УДК 519.4

Я. И. Диасамидзе

Об односторонних нулях подмножеств полугруппы бинарных отношений

Описаны односторонние нули элементов и подмножеств полугруппы всех бинарных отношений на произвольном непустом множестве. Для конечного множества нулей получены формулы для их числа.

Описані однобічні нулі елементів та підмножин півгрупи всіх бінарних відношень у довільній непорожній множині. Для скінченної множини нулів наведено формули для їх числа.

1. Пусть X есть произвольное непустое множество. Под бинарным отношением на множестве X понимают подмножество α декартова произведения $X \times X$ множества X на себя. Если $(x;\ y) \in \alpha$, где x, y — элементы множества X, то будем также писать $x\alpha y$.

Если α и β — отношения на X, то их композиция $\alpha\circ\beta$ определяется следующим образом: $x\alpha\circ\beta y$ в том и только в том случае, если. существует такой элемент $z \in X$, что $x\alpha z\beta y$. Очевидно, что множество $\mathcal{B}_X$ всех бинарных отношений на X является полугруппой относительно операции.

Пусть $Y \subseteq X$ и $\alpha \in \mathcal{B}_X$. Тогда $\varnothing$, $\Delta_Y = \{(y;\ y) \mid y \in Y\}$ и $\alpha^{-1} = \{(x;\ y) \mid y\alpha x\}$, обозначают соответственно пустое, частично-тождественное и обратное к отношению α отношение.

Очевидно, что отношения $\varnothing$ и Δ_X соответственно суть нуль и единица полугруппы $\mathcal{B}_X$.

Далее, пусть $Y\alpha = \{x \in X \mid y\alpha x$ для некоторого $y \in Y\}$ и $\alpha Y = Y\alpha^{-1}$. Притом вместо $\{y\}\alpha$ или $\alpha\{y\}$ всегда будем писать $y\alpha$ или αy.

Теперь, если для элементов β и α из $\mathscr{B}_X$ справедливо равенство $\beta\circ\alpha = \beta$, то говорят, что отношение β есть левый нуль для α, а отношение α есть правая единица для β.

Аналогично определяется правый нуль и левая единица.

2. Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{B}_X$ и $\mathscr{B}$ есть некоторое непустое подмножество из $\mathscr{B}_X$. Тогда $V(\beta) = \{Y\beta \mid Y \subseteq X\}$; $V(\mathscr{B}) = \bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} V(\delta)$ и $V(\beta; \alpha) = \{Y \mid Y \in V(\beta); Y\alpha = Y\}$. Отметим, что для множества $V(\beta; \alpha)$ справедливы следующие утверждения:

1) $\varnothing \in V(\beta; \alpha)$;
2) $V(\beta; \alpha) \subseteq V(\alpha)$;
3) $V(\beta; \alpha) \subseteq V(\beta)$;
4) $V(\beta; \alpha) \subseteq V(\Delta_X; \alpha)$ для любого β и α из $\mathscr{B}_X$;
5) если $\{Y_i\}_{i\in I}$ есть некоторое семейство элементов из $V(\beta; \alpha)$, то $\bigcup_{i\in I} Y_i \in V(\beta; \alpha)$.

Действительно, утверждения 1—3 очевидны. Утверждение 4 справедливо, так как $V(\beta) \subseteq V(\Delta_X)$ для любого $\beta \in \mathscr{B}_X$. Истинность утверждения 5 следует из справедливости равенств $Y_i\alpha = Y_i$, $i \in I$, и

$$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)\alpha = \bigcup_{i\in I} Y_i\alpha = \bigcup_{i\in I} Y_i.$$

3. Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{B}_X$. Тогда $\beta\circ\alpha = \beta$ в том и только в том случае, если $V(\beta; \alpha) = V(\beta)$.*

Доказательство. Сперва отметим, что в силу утверждения 3 из п. 2 справедливо включение $V(\beta; \alpha) \subseteq V(\beta)$.

Теперь пусть $\beta\circ\alpha = \beta$ и $y \in V(\beta)$. Тогда $Y = Z\beta$ для некоторого $Z \subseteq X$. Отсюда с учетом того, что $\beta\circ\alpha = \beta$, $Y \in V(\beta)$, получим

$$Y = Z\beta = Z(\beta\circ\alpha) = (Z\beta)\alpha = Y\alpha \in V(\beta; \alpha).$$

Значит, $V(\beta) \subseteq V(\beta; \alpha)$ и поэтому $V(\beta; \alpha) = V(\beta)$.

