеремета

О росте аналитических функций

Для аналитической в круге $\{z : |z| z < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, функции f в терминах ее тейлоровских коэффициентов получен критерий выполнения соотношения $\int\limits_0^R \alpha(r) \ln^+ M(r) \times$ $\times\, dr < +\infty$, где $M(r) = \max\{|(f(z)| : |z| = r < R\}$, а α — положительная на $[0, R)$ функция, удовлетворяющая некоторым условиям.

Для аналітичної в крузі $\{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, функції f в термінах її тейлорівських коефіцієнтів отримано критерій виконання співвідношення $\int\limits_0^R \alpha(r) \ln^+ M(r)\, dr < +\infty$, де $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r < R\}$, а α — додатня на $[0, R)$ функція, яка задовольняє деякі умови.

Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости R, $0 < R \leqslant +\infty$, и в круге $\{z : |z| < R\}$ представляет аналитическую функцию f. Пусть $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geqslant 0\}$ — максимальный член и $\nu(r) = \max\{n : |a_n| r^n = \mu(r)\}$ — центральный индекс. Положим $r_0 = 0$ и последовательность (r_n) точек скачка центрального индекса определим следующим образом. Считаем, что $\nu(r) \equiv n$ при $r_n \leqslant r < r_{n+1}$, и если при переходе через точку r_{n+1} значение функции $\nu(r)$ меняется с n на $n + k$, то полагаем $r_{n+1} = r_{n+2} = \ldots = r_{n+k}$. Отметим, что либо $r_n \nearrow R$, $n \to \infty$, либо количество точек скачка конечно. Действительно, если $r_n \leqslant$ $\leqslant R^* < R$ для всех n, то $\nu(r) = \nu(R^*)$ при $R^* \leqslant r < R$, и поскольку величины скачка центрального индекса не меньше 1, то ясно, что количество точек скачка конечно. Через $\omega \leqslant +\infty$ будем обозначать количество r_n на $[0, R)$.

В настоящей статье будет установлена очень простая связь между ростом $\mu(r)$ и ростом (r_n), а также указано ее применение к исследованию принадлежности целых $(R = +\infty)$ и аналитических в единичном круге $(R = 1)$ функций определенному классу сходимости. Отметим, что случай $0 < R < +\infty$ легко сводится к случаю $R = 1$.

Теорема 1. *Пусть β — положительная дважды непрерывно дифференцируемая убывающая к 0 на $[0, R)$ функция такая, что $x|\beta'(x)| \downarrow 0$, $x \to R$, а $\alpha(x) = \beta'(x) + x\beta''(x)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\omega} \beta(r_n)$ и интеграл $\int\limits_0^R \alpha(x) \times$ $\times \ln \mu(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Пусть сначала $\omega = +\infty$, т. е. $r_n \nearrow R$, $n \to \infty$. Используя известное равенство

$$\ln \mu(r) - \ln \mu(0) = \int\limits_0^r \frac{\nu(t)}{t}\, dt, \quad 0 \leqslant r < R, \tag{1}$$

имеем

$$\sum_{n=0}^{N}\beta(r_n)=\sum_{n=1}^{N} n\{\beta(r_{n-1})-\beta(r_n)\}+\beta_N=\beta_N-\sum_{n=1}^{N} n\int_{r_{n-1}}^{r_n}\beta'(x)\,dx=$$

$$=\beta_N-\sum_{n=1}^{N}\int_{r_{n-1}}^{r_n}\nu(x)\beta'(x)\,dx=\beta_N-\int_0^{r_N}\nu(x)\beta'(x)\,dx=\beta(0)-$$

$$-\int_0^{r_N}x\beta'(x)\frac{\nu(x)}{x}\,dx=\beta_N-\int_0^{r_N}x\beta'(x)\,d\ln\mu(x)=\beta_N+r_N|\beta'(r_N)|\times$$

$$\times\ln\mu(r_N)+\int_0^{r_N}\{\beta'(x)+x\beta''(x)\}\ln\mu(x)\,dx,\tag{2}$$

$\beta_N=(N+1)\beta(r_N)\to 0$, $N\to\infty$. Так как $x\beta'(x)\uparrow 0$, $0\leqslant x\to R$, то $\alpha(x)=\beta'(x)+x\beta''(x)>0$, $0<x<R$, и из (2) получаем

