УДК 517.95

А. И. Фирдман, С. Д. Эйдельман

О единственности решения граничных задач для бигармонического уравнения

Доказываются новые теоремы единственности неотрицательных решений граничных задач для бигармонического уравнения в полосе. Доказательства основаны на детальном исследовании специальных мероморфных функций, естественным образом возникающих при изучении граничных задач.

Доводяться нові теореми єдиності невід'ємних розв'язків граничних задач для бігармонічного рівняння у смузі. Доведення грунтуються на детальному дослідженні спеціальних мероморфних функцій, які природним чином виникають при вивченні граничних задач.

Известно, что для единственности решения граничных задач для эллиптических уравнений необходимы дополнительные условия на поведение решений на бесконечности. Такие условия могут быть качественно различными. В. А. Кондратьев и один из авторов в [1] установили, что одним из естественных условий единственности является предположение о неотрицательности решения при больших значениях аргумента. При доказательстве таких утверждений существенную роль играют некоторые спектральные характеристики, возникающие при изучении специальных мероморфных функций $R(\lambda)$, представляющих решение задачи. Конечно, можно формулировать различные условные теоремы, постулируя требуемые свойства $R(\lambda)$. В настоящей статье на примере нескольких задач для бигармонического уравнения построим и детально проанализируем $R(\lambda)$. Этот анализ дополняет результаты [1].

1. Основной результат. Изучаются решения $u(x, y)$ следующих граничных задач для бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 u = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2\, u(x, y) = 0 \tag{1}$$

в полосе $\Pi = \{(x, y) \mid -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1\}$.

Задача 1. Найти решение $u_1(x, y)$ уравнения (1) в полосе Π, удовлетворяющее граничным условиям

$$u_1|_{y=0} = f_0^0(x),\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = f_1^0(x),\ u_1|_{y=1} = f_0^1(x),\ \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right|_{y=1} = f_2^1(x). \tag{2}$$

Задача 2. Найти решение $u_2(x, y)$ уравнения (1) в полосе Π, удовлетворяющее граничным условиям

$$u_2|_{y=0} = f_0^0(x),\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0} = f_1^0(x),\ \left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right|_{y=1} = f_2^1(x),\ \left.\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}\right|_{y=1} = f_3^1(x). \tag{3}$$

В первой задаче рассматривается пластинка, один край которой закреплен, а второй имеет шарнирную опору; задача 2 — второй край свободен.

Обозначим через Π^+ полуполосу: $\Pi^+ = \Pi \cap \{x > 0\}$. Задачи с нулевыми граничными условиями будем называть однородными граничными задачами.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Решение однородной задачи* (1), (2) *или* (1), (3), *неотрицательное в* Π^+, *тождественно равно нулю.*

Для сравнения рассмотрим еще две задачи теории упругости.

Задача 3. Найти решение $u_3(x, y)$ уравнения (1) в полосе Π, удовлетворяющее граничным условиям

$$u_3|_{y=0} = f_0^0(x);\ \left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right|_{y=0} = f_2^0(x);\ u_3|_{y=1} = f_0^1(x);\ \left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right|_{y=1} = f_2^1(x).$$

Задача 4. Найти решение $u_4(x, y)$ уравнения (1) в полосе П, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}\right|_{y=0} = f_2^0(x); \quad \left.\frac{\partial^3 u_4}{\partial y^3}\right|_{y=0} = f_3^0(x); \quad \left.\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}\right|_{y=1} = f_2^1(x); \quad \left.\frac{\partial^3 u_4}{\partial y^3}\right|_{y=1} = f_3^1(x).$$

Задача 3 о шарнирно-опертой пластинке, задача 4 — о пластинке со свободным краем. Однородная задача 3 имеет нетривиальное неотрицательное решение $u_3(x, y) = \sin \pi y \operatorname{ch} \pi x$, а задача 4 — $u_4(x, y) = x^2$. Таким образом, в случае задач 3 и 4 не справедливы теоремы единственности такого типа, как в [1], и основная теорема настоящей статьи.

