УДК 517.944:519.56

Р. З. Жданов

О некоторых точных решениях нелинейной системы Дирака—Гамильтона

Получен набор подстановок, сводящих систему многомерных дифференциальных уравнений Дирака— Гамильтона к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Построены широкие классы точных решений этой системы.

Одержано набір підстановок, що зводять систему багатовимірних диференціальних рівнянь Дірака — Гамільтона до звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано широкі класи точних розв'язків цієї системи.

Стандартной математической моделью, используемой для описания взаимодействия спинорного и скалярного полей, является система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) вида [1]

$$\begin{cases} \gamma_\mu p^\mu \varphi = f_1(\bar{\psi}\psi, u)\,\psi, \\ p_\mu p^\mu u = f_2(\bar{\psi}\psi, u), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \end{cases} \tag{1}$$

где $\psi = \psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — четырехкомпонентный дираковский спинор, $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$, γ_μ — (4×4)-матрицы Дирака, удовлетворяющие алгебре Клиффорда

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I = 2I \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = \overline{1,3}, \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases}$$

$p_0 = i\partial/\partial x_0$, $p_a = -i\partial/\partial x_a$; $u(x)$ — скалярная функция. Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование в пространстве Минковского $R(1, 3)$.

В работе [2] предложена другая модель взаимодействия, базирующаяся на системе уравнений

$$\begin{cases} \gamma_\mu p^\mu \psi = f_1(\bar{\psi}\psi, u)\psi, \\ (p_\mu u)(p^\mu u) = f_2(\bar{\psi}\psi, u). \end{cases} \tag{2}$$

Важной особенностью уравнений (2) является то, что они образуют систему ДУЧП первого порядка.

В настоящей статье построены в явном виде анзацы (подстановки), редуцирующие уравнения (2) к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Большинство из получаемых таким образом систем ОДУ удается проинтегрировать и тем самым построить частные решения исходных нелинейных ДУЧП. Эта программа реализована для случая $f_1 = m$, $f_2 = \lambda(\bar{\psi}\psi)^k$; m, λ, k — const.

1. Редукция системы (2) к ОДУ. Используемый подход существенно опирается на теоретико-групповые свойства системы ДУЧП (2). При произвольных f_1, f_2 максимальной группой симметрии системы (2) является группа Пуанкаре $P(1,3)$ с базисными генераторами

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad \mu, \nu = \overline{0, 3},$$

дополненная группой калибровочных преобразований.

Решение уравнений (2) ищем в виде

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \quad u(x) = \Phi(\omega), \tag{3}$$

где $\varphi(\omega)$, $\Phi(\omega)$ — новые неизвестные функции; переменная (4×4)-матрица $A(x)$ и скалярная функция $\omega(x)$ определяются из следующих соотношений:

$$Q_a^{\mathrm{dif}}\omega(x) = 0, \quad Q_a A(x) = 0, \quad a = \overline{1, 3}. \tag{4}$$

В (4) Q_1, Q_2, Q_3 — образующие трехмерной подалгебры алгебры Ли $AP(1, 3) = \{P_\mu, J_{\alpha\beta}\}$; Q_a^{dif} обозначает дифференциальную часть оператора Q_a.

Классификация всех неэквивалентных с точностью до группового автоморфизма подалгебр алгебры $AP(1,3)$ проведена в [3]. Каждой такой подалгебре соответствует некоторый анзац вида (3), который получается в результате интегрирования системы (4).

Процедура интегрирования переопределенных систем ДУЧП вида (4) подробно рассмотрена в [4]. Приведем конечный результат — наборы анзацев для $\psi(x)$, $u(x)$:

1) $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$: $A = I$, $\omega = x_3$;

2) $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$: $A = I$, $\omega = x_0$;

3) $\langle P_0 + P_3, P_1, P_2\rangle$: $A = I$, $\omega = x_0 + x_3$;

4) $\langle J_{03}, P_1, P_2\rangle$: $A = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right\}$, $\omega = x_0^2 - x_3^2$;

5) $\langle J_{03}, P_0 + P_3, P_1\rangle$: $A = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right\}$, $\omega = x_2$;

6) $\langle J_{03} + \alpha P_2, P_0, P_3\rangle$; $A = \exp\left\{\frac{x_2}{2\alpha}\gamma_0\gamma_3\right\}$, $\omega = x_1$;

7) $\langle J_{03} + \alpha P_2, P_0 + P_3, P_1\rangle$: $A = \exp\left\{\frac{x_2}{2\alpha}\gamma_0\gamma_3\right\}$, $\omega = \alpha\ln(x_0 + x_3) - x_2$;