Обратно, пусть α и β — такие отношения из $\mathscr{B}_X$, что $V(\beta; \alpha) = V(\beta)$, и докажем, что $\beta\circ\alpha = \beta$.

В самом деле, пусть $x\beta\circ\alpha y$ для некоторых $x, y \in X$. Тогда $y \in x(\beta\circ\alpha) = (x\beta)\alpha = x\beta$, так как $x\beta \in V(\beta)$ и $V(\beta; \alpha) = V(\beta)$. Значит, $x\beta y$ и поэтому $\beta\circ\alpha \subseteq \beta$. Далее, пусть $z\beta t$ для некоторых $z, t \in X$. Тогда $t \in z\beta$ и в силу равенства $V(\beta; \alpha) = V(\beta)$ получим $z\beta = (z\beta)\alpha$, т. е. $t \in (z\beta)\alpha = z(\beta\circ\alpha)$ и $z\beta\circ\alpha t$. Следовательно, $\beta \subseteq \beta\circ\alpha$ и поэтому $\beta = \beta\circ\alpha$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $\beta \in \mathscr{B}_X$. Тогда $\beta\circ\beta = \beta$ в том и только в том случае, если $V(\beta; \beta) = V(\beta)$.*

Доказательство. Следствие непосредственно следует из доказанной леммы 1 при $\alpha = \beta$.

4. Так как справедливо равенство $V(\Delta_X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$, то в дальнейшем множество $V(\Delta_X; \alpha)$ всегда будем обозначать через $V[\alpha]$.

Теорема 1. *Пусть α — некоторое фиксированное отношение из $\mathscr{B}_X$. Отношение β из $\mathscr{B}_X$ есть левый нуль для отношения α в том и только в том случае, если $V(\beta) \subseteq V[\alpha]$.*

Доказательство. Пусть $\beta \in \mathscr{B}_X$ и $\beta\circ\alpha = \beta$. Тогда в силу леммы 1 и утверждения 4 из п. 2 соответственно получим $V(\beta) \subseteq V(\beta; \alpha)$ и $V(\beta; \alpha) \subseteq V[\alpha]$, т. е. $V(\beta) \subseteq V[\alpha]$.

Обратно, пусть β — такое отношение из $\mathscr{B}_X$, что $V(\beta) \subseteq V[\alpha]$. Тогда для любого $Z \in V(\beta)$ справедливо равенство $Z\alpha = Z$, так как $Z \in V[\alpha]$. Значит, $Z \in V(\beta; \alpha)$ и поэтому $V(\beta) \subseteq V(\beta; \alpha)$. Обратное включение следует из утверждения 3 из п. 2. Следовательно, $V(\beta) = V(\beta; \alpha)$. Отсюда в силу леммы получаем $\beta\circ\alpha = \beta$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть α — фиксированное отношение из $\mathscr{B}_X$. Отношение β из $\mathscr{B}_X$ есть правый нуль для отношения α в том и только в том случае, если $V(\beta^{-1}) \subseteq V[\alpha^{-1}]$.*

Доказательство. Пусть для β имеет место равенство $\alpha\circ\beta=\beta$. Последнее равенство справедливо тогда и только тогда, когда $\beta^{-1}\circ\alpha^{-1}=\beta^{-1}$. Значит, отношение β^{-1} есть левый нуль для α^{-1}. Но это в силу теоремы 1 возможно в том и только в том случае, если $V(\beta^{-1})\subseteq V[\alpha^{-1}]$.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{B}$ — есть некоторое непустое подмножество из $\mathcal{B}_X$. Отношение α из $\mathcal{B}_X$ есть правая единица для элементов множества $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, если $V(\mathcal{B})\subseteq V[\alpha]$.*

Доказательство. Пусть для любого β из $\mathcal{B}$ имеет место равенство $\beta\circ\alpha=\beta$. Тогда в силу теоремы 1 для любого $\beta\in\mathcal{B}$ справедливо включение $V(\beta)\subseteq V[\alpha]$. Отсюда по определению $V(\mathcal{B})$ [1, 2] получаем $V(\mathcal{B})\subseteq V[\alpha]$.