$$0<\int_0^{r_N}\alpha(x)\ln\mu(x)\,dx\leqslant\sum_{n=0}^{N}\beta(r_n),$$

т. е. из сходимости ряда вытекает сходимость интеграла. Наоборот, если $\int_0^R\alpha(x)\ln\mu(x)\,dx<+\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ и всех достаточно больших N справедливо неравенство

$$\varepsilon>\int_{r_N}^{R}\alpha(x)\ln\mu(x)\,dx\geqslant\ln\mu(r_N)\int_{r_N}^{R}d(x\beta'(x))=r_N|\beta'(r_N)|\ln\mu(r_N),$$

т. е. $r_N|\beta'(r_N)|\ln\mu(r_N)\to 0$, $N\to\infty$, и в силу (2) из сходимости интеграла вытекает сходимость ряда.

Если же $\omega<\infty$, то $\sum_{n=0}^{\omega}\beta(r_n)<+\infty$ и одновременно, как было отмечено выше, $\nu(r)=\nu(R^*)$ при $R^*\leqslant r<R$, а значит, $\ln\mu(r)=k_1+k_2\ln r$, $k_j\equiv\text{const}$, при $R^*\leqslant r<R$. Поэтому

$$\int_0^R\alpha(x)\ln\mu(x)\,dx=k_3+\int_{R^*}^{R}(k_1+k_2\ln x)\,d(x\beta'(x))\leqslant k_3+R^*|\beta'(R^*)|\times$$

$$\times(k_1+k_2\ln R^*)-\int_{R^*}^{R}\beta'(x)\,dx=k_4+\beta(R^*)<\infty,$$

и тем самым теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть β — положительная убывающая к 0 на $[0, R)$ функция и существует число $k>1$ такое, что функция $\gamma(x)=\beta^{1/k}(e^x)$ выпуклая на $(-\infty, \ln R)$. Для того чтобы $\sum_{n=1}^{\infty}\beta(r_n)<+\infty$, необходимо, а в случае, когда $|a_{n-1}/a_n|\nearrow R$, $n\to\infty$, и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta(|a_n|^{-1/n})<+\infty.\tag{3}$$

Доказательство. Пусть $R_n=\sqrt[n]{r_1r_2\ldots r_n}$. Так как (r_n) не убывает, то $R_n\leqslant r_n$, и в силу убывания функции β из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\beta(R_n)$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\beta(r_n)$. Наоборот, используя неравенство Чоу [1, с. 400] с $f(x)=\beta(e^x)$, имеем

$$\Sigma\beta(R_n)=\Sigma\beta(e^{\ln R_n})=\Sigma f\left(\frac{\ln r_1+\ldots+\ln r_n}{n}\right)\leqslant C(k)\,\Sigma f(\ln r_n)=C(k)\,\Sigma\beta(r_n),$$
$$C(k)\equiv\text{const},$$

т. е. из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta(r_n)$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta(R_n)$.

Пусть $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ — мажоранта Ньютона функции f [2, с. 7—55] Тогда $b_n=\dfrac{1}{r_1r_2\ldots r_n}=\dfrac{1}{R_n^n}$ и $|a_n|\leqslant b_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$, а в случае, когда $|a_{n-1}/a_n|\nearrow R$, $n\to\infty$, $|a_n|=b_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда вытекает $\beta(R_n)=$ $=\beta(1/\sqrt[n]{b_n})\geqslant\beta(1/\sqrt[n]{|a_n|})$, причем последнее неравенство превращается в равенство, если $|a_{n-1}/a_n|\nearrow R$, $n\to\infty$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Среди коэффициентов a_n могут встречаться такие, что $|a_n|^{-1/n}\geqslant R$, т. е. выражение $\beta(|a_n|^{-1/n})$ в ряде (3) может быть не определено. Чтобы это устранить, будем считать, что $\beta(x)\equiv0$ при $x\geqslant R$.

Замечание 2. Пусть β — положительная дифференцируемая на $[0,R)$ функция, стремящаяся к 0 при $x\to R$. Если при некотором $k>1$ функция $\gamma(x)=\beta^{1/k}(e^x)$ выпуклая на $(-\infty,\ \ln R)$, то $x|\beta'(x)|\downarrow0$, $x\to R$.