8) $\langle J_{12}, P_0, P_3\rangle$: $A = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}$, $\omega = x_1^2 + x_2^2$;

9) $\langle J_{12}+\alpha P_0, P_1, P_2\rangle$: $A=\exp\left\{-\frac{x_0}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}$, $\omega=x_3$;

10) $\langle J_{12}+\alpha P_3, P_1, P_2\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{x_3}{2\alpha}\gamma_1\gamma_2\right\}$, $\omega=x_0$;

11) $\langle J_{12}+P_0+P_3, P_1, P_2\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{1}{4}(x_3-x_0)\gamma_1\gamma_2\right\}$, $\omega=x_0+x_3$;

12) $\langle G_1, P_0+P_3, P_2\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$, $\omega=x_0+x_3$;

13) $\langle G_1, P_0+P_3, P_1+\alpha P_2\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{\alpha x_1-x_2}{2\alpha(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$, $\omega=x_0+x_3$; (5)

14) $\langle G_1+P_2, P_0+P_3, P_1\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{x_2}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$, $\omega=x_0+x_3$;

15) $\langle G_1+P_0, P_0+P_3, P_2\rangle$: $A=\exp\left\{-\frac{x_0+x_3}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$, $\omega=2x_1+(x_0+x_3)^2$;

16) $\langle G_1+P_0, P_1+\alpha P_2, P_0+P_3\rangle$: $A=\exp\left\{-\frac{x_0+x_3}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$, $\omega=2(x_2-\alpha x_1)-\alpha(x_0+x_3)^2$;

17) $\langle J_{03}+\alpha J_{12}, P_0, P_3\rangle$: $A=\exp\left\{-\frac{1}{2\alpha}(\gamma_0\gamma_3+\alpha\gamma_1\gamma_2)\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}$, $\omega=x_1^2+x_2^2$;

18) $\langle J_{03}+\alpha J_{12}, P_1, P_2\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma_0\gamma_3+\alpha\gamma_1\gamma_2)\ln(x_0+x_3)\right\}$, $\omega=x_0^2-x_3^2$;

19) $\langle G_1, G_2, P_0+P_3\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2(x_0+x_3)}(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)\right\}$, $\omega=x_0+x_3$;

20) $(G_1+P_2, G_2+\alpha P_1+\beta P_2, P_0+P_3\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{\gamma_0+\gamma_3}{2[(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)-\alpha]}\times\right.$ $\left.\times[\gamma_1[(x_0+x_3+\beta)x_1-\alpha x_2]+\gamma_2[(x_0+x_3)x_2-x_1]]\right\}$, $\omega=x_0+x_3$;

21) $\langle G_1, G_2+P_1+\beta P_2, P_0+P_3\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1+\right.$ $\left.+\frac{x_2}{2(x_0+x_3)(x_0+x_3+\beta)}(\gamma_0+\gamma_3)[\gamma_2(x_0+x_3)-\gamma_1]\right\}$, $\omega=x_0+x_3$;

22) $\langle G_1, G_1+P_2, P_0+P_3\rangle$: $A=\exp\left\{(\gamma_0+\gamma_3)\left[\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}\gamma_1+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{x_2}{2(x_0+x_3+1)}\gamma_2\right]\right\}$, $\omega=x_0+x_3$;

23) $\langle G_1, J_{03}, P_2\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+\right.$ $\left.+x_3)\right\}$, $\omega=x_0^2-x_1^2-x_3^2$;

24) $\langle J_{03}+\alpha P_1+\beta P_2,\ G_1, P_0+P_3\rangle$: $A=\exp\left\{\frac{x_1-\alpha\ln(x_0+x_3)}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\right.$ $\left.+\gamma_3)\gamma_1\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}$, $\omega=x_2-\beta\ln(x_0+x_3)$;

25) $\langle J_{12} + P_0 + P_3, G_1, G_2\rangle$: $\quad A = \exp\left\{\dfrac{\gamma_0+\gamma_3}{2(x_0+x_3)}(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)\right\}\times$

$$\times\exp\left\{-\frac{x_\mu x^\mu}{4(x_0+x_3)}\gamma_1\gamma_2\right\},\quad \omega = x_0+x_3;$$

26) $\langle J_{03} + \alpha J_{12}, G_1, G_2\rangle$: $\quad A = \exp\left\{\dfrac{\gamma_0+\gamma_3}{2(x_0+x_3)}(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)\right\}\times$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma_0\gamma_3+\alpha\gamma_1\gamma_2)\ln(x_0+x_3)\right\},\quad \omega = x_\mu x^\mu.$$

Здесь $G_k = J_{0k} + J_{k3}$, $k=\overline{1,2}$; α, β — const.