Обратно, если $\mathcal{B}$ — такое непустое подмножество из $\mathcal{B}_X$, что $V(\mathcal{B})\subseteq V[\alpha]$, то $V(\beta)\subseteq V[\alpha]$ для любого $\beta\in\mathcal{B}$. Отсюда в силу теоремы 1 имеем $\beta\circ\alpha=\beta$ для любого $\beta\in\mathcal{B}$. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Пусть $\alpha\in\mathcal{B}_X$ и $\alpha\circ\alpha=\alpha$. Отношение β из $\mathcal{B}_X$ есть левый нуль для отношения α в том и только в том случае, если $V(\beta)\subseteq V(\alpha)$.*

Доказательство. По предположению $\alpha\circ\alpha=\alpha$. Поэтому в силу теоремы 1 справедливо включение $V(\alpha)\subseteq V[\alpha]$. Далее ввиду утверждения 2 из п. 2 справедливо включение $V[\alpha]\subseteq V(\alpha)$. Значит, $V[\alpha]=V(\alpha)$. Следствие 3 доказано.

5. Теорема 2. *Пусть $\alpha;\ \delta\in B_X$. Множества всех левых нулей отношений α и δ совпадают в том и только в том случае, если $V[\alpha]=V[\delta]$.*

Доказательство. Пусть множества всех левых нулей отношений α и δ совпадают и $Y\in V[\alpha]$. Тогда $Y\alpha=Y$ и $Y\in V(\Delta_X)$. Если $\beta=X\times Y$, то

$$\beta\circ\alpha=(X\times Y)\circ\alpha=X\times Y\alpha=X\times Y=\beta,$$

т. е. β есть левый нуль для α и $\beta\circ\delta=\beta$ по предположению. Отсюда в силу теоремы 1 получаем $Y\in V(\beta)\subseteq V[\delta]$, т. е. $V[\alpha]\subseteq V[\delta]$. Аналогично доказывается включение $V[\delta]\subseteq V[\alpha]$. Следовательно, $V[\alpha]=V[\delta]$.

Теперь пусть α и δ — такие отношения из $\mathcal{B}_X$, что $V[\alpha]=V[\delta]$ и $\beta\circ\alpha=\beta$ для некоторого $\beta\in\mathcal{B}_X$. Тогда в силу теоремы 1 справедливо включение $V(\beta)\subseteq V[\alpha]$, т. е. $V(\beta)\subseteq V[\delta]$, так как $V[\alpha]=V[\delta]$. В силу той же теоремы получаем $\beta\circ\delta=\beta$. Значит, множество всех левых нулей отношения α есть подмножество множества всех левых нулей отношения δ. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, множества всех левых нулей отношений α и δ совпадают. Теорема доказана.

Далее, пусть $\mathcal{B}$ — непустое подмножество полугруппы $\mathcal{B}_X$, $\delta\in\mathcal{B}_X$ и $D(\delta;\mathcal{B})=\bigcap\limits_{\beta\in\mathcal{B}}V(\delta;\beta)$. Отметим, что при $\delta=\Delta_X$ вместо $D(\Delta_X;\mathcal{B})$ будем писать $D[\mathcal{B}]$.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ — некоторые подмножества полугруппы $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}\neq\varnothing$. Тогда множество $\mathcal{A}$ является множеством правых единиц для элементов из $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, если $V(\mathcal{B})\subseteq D[\mathcal{A}]$.*

Доказательство. Пусть множество $\mathcal{A}$ является множеством правых единиц для элементов из $\mathcal{B}$. Тогда в силу следствия 2 из теоремы 1 для любого $\alpha\in\mathcal{A}$ справедливо включение $V(\mathcal{B})\subseteq V[\alpha]$. Отсюда получаем $V(\mathcal{B})\subseteq D[\mathcal{A}]$. Теперь пусть подмножества $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ из $\mathcal{B}_X$ такие, что для них справедливо включение $V(\mathcal{B})\subseteq D[\mathcal{A}]$, $\beta\in\mathcal{B}$, $\delta\in\mathcal{A}$. Тогда $V(\beta)\subseteq V(\mathcal{B})\subseteq D[\mathcal{A}]\subseteq V[\delta]$. Отсюда в силу теоремы 1 находим $\beta\circ\delta=\beta$, т. е. множество $\mathcal{A}$ является множеством правых единиц для элементов из $\mathcal{B}$. Следствие 1 доказано.

6. Пусть $\mathcal{B}$ — некоторое непустое подмножество полугруппы $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}^{-1}\{\beta^{-1}\mid\beta\in\mathcal{B}\}$. Множество всех левых нулей элементов множества $\mathcal{B}$ в полугруппе $\mathcal{B}_X$ обозначим через $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$, а множество всех правых нулей элементов из $\mathcal{B}$ в полугруппе $\mathcal{B}_X$ — через $\mathcal{V}_X^{(r)}(\mathcal{B})$.