Действительно, так как γ — выпуклая функция и $0<\gamma(x)\downarrow0$, $x\to\ln R$, то $\gamma'(x)\nearrow c\leqslant0$, $x\to\ln R$, т. е. $\beta^{-\frac{k-1}{k}}(e^x)|\beta'(e^x)|e^x\searrow|c|$, $x\to\ln R$. Но $\beta^{-\frac{k-1}{k}}(e^x)\uparrow+\infty$, $x\to\ln R$. Поэтому $|\beta'(e^x)|e^x\downarrow0$, $x\to\ln R$ и, значит, $x|\beta'(x)|\downarrow0$, $x\to0$.

Пусть, как и выше, f — аналитическая в $\{z:|z|<R\}$ функция, а функция α положительная на $[0,R)$. Скажем, что функция f принадлежит α-классу сходимости, если $\int\limits_0^R\alpha(x)\ln M(x)\,dx<+\infty$. В силу неравенства Коши $\mu(r)\leqslant M(r)$, $0\leqslant r<R$, для любой функции f, принадлежащей классу сходимости, выполняется соотношение $\int\limits_0^R\alpha(x)\ln\mu(x)\,dx<+\infty$. Поэтому из теорем 1 и 2 в силу замечания 2 получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть β — положительная дважды непрерывно дифференцируемая убывающая к 0 на $[0,R)$ функция такая, что при некотором $k>1$ функция $\gamma(x)=\beta^{1/k}(e^x)$ выпуклая на $(-\infty,\ \ln R)$, а $\alpha(x)=\beta'(x)+$ $+x\beta''(x)$. Для того чтобы аналитическая в круге $\{z:|z|<R\}$ функция f принадлежала α-классу сходимости, необходимо, чтобы выполнялось соотношение* (3).

Из теорем 1 и 2 также вытекает, что если функция β удовлетворяет условиям теоремы 3, $a_{n-1}/a_n\nearrow R$, $n\to\infty$, и $\ln M(r)\sim\ln\mu(r)$, $r\to R$, то условие (3) является также и достаточным для того, чтобы функция f принадлежала α-классу сходимости. Если $R=+\infty$, т. е. f — целая функция, соотношение $\ln M(r)\sim\ln\mu(r)$, $r\to+\infty$, выполняется, если порядок роста функции f конечен [3, с. 31]. В случае $R=1$ соотношение $\ln M(r)\sim\ln\mu(r)$, $r\to1$, выполняется [4], если

$$\varlimsup_{r\to1}\frac{\ln\ln M(r)}{-\ln(1-r)}<+\infty,\quad \varliminf_{r\to1}\frac{\ln M(r)}{-\ln(1-r)}=+\infty.$$

Используя элементарную (справедливую при $0\leqslant r<x<R$) оценку

$$M(r)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,x^n\left(\frac{r}{x}\right)^n\leqslant\mu(x)\,\frac{1}{1-r/x},\tag{4}$$

условие $\ln M(r) \sim \ln \mu(r)$ $(r \to R)$ можно заменить некоторым условием на функцию α. Так, если $R = +\infty$, взяв $x = 2r$, из (4) получим неравенство $M(r) \leqslant 2\mu(2r)$, и достаточно наложить условие $\alpha(2x) \asymp \alpha(x)$ $(x \to +\infty)$, чтобы при прочих требованиях на функцию β и величину $|a_{n-1}/a_n|$ условие (3) было достаточным для принадлежности функции f α-классу сходимости. Если $R = 1$, возьмем $x = (1+r)/2$, и из (4) получим оценку $M(r) \leqslant \frac{2}{1-r}\mu\left(\frac{1+r}{2}\right)$. Поэтому в данном случае вместо условия $\alpha(2x) \asymp \alpha(x)$, $x \to +\infty$, следует наложить условия $\alpha\left(\frac{1+r}{2}\right) \asymp \alpha(r)$, $r \to 1$, и $\int\limits_0^1 \alpha(r) \ln \frac{1}{1-r} dr < +\infty$. Эти условия можно сформулировать в терминах функции β. Чтобы их ослабить, необходимы более точные, чем (4), оценки. Для целых функций такой является недавно полученная в [5] оценка

$$M(r) < \frac{4r+\varepsilon}{\varepsilon}\mu(r)\left\{1 + \ln\frac{\mu(r+\varepsilon)}{\mu(r)}\right\}, \quad 0 < \varepsilon < r < +\infty. \tag{5}$$