2. Первая фаза доказательства теоремы. Справедливость теоремы устанавливается по схеме, предложенной в [1]. Вначале из неотрицательности решения $u(x, y)$ бигармонического уравнения в полуполосе на основании теории положительных решений, созданной В. А. Кондратьевым и С. Д. Эйдельманом, устанавливается, что $u(x, y)$ растет не быстрее экспоненты при $x \to \infty$ (лемма 1 из [1]). Затем вместо функций $u_k(x, y)$, $k = 1, 2$, рассматриваются функции $v_k(x, y) = u_k(x, y)\,\theta(x)$, где $\theta(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\theta(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 2$ и нулю при $x \leqslant 1$. При этом относительно $v_k(x, y)$ получаются неоднородные уравнения

$$\Delta^2 v_k = f_k(x, y), \qquad k = 1, 2, \tag{4}$$

где бесконечно дифференцируемые функции $f_k(x, y)$ тождественно равны нулю при $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$.

То, что функции $v_k(x, y)$ и их производные растут не быстрее экспоненты при $x \to \infty$, позволяет применить комплексное преобразование Фурье по переменной x и получить относительно функций

$$V_k(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda} v_k(x, y)\, dx, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \tag{5}$$

уравнения

$$(d^2/dy^2 - \lambda^2)^2 V_k(\lambda, y) = F_k(\lambda, y), \qquad k = 1, 2, \tag{6}$$

где $F_k(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda} f_k(x, y)\, dx$, и граничные условия

$$V_1|_{y=0} = \left.\frac{dV_1}{dy}\right|_{y=0} = 0, \quad V_1|_{y=1} = \left.\frac{d^2V_1}{dy^2}\right|_{y=1} = 0, \tag{7_1}$$

$$V_2|_{y=0} = \left.\frac{dV_2}{dy}\right|_{y=0} = 0, \; \left.\frac{d^2V_2}{dy^2}\right|_{y=1} = \left.\frac{d^3V_2}{dy^3}\right|_{y=1} = 0. \tag{7_2}$$

Отметим, что из финитности и бесконечной дифференцируемости функций $f_k(x, y)$ следует, что $F_k(\lambda, y)$ — целые по λ функции, для которых справедливы оценки

$$|F_k(\lambda, y)| \leqslant C_{kq}(1 + |\sigma|^2)^{-q} \exp\{c_1|\tau|\} \quad \forall q. \tag{8}$$

Решения $V_k(\lambda, y)$ задач (6), (7_1); (6), (7_2) определяются формулами

$$V_k(\lambda, y) = \int_0^1 R_k(\lambda; y, s)\, F_k(\lambda, s)\, ds, \tag{9}$$

где $R_1(\lambda; y, s)$ — функция Грина задачи (6), (7_1); $R_2(\lambda; y, s)$ — задачи (6), (7_2). Функции Грина $R_k(\lambda; y, s)$ удовлетворяют соответствующим граничным условиям и следующим соотношениям при $y = s$:

$$\lim_{y \to s+0} \frac{\partial^j}{\partial y^j} R_k(\lambda; y, s) - \lim_{y \to s-0} \frac{\partial^j}{\partial y^j} R_k(\lambda; y, s) = \delta_{j3}, \qquad j = 0, 1, 2, 3, \; k = 1, 2. \tag{10}$$

Функции $R_k(\lambda; y, s)$ определяются формулами

$$R_k(\lambda; y, s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2} a_j^k(\lambda, s)\,\varphi_j(\lambda, y), & 0 < y < s, \\ \sum_{j=1}^{2} b_j^k(\lambda, s)\,\psi_j^k(\lambda, y), & s < y < 1, \end{cases} \qquad (1$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \psi_1^k, \psi_2^k\}$ образуют фундаментальную систему решений уравне ния (6). При этом функции φ_1, φ_2 удовлетворяют граничным условия (7) при $y = 0$, а ψ_1^k, ψ_2^k — граничным условиям (7_k) при $y = 1$, $k = 1, 2$. Эт функции определяются следующими равенствами:

$$\varphi_1(\lambda, y) = \operatorname{sh}\lambda y - \lambda y \operatorname{ch}\lambda y;\ \varphi_2(\lambda, y) = y \operatorname{sh}\lambda y;\ \psi_1^1(\lambda, y) = \operatorname{sh}\lambda(1-y);$$

$$\psi_2^1(\lambda, y) = (1-y)\operatorname{ch}\lambda(1-y);\ \psi_1^2(\lambda, y) = 2\operatorname{ch}\lambda(1-y) - \lambda(1-y)\times$$

$$\times \operatorname{sh}\lambda(1-y);\ \psi_2^2(\lambda, y) = 3\operatorname{sh}\lambda(1-y) - \lambda(1-y)\operatorname{ch}\lambda(1-y).$$