Подставляя анзацы (3), (5) в уравнения (1), после некоторых довольно громоздких преобразований получаем системы ОДУ для функций $\varphi(\omega)$, $\Phi(\omega)$:

1) $i\gamma_3\dot\varphi = F_1,\ -\dot\Phi^2 = F_2;$

2) $i\gamma_0\dot\varphi = F_1,\ \dot\Phi^2 = F_2;$

3) $i(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi = F_1,\ 0 = F_2;$

4) $\dfrac{i}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi + i[\omega(\gamma_0+\gamma_3)+\gamma_0-\gamma_3]\dot\varphi = F_1,\ \ 4\omega\dot\Phi^2 = F_2;$

5) $\dfrac{i}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi + i\gamma_2\dot\varphi = F_1,\ -\dot\Phi^2 = F_2;$

6) $-\dfrac{i}{2\alpha}\gamma_1\gamma_4\varphi + i\gamma_1\dot\varphi = F_1,\ -\dot\Phi^2 = F_2;$

7) $-\dfrac{i}{2\alpha}\gamma_1\gamma_4\varphi + i[\alpha(\gamma_0+\gamma_3)e^{-\omega/\alpha}-\gamma_2]\dot\varphi = F_1,\ -\dot\Phi^2 = F_2;$

8) $\dfrac{i}{2}\gamma_2\omega^{-1/2}\varphi + 2i\omega^{1/2}\gamma_2\dot\varphi = F_1,\ -4\omega\dot\Phi^2 = F_2;$

9) $-\dfrac{i}{2\alpha}\gamma_3\gamma_4\varphi + i\gamma_3\dot\varphi = F_1,\ -\dot\Phi^2 = F_2;$

10) $\dfrac{i}{2\alpha}\gamma_0\gamma_4\varphi + i\gamma_0\dot\varphi = F_1,\ \dot\Phi^2 = F_2;$

11) $\dfrac{i}{4}(\gamma_0-\gamma_3)\gamma_4\varphi + i(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi = F_1,\ \ 0 = F_2;$

12) $\dfrac{i}{2\omega}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi + i(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi = F_1,\ 0 = F_2;$

13) $\dfrac{i}{2\alpha\omega}(\alpha+\gamma_4)(\gamma_0+\gamma_3)\varphi + i(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi = F_1,\ 0 = F_2;$

14) $\dfrac{i}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_4\varphi + i(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi = F_1,\ \ 0 = F_2;$

15) $2i\gamma_1\dot\varphi = F_1,\ -4\dot\Phi^2 = F_2;$

16) $2i(\gamma_2-\alpha\gamma_1)\dot\varphi = F_1,\ -4(\alpha^2+1)\dot\Phi^2 = F_2;$

17) $\dfrac{i\omega^{-1/2}}{2\alpha}\gamma_2(\alpha-\gamma_4)\varphi + 2i\gamma_2\omega^{1/2}\dot\varphi = F_1,\ -4\omega\dot\Phi^2 = F_2;$

18) $\dfrac{i}{2}(\gamma_0+\gamma_3)(1+\alpha\gamma_4)\varphi + i[\omega(\gamma_0+\gamma_3)+\gamma_0-\gamma_3]\dot\varphi = F_1,\ 4\omega\dot\Phi^2 = F_2;$

19) $\dfrac{i}{\omega}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi + i(\gamma_0+\gamma_3)\dot\varphi = F_1,\ 0 = F_2;$

20) $\frac{i}{2}[(\omega+\beta)\omega-\alpha]^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)\{[-\alpha+1]\gamma_4+2\omega+\beta\}\varphi+i(\gamma_0+$

$+\gamma_3)\dot{\varphi}=F_1,\quad 0=F_2;$

21) $i[2\omega(\omega+\beta)]^{-1}(2\omega+\beta-\gamma_4)(\gamma_0+\gamma_3)\varphi+i(\gamma_0+\gamma_3)\dot{\varphi}=F_1,\ 0=F_2;$

22) $\frac{i}{2}(2\omega+1)[\omega(\omega+1)]^{-1}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi+i(\gamma_0+\gamma_3)\dot{\varphi}=F_1,\ 0=F_2;$

23) $i(\gamma_0+\gamma_3)\varphi+i[(\gamma_0+\gamma_3)\omega+\gamma_0-\gamma_3]\dot{\varphi}=F_1,\ 4\omega\dot{\Phi}^2=F_2;$

24) $i(\gamma_0+\gamma_3)\varphi+i[\gamma_2-\beta(\gamma_0+\gamma_3)]\dot{\varphi}=F_1,\ -\dot{\Phi}^2=F_2;$