Отметим, что для фиксированного непустого подмножества $\mathcal{B}$ из $\mathcal{B}_X$ множества $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{O}_X^{(r)}(\mathcal{B})$ суть подполугруппы полугруппы $\mathcal{B}_X$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{B}$ — непустое подмножество из $\mathcal{B}_X$. Тогда полугруппы $\mathcal{O}_X^{(r)}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B}^{-1})$ антиизоморфны.*

Доказательство. В самом деле, равенство $\beta\circ\alpha=\beta$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1}\circ\beta^{-1}=\beta^{-1}$. Отсюда получаем, что отображение $\varphi:\mathcal{B}_X\to\mathcal{B}_X$, удовлетворяющее условию $\varphi(\beta)=\beta^{-1}$ для любого $\beta\in\mathcal{B}_X$, является антиизоморфизмом полугруппы $\mathcal{B}_X$ на $\mathcal{B}_X$. Далее очевидно, что ограничение φ_1 отображения φ на полугруппе $\mathcal{O}_X^{(r)}(\mathcal{B})$ является антиизоморфизмом полугруппы $\mathcal{O}_X^{(r)}(\mathcal{B})$ на полугруппу $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B}^{-1})$. Лемма доказана.

В связи с доказанной леммой в дальнейшем будем рассматривать только полугруппы вида $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — некоторое непустое подмножество полугруппы $\mathcal{B}_X$.

7. Через $\overline{X}$, $|Z|$, Z^Y будем обозначать соответственно множество всех одноэлементных подмножеств из X, мощность множества Z и множество всех отображений множества Y в множестве Z.

Теорема 3. *При любом непустом $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}_X$ множества $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$ и $D[\mathcal{B}]^X$ равномощны.*

Доказательство. Пусть α — произвольный элемент множества $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$. Тогда в силу следствия 1 из п. 5 получаем $V(\alpha)\subseteq D[\mathcal{B}]$. Поэтому отображение $\theta:\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})\to D[\mathcal{B}]$, удовлетворяющее условию $\theta(\alpha)=$ $=f_\alpha$, где $f_\alpha(\overline{x})=\overline{x}\alpha$ для любого $\overline{x}\in\overline{X}$, взаимно однозначно.

Теперь, если f — произвольный элемент из $D[\mathcal{B}]^{\overline{X}}$ и

$$\delta=\bigcup_{\overline{x}\in\overline{X}}(\overline{x}\times f(\overline{x})),$$

то $f=f_\delta$ в силу определения f_δ и $\delta\in\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$, так как $V(\delta)\subseteq D[\mathcal{B}]$.

Следовательно, θ есть взаимно однозначное отображение множества $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$ на множество $D[\mathcal{B}]^{\overline{X}}$. Отсюда следует, что множества $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$ и $D[\mathcal{B}]^X$ равномощны, так как множества X и $\overline{X}$ равномощны. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ — непустые подмножества полугруппы $\mathcal{B}_X$. Тогда полугруппы $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{A})$ равномощны в том и только в том случае, если множества $D[\mathcal{B}]$ и $D[\mathcal{A}]$ равномощны.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.

Следствие 2. *Если $\mathcal{B}$ есть непустое подмножество полугруппы $\mathcal{B}_X$ и $|X|=n$, то порядок полугруппы $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$ равен $|D[\mathcal{B}]|^n$.*

Доказательство. Как известно, число всех отображений n-элементного множества X в $|D[\mathcal{B}]|$-элементное множество $D[\mathcal{B}]$ равно $|D[\mathcal{B}]|^n$. Теперь справедливость следствия 2 непосредственно следует из теоремы 3.

8. Изучим порядки полугруппы $\mathcal{O}_X^{(l)}(\mathcal{B})$ при $\mathcal{B}=\{\beta\}$, где β есть отношение эквивалентности на некотором непустом подмножестве Y множества X.