Для аналитических в круге $\{z : |z| < 1\}$ функций можно использовать неравенство Валирона [6]

$$M(r) \leqslant \frac{1}{1-r}\mu(r)\left\{2\nu\left(r + \frac{1-r}{\nu(r)}\right) + 1\right\}, \quad r \geqslant r_0. \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть $R = +\infty$, $a_{n-1}/a_n \nearrow +\infty$, $n \to \infty$, функция β удовлетворяет условиям теоремы 3 и, кроме того, $\ln\{(x + O(1))|\beta'(x + O(1))|\} \asymp \ln\{x|\beta'(x)|\}$ $x \to +\infty$. Тогда условие* (3) *достаточно для принадлежности функции f α-классу сходимости.*

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 нужно показать, что из сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \alpha(x)\ln\mu(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \alpha(x)\ln M(x)\,dx$. Так как $\int\limits_0^\infty \alpha(x)\ln\mu(x)\,dx < +\infty$, то как было показано при доказательстве теоремы 1, $r|\beta'(r)|\ln\mu(r) \to 0$, $r \to +\infty$, т. е.

$$\ln\ln\mu(r+1) \leqslant \ln\frac{1}{(r+1)|\beta'(r+1)|} \leqslant K_1 \ln\frac{1}{r|\beta'(r)|}, \quad r \geqslant r_0, \quad K_j \equiv \text{const}.$$

Отсюда вытекает

$$\int\limits_{r_0}^\infty \alpha(x)\ln\ln\mu(x+1)\,dx \leqslant K_1 \int\limits_{r_0}^\infty \ln\frac{1}{x|\beta'(x)|}\,d(x\beta'(x)) < +\infty. \tag{7}$$

Далее,

$$\int\limits_{r_0}^\infty \alpha(x)\ln x\,dx = \int\limits_{r_0}^\infty \ln x\,d(x\beta'(x)) \leqslant K_2 - \int\limits_{r_0}^\infty \beta'(x)\,dx < +\infty. \tag{8}$$

Положив в неравенстве (5) $\varepsilon = 1$, получаем

$$\ln M(r) \leqslant \ln\mu(r) + \ln r + \ln\ln\mu(r+1) + O(1), \quad r \to +\infty,$$

и в силу (7) и (8) $\int\limits_0^\infty \alpha(x)\ln M(x)\,dx < +\infty$.

Примерами функций, удовлетворяющих условиям теорем 3 и 4, могут служить, например, $\beta(x) \equiv \exp\{-\rho x\}$ при $x \geqslant e/\rho$ и $\beta(x) \equiv x^{-\rho}$ при $x \geqslant 1$, где $\rho > 0$. В частности, если в теоремах 3 и 4 возьмем $\beta(x) \equiv x^{-\rho}$, то получим следующее утверждение.

Следствие 1 [7, с. 187]. *Пусть f — целая функция, а $\rho > 0$. Для того чтобы* $\int\limits_1^\infty r^{-(\rho+1)} \ln M(r)\, dr < +\infty$, *необходимо, а в случае, когда* $|a_{n-1}/a_n| \nearrow +\infty$, $n \to \infty$, *и достаточно, чтобы* $\sum\limits_{n=1}^\infty |a_n|^{\rho/n} < +\infty$.

Теорема 5. *Пусть* $R = 1$, $|a_{n-1}/a_n| \nearrow 1$, $n \to \infty$, *функция* β *удовлетворяет условиям теоремы 3 и, кроме того,* $\int\limits_0^1 \beta(r)(1-r)^{-2}\, dr < \infty$ *и* $\ln\{(r + \delta(1-r))\,|\beta'(r + \delta(1-r))|\} \asymp \ln\{r\,|\beta'(r)|\}$, $r \to 1$, $0 < \delta < 1$. *Тогда условие* (3) *достаточно для принадлежности функции f α-классу сходимости.*