25) $i(\gamma_0+\gamma_3)\dot{\varphi}+i[(\gamma_0+\gamma_3)\omega^{-1}+\frac{1}{4}(\gamma_0-\gamma_3)\gamma_4]\varphi=F_1,\ 0=F_2;$

26) $\frac{i}{2}(\gamma_0+\gamma_3)(3+\alpha\gamma_4)\varphi+i[(\gamma_0+\gamma_3)\omega+\gamma_0-\gamma_3]\dot{\varphi}=F_1,\ 4\omega\dot{\Phi}^2=F_2.$

Здесь $\dot{\varphi}=d\varphi/d\omega$, $\dot{\Phi}=d\Phi/d\omega$, $F_1=f_1(\bar{\varphi}\varphi,\Phi)$, $F_2=f_2(\bar{\varphi}\varphi,\Phi)$.

2. Точные решения. Системы ОДУ 1—26 обладают тем замечательным свойством, что большинство из них может быть проинтегрировано в квадратурах при очень широких предположениях относительно нелинейностей f_1, f_2. В дальнейшем будем рассматривать частный случай уравнений (2), когда $f_1=m$, $f_2=\lambda(\bar{\psi}\psi)^k$.

Из первого уравнения системы ОДУ 1 следует, что $\bar{\psi}\psi=\text{const}$. Используя этот факт, нетрудно получить общее решение этой системы

$$\varphi(\omega)=\exp\{im\gamma_3\omega\}\chi,\quad \Phi(\omega)=(-\lambda)^{1/2}(\bar{\chi}\chi)^{k/2}\omega. \tag{6}$$

Подстановка решения (6) в формулы (3) дает частное решение уравнений (2) вида

$$\psi(x)=\exp\{im\gamma_3x_3\}\chi,\quad u(x)=(-\lambda)^{1/2}(\bar{\chi}\chi)^{k/2}x_3.$$

Интегрируя аналогичным образом системы 2, 4—6, 8, 15, 16, 23, 24, 26, получаем следующие классы точных решений системы Дирака—Гамильтона (2):

$$\psi_1(x)=\exp\{im\gamma_3x_3\}\chi,\quad u_1(x)=(-\lambda)^{1/2}(\bar{\chi}\chi)^{k/2}x_3;$$

$$\psi_2(x)=\exp\{-im\gamma_0x_0\}\chi,\quad u_2(x)=\lambda^{1/2}(\bar{\chi}\chi)^{k/2}x_0;$$

$$\psi_3(x)=\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_2(\gamma_0+\gamma_3+2im)x_2\right\}\chi,\quad u_3(x)=$$
$$=(-\lambda)^{1/2}(\bar{\chi}\chi)^{k/2}x_2;$$

$$\psi_4(x)=\exp\left\{-\frac{x_0+x_3}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\exp\left\{\frac{im}{2}\gamma_1[2x_1+(x_0+x_3)^2]\right\}\chi,$$

$$u_4(x)=\frac{1}{2}(-\lambda)^{1/2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2}[2x_1+(x_0+x_3)^2];$$

$$\psi_5(x)=\exp\left\{-\frac{x_0+x_3}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\exp\left\{\frac{im}{2(\alpha^2+1)}(\gamma_2-\alpha\gamma_1)[2(x_2-\alpha x_1)-\right.$$
$$\left.-\alpha(x_0+x_3)^2]\right\}\chi,\quad u_5(x)=\frac{(-\lambda)^{1/2}}{2(1+\alpha^2)^{1/2}}(\bar{\chi}\chi)^{k/2}[2(x_2-\alpha x_1)-\alpha(x_0+x_3)^2];$$

$$\psi_6(x)=\exp\left\{\frac{x_1-\alpha\ln(x_0+x_3)}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}\times$$
$$\times\exp\{[\gamma_2-\beta(\gamma_0+\gamma_3)](\gamma_0+\gamma_3+im)(x_2-\beta\ln(x_0+x_3))\}\chi,$$

$$u_6(x) = (-\lambda)^{1/2} (\bar{\chi}\chi)^{k/2} [x_2 - \beta \ln(x_0 + x_3)];$$

$$\psi_7(x) = \exp\left\{\frac{x_2}{2\alpha} \gamma_0\gamma_3\right\} \exp\left\{\frac{x_1}{2\alpha} (\gamma_4 + 2i\alpha m\gamma_1)\right\} \chi_1, \quad u_7(x) = (-\lambda)^{1/2} \times$$