Коэффициенты $a_j^k(\lambda, s)$, $b_j^k(\lambda, s)$, $j, k = 1, 2$, находятся из равенств (10 Обозначим через $\Delta_1(\lambda) = \operatorname{sh}2\lambda - 2\lambda$, $\Delta_2(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{ch}^2\lambda - 3$. Тогда

$$a_1^1(\lambda, s) = [\lambda s \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\lambda(1-s) + \operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\lambda(1-s) - \lambda(1-s)\operatorname{ch}\lambda; s]\times$$

$$\times[\lambda^3\Delta_1(\lambda)]^{-1};\ a_2^1(\lambda, s) = [s\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\lambda(1-s) - (1-s)\operatorname{ch}\lambda s][\lambda\Delta_1(\lambda)]^{-1};$$

$$b_1^1(\lambda, s) = [\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\lambda s + \lambda \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\lambda s - \lambda s \operatorname{ch}\lambda \operatorname{ch}\lambda s - \lambda^2 s \operatorname{sh}\lambda(1-s)]\times$$

$$\times[\lambda^3\Delta_1(\lambda)]^{-1};\ b_2^1(\lambda, s) = [\lambda s \operatorname{ch}\lambda(1-s) - \operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\lambda s][\lambda^2\Delta_1(\lambda)]^{-1};$$

$$a_1^2(\lambda, s) = [\lambda^2(1-s)\operatorname{ch}\lambda s - 3\operatorname{ch}\lambda s - \operatorname{ch}\lambda \operatorname{ch}\lambda(1-s) - \lambda s \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda(1-s)]\times$$

$$\times[4\lambda^3\Delta_2(\lambda)]^{-1};\ a_2^2(\lambda, s) = -[(\lambda^2 - \lambda^2 s + 1)\operatorname{sh}\lambda s + \lambda s \operatorname{ch}\lambda \operatorname{ch}\lambda(1-s) +$$

$$+ \lambda s \operatorname{ch}\lambda s][2\lambda^2\Delta_2(\lambda)]^{-1};\ b_1^2(\lambda, s) = [-\lambda^2 s \operatorname{sh}\lambda(1-s) + \lambda(1-s)\operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\lambda s +$$

$$+ 2\lambda s \operatorname{ch}\lambda(1-s) - 2\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\lambda s][2\lambda^3\Delta_2(\lambda)]^{-1};$$

$$b_2^2(\lambda, s) = [\lambda^2 s \operatorname{ch}\lambda(1-s) - \lambda s \operatorname{sh}\lambda(1-s) - \lambda(1-s)\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\lambda s +$$

$$+ \operatorname{sh}^2\lambda s \operatorname{ch}\lambda(1-s) + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\lambda s][2\lambda^3\Delta_2(\lambda)]^{-1}.$$

3. Изучение свойств функций $R_k(\lambda; y, s)$. Изучим мер морфные функции $R_k(\lambda; y, s)$ комплексного аргумента $\lambda = \sigma + i\tau$. Анал явных формул, которыми определяются эти функции в окрестности точк $\lambda_0 = 0$, показывает, что λ_0 — регулярная точка этих функций. Для прим нения рассуждений [1] необходимо убедиться в справедливости следующи утверждений: 1) полюсы $R_k(\lambda; y, s)$ имеют отличные от нуля вещественн части; 2) в каждой конечной полосе $|\tau| < A$ комплексной λ-плоскост полюсов $R_k(\lambda; y, s)$ конечное число; 3) при больших $|\sigma|$ в каждой поло $|\tau| < A$ справедлива оценка

$$|R_k(\lambda; y, s)| \leqslant C_A|\lambda|^2 \exp\{-|\lambda||y-s|\}. \qquad (1$$

Переходим к доказательству утверждений 1—3.