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 4, из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \alpha(x) \ln \mu(x)\, dx$ для всех r, достаточно близких к 1, имеем

$$\ln \ln \mu\left(\frac{3+r}{4}\right) \leqslant \ln \frac{1}{\left(r + \frac{3}{4}(1-r)\right)\left|\beta'\left(r + \frac{3}{4}(1-r)\right)\right|} \leqslant K_3 \ln \frac{1}{r\,|\beta'(r)|},$$

т. е.

$$\int\limits_0^1 \alpha(x) \ln^+ \ln \mu\left(\frac{3+x}{4}\right) dx < +\infty. \tag{9}$$

Далее,

$$\int\limits_0^1 \alpha(x) \ln \frac{1}{1-x}\, dx \leqslant -\int\limits_0^1 \frac{x\beta'(x)}{1-x}\, dx \leqslant -\int\limits_0^1 \frac{\beta'(x)}{1-x}\, dx \leqslant \beta(0) +$$

$$+ \int\limits_0^1 \frac{\beta(x)\, dx}{(1-x)^2} < +\infty. \tag{10}$$

Так как $\nu(r) \geqslant 2$ для всех r, достаточно близких к 1, то из (6) получаем неравенство

$$\ln M(r) \leqslant \ln \mu(r) + \ln \frac{1}{1-r} + \ln \nu\left(\frac{1+r}{2}\right) + O(1), \quad r \to 1.$$

С другой стороны, используя равенство (1), получаем

$$\ln \mu\left(\frac{3+r}{4}\right) \geqslant \int\limits_{\frac{1+r}{2}}^{\frac{3+r}{4}} \frac{\nu(x)}{x}\, dx \geqslant \nu\left(\frac{1+r}{2}\right) \ln \frac{3+r}{2(1+r)} = \nu\left(\frac{1+r}{2}\right) \times$$

$$\times \ln\left\{1 + \frac{1-r}{2(1+r)}\right\} \sim \nu\left(\frac{1+r}{2}\right) \frac{1-r}{4}, \quad r \to 1,$$

т. е.

$$\ln \nu\left(\frac{1+r}{2}\right) \leqslant \ln \ln \mu\left(\frac{3+r}{4}\right) + \ln \frac{1}{1-r} + O(1), \quad r \to 1.$$

Таким образом,

$$\ln M(r) \leqslant \ln \mu(r) + \ln \ln \mu\left(\frac{3+r}{4}\right) + 2\ln \frac{1}{1-r} + O(1), \quad r \to 1,$$

и в силу (9) и (10) $\int\limits_0^1 \alpha(x) \ln^+ M(x)\, dx < +\infty$.

Примерами функций, удовлетворяющих условиям теорем 3 и 5, могут служить функции $\beta(x) \equiv \exp\left\{-\frac{\rho}{1-x}\right\}$ и $\beta(x) \equiv (1-x)^{\rho+1}$ при $x^* \leqslant \leqslant x < 1$, где $\rho > 0$. Если возьмем $\beta(x) \equiv (1-x)^{\rho+1}$, то из этих теорем получим следующее утверждение.

Следствие 2 [8]. *Пусть f — аналитическая в круге $\{z : |z| < 1\}$ функция, а $\rho > 0$. Для того чтобы $\int\limits_0^1 (1-r)^{\rho-1} \ln^+ M(r)\,dr < +\infty$, необходимо, а в случае, когда $|a_{n-1}/a_n| \nearrow 1$, $n \to \infty$, и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^+|a_n|}{n}\right)^{\rho+1} < +\infty.$$

При доказательстве этого следствия необходимо учесть, что $\ln\frac{1}{x} \sim \sim (1-x)$, $x \to 1$.

1. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
2. *Костовский А.* Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных.— Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1967.— 208 с.
3. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения.— М. : Наука, 1971.— 518 с.
4. *Шеремета М. М.* Аналоги теореми Бореля для аналітичних функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 1985.— Вип. 24.— С. 32—33.
5. *Lockhart P., Straus E. G.* Relations between the maximum modulus and maximum term of entire functions // Pacif. J. Math.— 1985.— **118**, N 2.— P. 479—485.
6. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М. : Мир, 1957.— 202 с.
7. *Valiron G.* General theory of integral functions.— Toulouse : Privat, 1913.— 382 p.
8. *Галь Ю. М., Шеремета М. Н.* Принадлежность аналитических функций классу сходимости // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 7.— С. 11—14.

Львов. ун-т

Получено 19.09.88