$$\times \int^{x_1} [\tau_1 \operatorname{ch}^2 \tau z + \tau_2 \operatorname{sh}^2 \tau z + \tau_3 \operatorname{ch} \tau z \operatorname{sh} \tau z]^{k/2} dz;$$

$$\psi_8(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2} \gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2}\right\} \exp\left\{\frac{im}{2} \gamma_2 (x_1^2 + x_2^2)\right\} \chi,$$

$$u_8(x) = (-\lambda)^{1/2} (\bar{\chi}\chi)^{k/2} \begin{cases} 2(2-k)^{-1} (x_1^2 + x_2^2)^{(2-k)/4}, & k \neq 2, \\ \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2), & k = 2; \end{cases}$$

$$\psi_9(x) = \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right\} \varphi_1 (x_0^2 - x_3^2),$$

$$u_9(x) = \begin{cases} 2(2-k)^{-1} \lambda^{1/2} C^{k/2} (x_0^2 - x_3^2)^{(2-k)/4}, & k \neq 2, \\ \frac{1}{2} \lambda^{1/2} C \ln(x_0^2 - x_3^2), & k = 2; \end{cases}$$

$$\psi_{10}(x) = \exp\left\{\frac{x_1}{x_0 + x_3} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_0\gamma_3 \ln(x_0 + x_3)\right\} \varphi_2 (x_0^2 - x_1^2 - x_3^2),$$

$$u_{10}(x) = \begin{cases} (1-k)^{-1} \lambda^{1/2} C^{k/2} (x_0^2 - x_1^2 - x_3^2)^{(1-k)/2}, & k \neq 1, \\ \frac{1}{2} \lambda^{1/2} C^{1/2} \ln(x_0^2 - x_1^2 - x_3^2), & k = 1; \end{cases}$$

$$\psi_{11}(x) = \exp\left\{\frac{\gamma_0 + \gamma_3}{2(x_0 + x_3)} (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} (\gamma_0\gamma_3 + \alpha\gamma_1\gamma_2) \ln(x_0 + x_3)\right\} \times$$

$$\times \varphi_3 (x_\mu x^\mu),$$

$$u_{11}(x) = \begin{cases} 2\lambda^{1/2} (2-3k)^{-1} C^{k/2} (x_\mu x^\mu)^{(2-3k)/4}, & k \neq 2/3, \\ \frac{1}{2} \lambda^{1/2} C^{1/3} \ln(x_\mu x^\mu), & k = 2/3, \end{cases}$$

где χ — постоянный четырехкомпонентный спинор; функции φ_N даются формулами

$$\varphi_N^0 = \omega^{(2-N)/4} [\chi^0 J_\nu (m\sqrt{\omega}) + \chi^2 Y_\nu (m\sqrt{\omega})],$$

$$\varphi_N^1 = \frac{i(2-N)}{2m} \omega^{-(2+N)/4} [\chi^3 J_\nu (m\sqrt{\omega}) + \chi^1 Y_\nu (m\sqrt{\omega})] + i\omega^{-N/4} \times$$

$$\times [\chi^3 \dot{J}_\nu (m\sqrt{\omega}) + \chi^1 \dot{Y}_\nu (m\sqrt{\omega})],$$

$$\varphi_N^2 = \frac{i(2-N)}{2m} \omega^{-(2+N)/4} [\chi^0 J_\nu (m\sqrt{\omega}) + \chi^2 Y_\nu (m\sqrt{\omega})] + i\omega^{-N/4} \times$$

$$\times [\chi^0 \dot{J}_\nu (m\sqrt{\omega}) + \chi^2 \dot{Y}_\nu (m\sqrt{\omega})],$$

$$\varphi_N^3 = \omega^{(2-N)/4} [\chi^3 J_\nu (m\sqrt{\omega}) + \chi^1 Y_\nu (m\sqrt{\omega})],$$

$$\nu = (2-N)/2, \quad C = \frac{2i}{\pi m} (\chi^{0*}\chi^2 - \chi^0\chi^{2*} + \chi^{3*}\chi^1 - \chi^3\chi^{1*}).$$

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе анзацы могут быть использованы для редукции произвольных систем ДУЧП для спинорного и скалярного полей, инвариантных относительно группы Пуанкаре P (1,3).

1. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М. : Наука, 1984.— 600 с.
2. *Фущич В И.* О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решения // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 4—19.
3. *Grundland A., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys.— 1984.— **25**, N 4.— P. 791—807.
4. *Fushchich W. I., Zhdanov R. Z.* On some exact solutions of a system of nonlinear differential equations for spinor and vector fields // J. Phys.— 1987.— **20**A, N 13.— P. 4173—4190.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.09.88