Доказательство. Полюсами функций $R_k(\lambda; y, s)$ являют нули функций $\Delta_k(\lambda)$, отличные от λ_0. Исследуем их. Нули $\Delta_1(\lambda)$ являю ся решениями уравнения $\operatorname{sh}2\lambda = 2\lambda$. Ненулевые решения этого уравн ния имеют отличные от нуля вещественные части. Это непосредствен следует из того, что уравнение $\sin z = z$, $z = i\mu$, $\mu = 2\lambda = -iz$ не име ненулевых вещественных решений.

Докажем теперь утверждение 2. Уравнение $\operatorname{sh}2\lambda = 2\lambda$ эквивалент системе вещественных уравнений

$$\operatorname{sh}2\sigma\cos 2\tau = 2\sigma,\ \operatorname{ch}2\sigma\sin 2\tau = 2\tau. \qquad (1$$

При $2\tau = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ система (13) не имеет решений. Вне полос $|2\tau - k\pi| < \delta$ при любом малом δ не существует последовательности (σ_m, τ_m) решений системы (13) с $|\sigma_m| \to \infty$ при $m \to \infty$, так как это противоречит второму уравнению (13). Наконец, не может быть последовательности решений (σ_m, τ_m) системы (13) такой, что $|\sigma_m| \to \infty$, $\tau_m \to k\pi/2$, так как при больших $|\sigma_m|$ и τ_m близких к $k\pi/2$ не может выполняться первое уравнение системы (13). Итак, утверждение 2 для $R_1(\lambda; y, s)$ доказано.

Изучим расположение нулей функции $\Delta_2(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{ch}^2\lambda - 3$. Уравнение $\Delta_2(\lambda) = 0$ эквивалентно системе вещественных уравнений

$$\mathrm{ch}\, 2\sigma \cos 2\tau = 2\sigma^2 - 2\tau^2 - 7, \quad \mathrm{sh}\, 2\sigma \sin 2\tau = 4\sigma\tau. \tag{14}$$

При $2\tau = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ система (14) не имеет решений, так как заведомо не выполнено второе равенство. В полосах $k\pi + \delta < 2\tau < (k + 1)\pi - \delta$, δ — любое малое положительное число, нет последовательности решений (δ_m, τ_m) системы (14) с $|\sigma_m| \to \infty$ при $m \to \infty$. Это следует из второго уравнения (14) и того, что $|\mathrm{sh}\, 2\sigma_m/2\sigma_m| \to \infty$, а $2\tau_m/\sin 2\tau_m| \leqslant \leqslant (k + 1)\pi/\sin 2\delta$. Рассмотрим теперь последнюю возможность: существует последовательность решений (σ_m, τ_m) системы (14) такая, что $|\sigma_m| \to \infty$, $2\tau_m \to k\pi$. Перепишем первое уравнение (14) в виде $\{\mathrm{ch}\, 2\sigma_m/(2\sigma_m^2 - 2\tau_m^2 - 7)\} = \{1/\cos 2\tau_m\}$, которое при большом m не может быть удовлетворено. Утверждение 2 для $R_2(\lambda; y, s)$ доказано.

Утверждение 3 следует из явных формул, которыми определяются функции $a_j^k(\lambda, s)$, $b_j^k(\lambda, s)$, $\varphi_j(\lambda, y)$, $\psi_j^k(\lambda; y)$. При этом, конечно, существенно используются утверждения 1, 2.

4. Завершение доказательства теоремы. Справедливость утверждений 1, 2, 3 позволяет повторить рассуждения [1] (окончание п. 2 и п. 3). Этим и завершается доказательство основного результата настоящей статьи.

1. *Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д.* О бигармонических функциях, неотрицательных в полуполосе // Мат. заметки.— 1974.— **15**, № 1.— С. 125—132.

Омс. политехн. ин-т Получено 06.01.89