Лемма 3. *Пусть β есть отношение эквивалентности на некотором непустом подмножестве Y множества X, T является множеством представителей всех β-классов множества Y и $Z\subseteq Y$. Тогда $Z\beta=Z$ в том и только в том случае, если $Z=\bigcup\limits_{t'\in T'}t'\beta$ для некоторого $T'\subseteq T$.*

Доказательство. Пусть β есть отношение эквивалентности на некотором непустом подмножестве Y множества X и $Z\beta=Z$ при некотором $Z\subseteq Y$. Докажем, что

$$Z=\bigcup_{t'\in T'}t'\beta. \tag{1}$$

В самом деле, если $Z=\varnothing$, то $T'=\varnothing$ и справедливость равенства (1) очевидна. Допустим, что $Z\neq\varnothing$, $M=\{y\beta\mid y\in Y;\ y\beta\cap Z\neq\varnothing\}$, $(\bigcup M)\cap$ $\cap T=T'$. Тогда $\bigcup M=\bigcup\limits_{t'\in T'}t'\beta$ и если $y\in\bigcup M$ для некоторого $y\in Y$, то $y\in t\beta$ при некотором $t\in T'$. С другой стороны, в силу $t\beta\in M$ существует

$z_t \in Y$ такой, что $z_t \in Z$ и $z_t \in t\beta$. Значит, $z_t \beta t \beta y$ и $z_t \beta y$, так как $\beta = \beta^{-1}$ и $\beta \circ \beta = \beta$. По предположению $Z\beta = Z$, поэтому $y \in z_t\beta \subseteq Z\beta = Z$, т. е. $\bigcup M \subseteq Z$.

Теперь пусть $z \in Z$. Тогда $z \in Z\beta$, так как $Z = Z\beta$, т. е. существует $t'' \in Z$ такой, что $z \in t''\beta$. Поэтому $z \in t''\beta \cap Z \neq \varnothing$ и $t''\beta \in M$ по определению множества M. Значит, $z \in t''\beta \subseteq \bigcup M$, т. е. $Z \subseteq \bigcup M$. Следовательно, $Z = \bigcup M$

Обратно, если $Z = \bigcup\limits_{t' \in T'} t'\beta$ для некоторого $Z \subseteq Y$, то

$$Z\beta = \Big(\bigcup_{t' \in T'} t'\beta\Big)\beta = \bigcup_{t' \in T'} (t'\beta)\beta = \bigcup_{t' \in T'} t'(\beta \circ \beta) = \bigcup_{t' \in T'} t'\beta = Z,$$

так как $\beta \circ \beta = \beta$. Лемма доказана.

Далее, через 2^T обозначим множество всех подмножеств множества T.

Следствие 1. *Пусть $\beta \subseteq Y \times Y$ есть отношение эквивалентности на непустом подмножестве Y множества X и T является множеством представителей всех β-классов множества Y. Тогда множества $\mathcal{O}_X^l(\beta)$ и $(2^T)^X$ равномощны.*

Доказательство. В силу теоремы 3 для доказательства следствия достаточно доказать, что множества $V[\beta]$ и 2^T равномощны. В самом деле, в силу леммы 3 для любого $Z \in V[\beta]$ в множестве 2^T существует подмножество $T(Z)$ такое, что $Z = \bigcup\limits_{t \in T(Z)} t\beta$, притом, по определению множества T, элементы из $\{t\beta \mid t \in T\}$ попарно не пересекаются. Поэтому объединения различных подмножеств из множества $\{t\beta \mid t \in T\}$ различны.

Следовательно, отображение $\theta' : V[\beta] \to 2^T$, удовлетворяющее условию $\theta'(Z) = T(Z)$ для любого $Z \in V[\beta]$, является взаимно однозначным отображением множества $V[\beta]$ на множестве 2^T. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть $\beta \subseteq Y \times Y$ есть отношение эквивалентности на непустом подмножестве Y n-элементного множества X и m есть число всех β-классов множества Y. Тогда порядок полугруппы $\mathcal{O}_X^{(l)}(\beta)$ равен 2^{mn}.*

Доказательство. Пусть T есть множество представителей всех β-классов множества Y. Тогда $|T| = m$. Поэтому число всех подмножеств множества T равно 2^m. Далее, число всех отображений n-элементного множества X в 2^m-элементном множестве 2^T будет $(2^m)^n = 2^{mn}$. Теперь следствие 2 непосредственно следует из следствия 1. Следствие 2 доказано.

1. *Зарецкий К. А.* Полугруппа бинарных отношений // Мат. сб.— 1963.— **61**, № 3. — С. 291—305.
2. *Ляпин Е. С.* Полугруппы.— М. : Физматгиз, 1960.— 592 с.

Батум. пед. ин-т

Получено 09.02.89